中學生通訊解題第二十五期題目

參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912501

已知一個六位數的自然數 n，它以 p 為個位數。若把 n 的個位數 p 移到其餘各位數之前，所得新數是 n 的 4 倍。請問滿足此條件之 n 有幾個？是哪幾個？

參考解答：

令此六位數 $n=10x+p$，則 p 為其個位

依題意，$4(10x+p)=100000p+x$

$\rightarrow 39x=99996p$，$x=2564p$

因為 x 為五位數，所以 $p\geqq 4$

討論：若 $p=4$，$x=10256\rightarrow n=102564$

若 $p=5$，$x=12820\rightarrow n=128205$

若 $p=6$，$x=15384\rightarrow n=153846$

若 $p=7$，$x=17948\rightarrow n=179487$

若 $p=8$，$x=20512\rightarrow n=205128$

若 $p=9$，$x=23076\rightarrow n=230769$

滿足題意的六位數 n 共有 6 個。

解題重點：

依題意列出 x 與 p 的關係式，再以所給予條件作討論。

評析：

本題徵答人數共有 161 人，答對者共 148 人，平均得分為 6.91 分。此題答對人數極多，不予一一列出。

問題編號
912502

阿福在某次測驗時，誤將一題分數相減 $\frac{b}{a}-\frac{d}{c}$ 套以「分子相減為分子，分母相減為分母」，結果答案居然也對（假設計算部分並無其他錯誤）。且阿福還記得：

1.分子與分母各為大於 0 的一位阿拉伯數字。

2.兩分數皆為假分數。

3.兩分數之分母不同，但其最大公因數比 1 大。

請問：原題目為何？

參考解答：

由題目可知：

1.$9\geqq\{a,b,c,d\}\geqq 1$

2.皆為假分數，故 $b\geqq a$ 且 $d\geqq c$

3.$(a , c)>1$

因$\dfrac{bc-ad}{ac}=\dfrac{b-d}{a-c}$，則 $ad(2c-a)=bc^2$

$\rightarrow$ $2c>a$，$(a,c)>1$，且 $a\neq c$

(1) $c=1$，$(a,c)>1$，且 $a\neq c\rightarrow$不合

(2) $c=2$，$(a,c)>1$，且 $a\neq c\rightarrow$不合

(3) $c=3$，$(a,c)>1$，且 $a\neq c\rightarrow$不合

(4) $c=4$，$a=2$，則 $12d=16b$

$\rightarrow$ $b=3$，$d=4$ 或 $b=6$，$d=8$

$a=6$，則 $12d=16b$

$\rightarrow$ $b=3$，$d=4$，但 $b\geqq a$ $\rightarrow$不合

$\rightarrow$ $b=6$，$d=8$

(5) $c=5$，與 a 與 c 之最大公因數比 1 大，且 $a\neq c\rightarrow$不合

(6) $c=6$，$a=2$，則 $20d=36b\rightarrow$ $b=5$，$d=9$

$a=3$，則 $27d=36b\rightarrow$ $b=6$，$d=8$

$a=4$，則 $32d=36b\rightarrow$ $b=8$，$d=9$

$a=8$，則 $32d=36b\rightarrow$ $b=8$，$d=9$

$a=9$，則 $27d=36b$，但 $b\geqq a\rightarrow$不合

(7) $c=7$，$(a,c)>1$，且 $a\neq c\rightarrow$不合

(8) $c=8$，$a=2$，則 $14d=64b$，但 $b\geqq a\rightarrow$不合

$a=4$，則 $48d=64b$

$\rightarrow$ $b=3$，$d=4$，但 $b\geqq a$ $\rightarrow$不合

$\rightarrow$ $b=6$，$d=8$

$a=6$，則 $60d=64b\rightarrow$ 不合

(9) $c=9$，$a=3$，則 $45d=81b\rightarrow$ $b=5$，$d=9$

$a=6$，則 $72d=81b\rightarrow$ $b=8$，$d=9$

故原題目爲 $\frac{3}{2}-\frac{4}{4}$ 或 $\frac{6}{2}-\frac{8}{4}$ 或 $\frac{6}{6}-\frac{8}{4}$

或 $\frac{5}{2}-\frac{9}{6}$ 或 $\frac{6}{3}-\frac{8}{6}$ 或 $\frac{8}{4}-\frac{9}{6}$

或 $\frac{8}{8}-\frac{9}{6}$ 或 $\frac{6}{4}-\frac{8}{8}$

或 $\frac{5}{3}-\frac{9}{9}$ 或 $\frac{8}{6}-\frac{9}{9}$

解題重點：

在條件不足的情形下作討論時，適當縮小範圍($2c>a$)，並注意$(a,c)>1$，可簡化過程。部分同學忽略假分數的定義是：分子的絕對值不小於分母的絕對值。

評析：

本題徵答人數共有 22 人，其中全對者共 4 人。平均得分爲 4.55 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北市興雅國中林昭平同學、基隆市銘傳國中楊昀達同學、台北縣福和國中吳霽庭同學、江翠國中陳建宏同學。

問題編號
912503

矩形的自我相似分割：

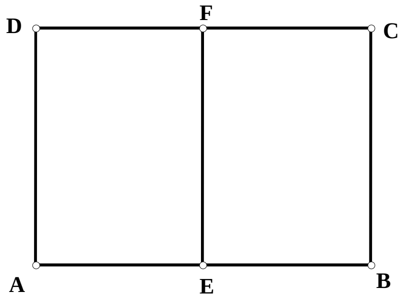
(1)將矩形 ABCD 分割成 2 個小矩形，使得每個小矩形的長與寬的比與原矩形 ABCD 的長寬比相等。設最小的一個矩形的長寬比爲 x (其中 $x\geq1$)，請求出所有可能的 x 值。

(2)將矩形 ABCD 分割成 3 個小矩形，使得每個小矩形的長與寬的比與原矩形 ABCD 的長寬比相等。設最小的一個矩形的長寬比爲 x (其中 $x\geq1$)，請求出所有可能的 x 值。

參考解答：

(a)如圖一，設 $\overline{EB}=1$，$\overline{BC}=x$，則 $\overline{AB}=x^2$，

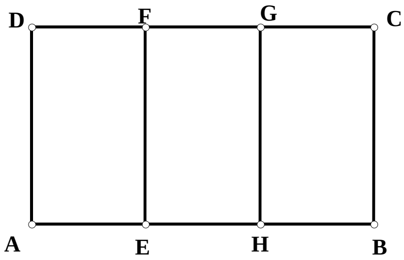
所以 $x^2=2 \Rightarrow x=\sqrt{2}$ 。



圖一

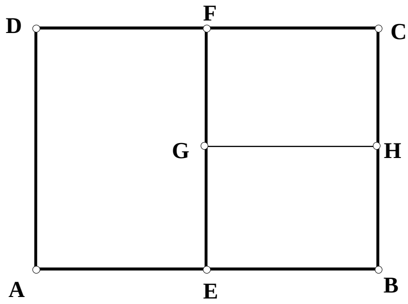
(b)根據三個小矩形的所有不同擺放方法的討論，可得四種擺放的方法。

第一種：仿照(a)的擺法，如圖二–1，此時可以算出 $x=\sqrt{3}$ 。

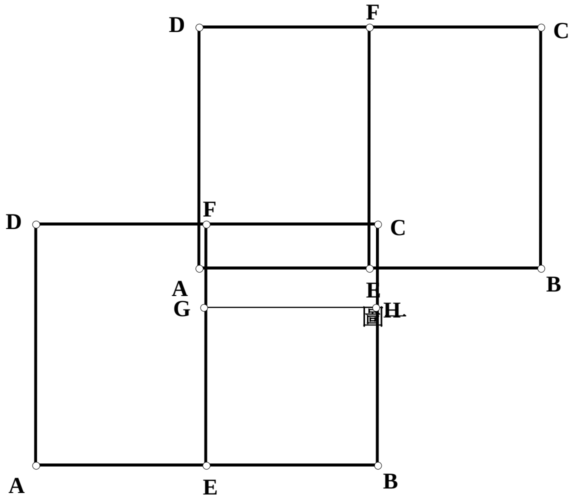


圖二–1

第二種：將圖一中的一個小矩形，按照(a)的方法分成兩個小矩形，如圖二–2，所以此時 $x=\sqrt{2}$ 。



圖二–2



圖二–3

第三種：將圖二–2 的右下角的小矩形豎起來，得到另一個分割方式，如圖二–3。

設 $\overline{CH}=1$，$\overline{CF}=x$，則 $\overline{HB}=x^2$，$\overline{BC}=x^2+1$，$\overline{AE}=\dfrac{x^2+1}{x}$，$\overline{AB}=x(x^2+1)$

再根據 $\overline{AE}+\overline{EB}=\overline{AB} \Rightarrow \dfrac{x^2+1}{x}+x=x(x^2+1)$

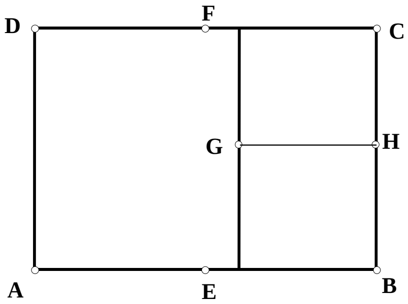
$\Rightarrow x=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ 。

從這個結果，還可以看出圖中E、F、G、H都是所在線段的黃金分割點。

第四種：將圖二–2 右邊的兩個小矩形都豎起來，得到另一個分割方式，如圖二–4。

設 $\overline{BE}=\overline{CF}=1$，$\overline{BH}=x$，$\overline{CH}=x$，因為 $\dfrac{EF}{AE}=\dfrac{BH}{BE}$

$\Rightarrow \dfrac{2x}{2x^2-1}=\dfrac{x}{1} \Rightarrow x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$。



圖二–4

解題重點：

以各種不同方式作切割，觀察小矩形彼此間與原矩形的邊長關係可如何對應，善用比值相等來求出所有可能的切割方式。

評析：

本題徵答人數共有 58 人，其中全對者共 2 人。平均得分為 4.02 分。其中答題完整者有台北市建成國中江衡同學、新竹市光華國中范祐維同學。

問題編號
912504

假設小精靈要於 5×5 階圖形(如圖三)中的左下角開始直線前進吃完圖中所有的 24 個小黑點，且小精靈每吃一個小黑點要花 1 秒，若小精靈行進時轉 90 度需花 1 秒，連續轉兩次 90 度(即轉 180 度)需花 3 秒，試問：

(1)小精靈應採何種行進路線才能最快吃完小黑點？

(2)此時共花了幾秒鐘？

請說明你選擇路線的方法。(註：圖四為其中一種走法，共吃 24 個黑點、轉 90 度 2 次、連續轉兩次 90 度(180 度)3 次，故共計花 24+1×2+3×3=35 秒)

●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
●	●	●	●	●
☺	●	●	●	●

圖三

┌	→	→	→	┐
↑	↑	┌	┐	↓
↑	↑	↓	↑	↓
↑	↑	↓	↑	↓
☺	└	┘	└	┘

圖四

參考解答：

考慮可能較快的數種走法，如下：

┌	┐	┌	┐	↑
↑	↓	↑	↓	↑
↑	↓	↑	↓	↑
↑	↓	↑	↓	↑
☺	└	┘	└	┘

如上圖共需 24+12 秒

┌	→	→	→	→
↑	┌	→	→	↓
↑	└	←	┐	↓
↑	┌	→	┘	↓
☺	└	←	←	↓

如上圖共需 24+12 秒

┌	→	→	→	┐
↑	┌	→	┐	↓
↑	↑	↑	↓	↓
↑	↑	└	┘	↓
☺	└	←	←	┘

如上圖共需 24+9 秒

┌	→	→	→	┐

↑	↑	┌	┐	↓
↑	↑	↓	↑	↓
↑	↑	↓	↑	↓
☺	└	┘	└	┘

如上圖共需 24+11 秒

┌	→	→	→	┐
↑	┌	←	←	┘
↑	└	→	→	┐
↑	┌	←	←	┘
☺	└	→	→	→

如上圖共需 24+13 秒

┌	→	→	→	┐
↑	┌	┐	↑	↓
↑	↑	↓	↑	↓
↑	↑	└	┘	↓
☺	└	←	←	┘

如上圖共需 24+10 秒

想法：因為走兩次轉 90 度相當於一次轉 180 度，而前者只需 1 秒，後者則須 3 秒。可以知道盡量走轉 90 度的方法，減少轉 180 度的走法，如此可以減少秒數。因此，繞著圓圈轉可以避免轉 180 度之情形發生，故

1.在路線不可重複的情形下：最少秒數為 33 秒，如圖五，

2.在路線可以重複的情形下：最少秒數為 32 秒，如圖六與圖七。

1.

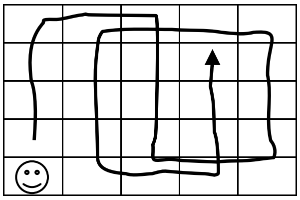
┌	→	→	→	┐
↑	┌	→	┐	↓
↑	↑	↑	↓	↓
↑	↑	└	┘	↓
☺	└	←	←	┘

圖五

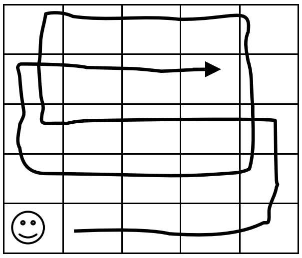
2.

┌	→ ┌	┐ ←	←	┐
↑	↓	↓	↑	↑
↑	↓	↓	↑	↑
↑	↓	↓	↑	↑
☺	└	└ →	→ ┘	┘

圖六



圖六-1



圖七

討論路線不可重複的情形：

設為 n 階圖形，n 為正整數，以 n 分兩種情形討論。

(1)當 n>2 時：

若要使路徑最快，則從外圍向內繞，且靠邊走到底再轉彎。

1.外圍周長較長；

設 f(n)為 n 階最外圍的黑點數，n>0，則 f(n)=4n-4-1=4n-5

(i) 最外圍的黑點數為 n 時，則 f(n)=4n-5

(ii) 將 n 階圖形的最外圍去掉成 n-1 階

圖形時，則

f(n-1)=4(n-1)-4-1=4n-9，f(n)>f(n-1)

2.不必折回吃；

3.轉 90 度吃比轉 180 度吃快。

(2)當 n≦2 時：

1.若要能轉 90 度，則需(1+1+1)(1+1+1)=9 個黑點才能達成。∵9>4，∴不可能轉 90 度。

2.若要能轉兩次 180 度，則需有一邊爲 2×2-1=3 格，∵6>4，∴不可能轉兩次 180 度。

→當 n≦2 時，走法只有一種，爲由外向內以 90 度轉彎靠邊走到底再轉彎，秒數 6 秒。

故此題所花時間：(25-1)+1×6+3×1 = 24+6+3 =33 (秒)。

解題重點：

考慮如何使秒數變少的方法(轉彎的變化)。

評析：

本題徵答人數共有 125 人，其中全對者共 7 人。平均得分爲 3.26 分。其中滿分的同學有台北市東湖國中李光宇同學、景興國中羅羿倫同學、台北縣江翠國中許廷瑋、林易徵、黃逸鵬同學、基隆市銘傳國中楊昀琪、

問題編號
912505

平面上一點 A 對一直線 L 作垂線，此垂線與直線 L 的交點 P，點 P 稱爲點 A 對直線 L 的投影點。考慮一正方形的四個頂點，在一條直線上的投影點個數，如圖四，共有 4,3,2 點等三種情形，

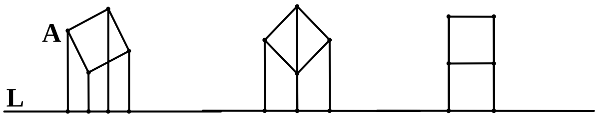


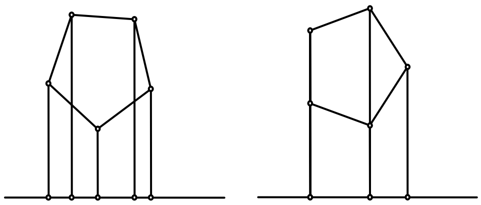
圖 四

(1)請考慮正五邊形、正六邊形的情形，它們的頂點在直線上的投影點個數，可能有那幾種情形。

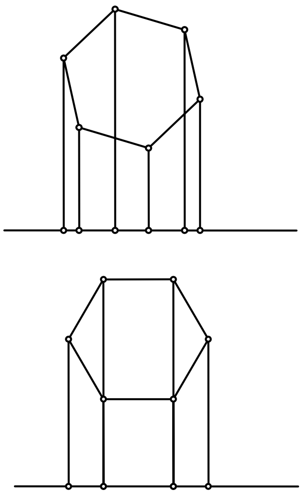
(2)考慮一般的正 n 邊形，它們的頂點在直線上的投影點個數，可能有那幾種情形。

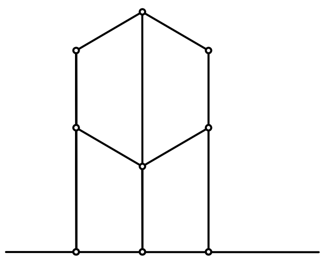
參考解答：

(1)正五邊形的情形如下圖所示：投影點個數有 3 點及 5 點二種：



正六邊形的情形如下圖所示：投影點個數有 3、4、6 點三種：

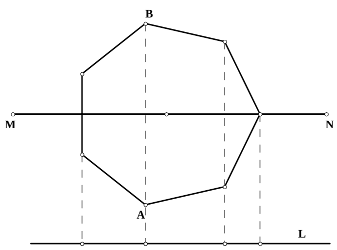




(3)將正 n 邊形分成兩種情形：

(a)當 n 爲奇數時，投影點個數有$\frac{n+1}{2}$、n 個點這兩種情形。

假設一個正 n 邊形在直線 L 上頂點的投影點個數不爲 n，所以必有兩個頂點在 L 的投影點爲同一點，假設此兩點爲 A、B，假設$\overline{AB}$的中垂線爲$\overline{MN}$，則$\overline{MN}$必定是正 n 邊形的一條對稱軸且$\overline{MN}$ // L，如圖所示，於是正 n 邊形的頂點中除了一個頂點在$\overline{MN}$上以外，其他頂點可分成$\frac{n-1}{2}$組，每組的兩個頂點對於直線 MN 對稱，所以它們的連線垂直於直線 MN，因此這 n 個頂點在直線 L 的投影點個數共有$\frac{n-1}{2}+1=\frac{n+1}{2}$個。



(b)當 n 爲偶數時，投影點個數有 $\frac{n}{2}$、$\frac{n}{2}+1$、n 點這三種情形。

假設一個正 n 邊形在直線 L 上頂點的投影點個數不爲 n，因爲 n 爲偶數，所以可分成兩個情形：

①有兩組頂點 A、B 與 C、D 在直線 L 上的投影點爲同一點，

②只有一組頂點 A、B 在直線 L 上的投影點爲同一點。

在①的情形中，除了 n=6 之外，其餘的正 n 邊形在直線 L 上的投影數個數均爲$\frac{n}{2}+1$。

在②的情形中，除了 n=6 之外，其餘的正 n 邊形在直線 L 上的投影數個數均爲$\frac{n}{2}$。

解題重點：

藉由對正五、正六邊形的頂點於直線的投影點個數，來觀察歸納並說明一般正 n 邊形的情形。

評析：

本題徵答人數共有 61 人，其中全對者共 8 人。平均得分爲 5.15 分。其中答題優良或解法富參考價值者有台北市興雅國中林昭平同學、台北縣福和國中林東岳、周宣宇、史

美圻、吳霽庭等同學、基隆市銘傳國中楊昀　　琪同學。