

中學生通訊解題第二十七期題目

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

912701

數列 $t_1, t_2, t_3, t_4, \dots$ 以如右的規則定

義： $t_1=2, t_{n+1}=\frac{t_n-1}{t_n+1}, n=1,2,3,\dots$ 試求 t_{2003} 的

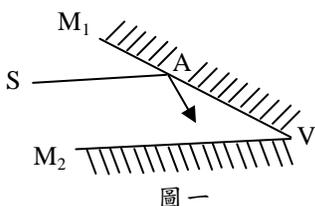
值。

問題編號

912702

二鏡面 M_1, M_2 夾 30° 角(如圖一)，一光線從 S 點出發、平行於鏡面 M_2 、入射至鏡面 M_1 於 A 點，然後在二鏡面間反射(此反射遵守反射定律)。經過若干次反射後，光線又回到 S 點，

若 $\overline{SA} = \overline{AV} = 1$ ，試問：光線從 S 出發後一直到回到 S 為止所走的距離總和。



圖一

問題編號

912703

- (1) 設 a, b 是整數，且 $10a+b$ 是 7 的倍數，試證： $a-2b$ 也是 7 的倍數。
- (2) 設 a, b 是整數，且 $5a+4b$ 是 7 的倍數，試證： $4a-b$ 也是 7 的倍數。

問題編號

912704

碗中有 n 顆彈珠，甲乙丙三人一起玩遊戲，遊戲規則如下：

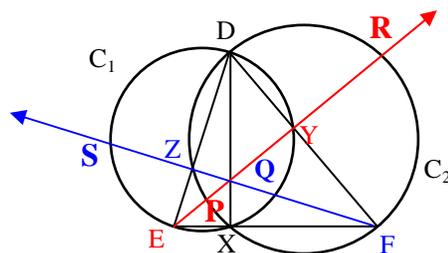
甲乙丙每人依序輪流從碗中拿走 1 或 2 顆彈珠(順序即為：甲乙丙甲乙丙甲乙丙...)，拿到最後一顆彈珠的人就是輸家。請問：

- (1) 如果一開始有 5 顆彈珠(即 $n=5$)，請問乙和丙能否合作迫使甲成為輸家？
- (2) 請求出所有能讓乙丙合作而迫使甲成為輸家的 n 值。

問題編號

912705

$\triangle DEF$ 是銳角三角形， \overline{DX} 為高，圓 C_1, C_2 分別為 $\triangle DXE, \triangle DXF$ 的外接圓，圓 C_1 交 \overline{DF} 於 Y 點，圓 C_2 交 \overline{DE} 於 Z 點，連接 FZ 射線依次交圓 C_1 於 Q, S 兩點，連接 EY 射線依次交圓 C_2 於 P, R 兩點，如圖二。試證： $PQRS$ 四點在同一圓上。



圖二