準線距離倒數和的平均值是定值！

柯明錦

國立新莊高級中學

壹、源起

科學教育月刊(170 期)刊載了八十二年度高中數學第三屆數學競賽決賽試題的一道題目：

設$A_1,A_2,A_3,\ldots\ldots A_{83}$依序為橢圓 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 逆時針方向上的 83 個點，
以橢圓之一焦點F(4,0)為頂點作
$\angle A_1FA_2,\angle A_2FA_3,\ldots\ldots,\angle A_{82}FA_{83}$；
並使$\angle A_1FA_2=\angle A_2FA_3=\ldots\ldots=\angle A_{82}FA_{83}$，令
$d_i=A_i$到準線$x=\dfrac{25}{4}$的距離($i=1,2,3,\ldots.,83$)，試求
$\displaystyle\sum_{i=1}^{83}\frac{1}{d_i}$之值。

對於這個問題，國立台灣師範大學趙文敏教授已經給了一個解答，本文稍加推廣，並且換一角度來看這個問題。

此題可以轉成先在橢圓上任取一點A_1，並以焦點F 為旋轉中心再依著角度 $\dfrac{2\pi}{n}$ 取其上的$n-1$ 個點：$A_2,A_3,\ldots A_n$，則求這n個點到右準線距離的倒數和。

這個問題是和有多少，另外一個令人好奇的問題是和的平均值是多少？

而這個平均值有其幾何上的意義嗎？如何用一個具有代表性的值來說明？

貳、研究過程或方法

一、記號和定義

設$A_1,A_2,A_3,\ldots.,A_n$為橢圓(雙曲線、拋物線)上，以焦點為旋轉中心依等角度$\dfrac{2\pi}{n}$所取的n個點，$A_i=(x_i,y_i)$而α為$\overline{A_1F}$ 的連線與x軸正向的夾角，所以$\overline{A_iF}$ 與x軸正向夾角$=\alpha+(i-1)\dfrac{2\pi}{n}$，$d_i=d(A_i,L)$，其中L為準線。

二、研究方法或步驟

(一)橢圓

1.以標準式：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

設其焦點F(c,0)，則$a^2=b^2+c^2$，右準線的方程式為 $x-\dfrac{a^2}{c}=0$

則$d(F,L)=\dfrac{a^2}{c}-c=d_i+\overline{A_iF}\times\cos[\alpha+(i-1)\dfrac{2\pi}{n}]$

而焦半徑

$\overline{A_iF}=a-\frac{c}{a}x_i=\frac{c}{a}\times(\frac{a^2}{c}-x_i)=\frac{c}{a}\times d_i$

$\Rightarrow \frac{a^2}{c}-c=d_i+\frac{c}{a}\times d_i\times\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]$

$\Rightarrow \frac{1}{d_i}=\frac{c}{b^2}\times\{1+\frac{c}{a}\times\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]\}$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{c}{b^2}\times\{1+\frac{c}{a}\times\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]\}$$

$$=\frac{c}{b^2}\times\sum_{i=1}^{n}\{1+\frac{c}{a}\times\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]\}$$

$$=\frac{c}{b^2}\times\{n+\frac{c}{a}\sum_{i=1}^{n}\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]\}$$

$$=\frac{nc}{b^2}$$

2.補充證明：$\sum_{i=1}^{n}\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]=0$

令 $S=\sum_{i=1}^{n}\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]$

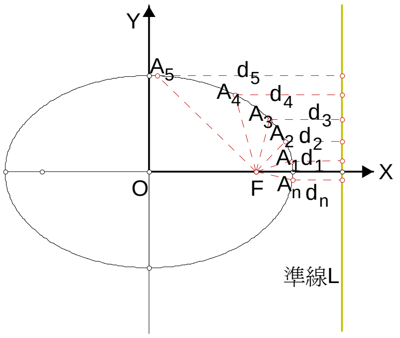
(等號兩邊同乘 $2\sin\frac{\pi}{n}$)

則 $2\sin\frac{\pi}{n}\times S$

$$=\sum_{i=1}^{n}2\sin\frac{\pi}{n}\times\cos[\alpha+(i-1)\frac{2\pi}{n}]$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\{\sin[\frac{\pi}{n}+(i-1)\frac{2\pi}{n}+\alpha]-\sin[(i-1)\frac{2\pi}{n}+\alpha-\frac{\pi}{n}]\}$$

$$=\sin(\frac{\pi}{n}+\frac{2n\pi-2\pi}{n}+\alpha)-\sin(\alpha-\frac{\pi}{n})=0$$



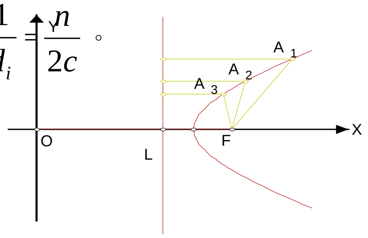
(二)雙曲線：以標準式：

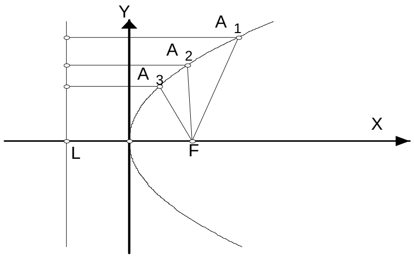
$$\frac{x2}{a2}-\frac{y2}{b2}=1 \text{ 為例(右支)}$$

由於雙曲線是開放圖形，雖然是無限延伸，可是必定能夠選取第一個點(不平行貫軸)，所以我們也可在其右支選取 n 個點，並求這 n 個點到右準線距離的倒數和，得出 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=\frac{nc}{b^2}$。

(三)拋物線：以標準式 $y^2=4c\ X$ 為例

由於拋物線是開放圖形，雖然是無限延伸，可是必定能夠選取第一個點(不平行對稱軸)，所以我們在其上選取 n 個點，並求這 n 個點到準線距離的倒數和，得出 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}=\frac{n}{2c}$。





參、研究結果

(一)橢圓上任取等角度的 n 個點，則這 n 個點到左(右)準線距離倒數和= $\dfrac{nc}{b^2}$ 。

(二)雙曲線右支上任取等角度的 n 個點，則這 n 個點到右準線距離倒數和= $\dfrac{nc}{b^2}$ 。

(三)拋物線上任取等角度的 n 個點，則這 n 個點到準線距離倒數和= $\dfrac{n}{2c}$ 。

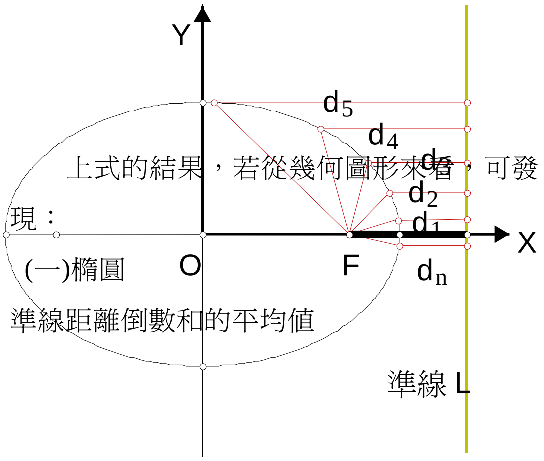
肆、討論

在這個研究裡，如果將對橢圓、雙曲線、拋物線求準線距離倒數和的結果求其平均值，哪麼會得到一個美妙的結果：

(一)橢圓求準線距離倒數和的平均值= $\dfrac{c}{b^2}$

(二)雙曲線求準線距離倒數和的平均值= $\dfrac{c}{b^2}$

(三)拋物線求準線距離倒數和的平均值= $\dfrac{1}{2c}$



上式的結果，若從幾何圖形來看，可發現：

(一)橢圓

準線距離倒數和的平均值

$$=\frac{c}{b^2}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n}=\frac{c}{b^2}=\frac{1}{\frac{b^2}{c}}=\frac{1}{d(F,L)}$$

(二)雙曲線

準線距離倒數和的平均值

$$=\frac{c}{b^2}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n}=\frac{c}{b^2}=\frac{1}{\frac{b^2}{c}}=\frac{1}{d(F,L)}$$

(三)拋物線

準線距離倒數和的平均值

$$=\frac{1}{2c}\Rightarrow\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n}=\frac{1}{2c}=\frac{1}{d(F,L)}$$

伍、結論

對一般的圓錐曲線，以焦點 F 旋轉中心，設 di = d(Ai，L)，其中 L 爲準線

若 A_i 與 A_{i+1} 和F的連線夾角都相等，則

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n}=\frac{1}{d(F,L)}$$

亦即**這 *n* 個點到準線距離倒數和的平均值等於焦點到準線距離的倒數。**

陸、參考資料及其他

科學教育月刊(170 期)–國立台灣師範大學科學教育中心。

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}}{n}=\frac{1}{d(F,L)}$$

亦即這***n***個點到準線距離倒數和的平均值等於焦點到準線距離的倒數。

陸、參考資料及其他

科學教育月刊(170 期)–國立台灣師範大學科學教育中心。