數學解題中「一而再」的經驗

許建銘
高雄市立龍華國民中學

一、前言：

以下這個問題，聽說在上個世紀初風靡了整個日本校園。圖 1-1 中的 A 與 B 分別表示兩個在迴轉鐵道上暫停的車廂，而 T 是一個火車頭，至於矩形狀的 C 是一座固定在軌道正上方的天橋。如果天橋 C 因高度限制，只能讓火車頭由其下方通過，而無法讓較高的車廂穿過。請問如何在圖中現有的軌道上，藉由火車頭的調度，讓 A 與 B 兩個車廂互換位置？但火車頭必須開回原來的停放地點。

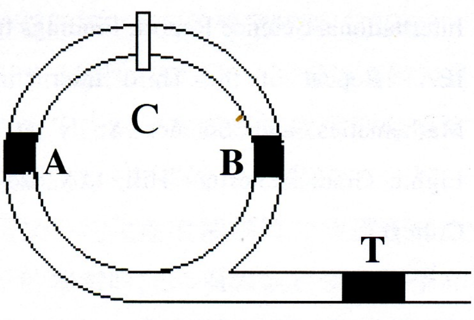

圖 1-1

這的確是個很有趣的問題，如果能夠花個時間製作教具，並找機會(如：科學活動營、趣味數學遊戲)讓學生親手操弄，保證讓他們回味無窮。解法如以下的圖 1-2 與圖 1-3 皆可，而其解題關鍵在於：火車頭一定要同時掛上兩個車廂行進(圖中加畫「星」號的步驟)，再逐一置換車廂的位置。

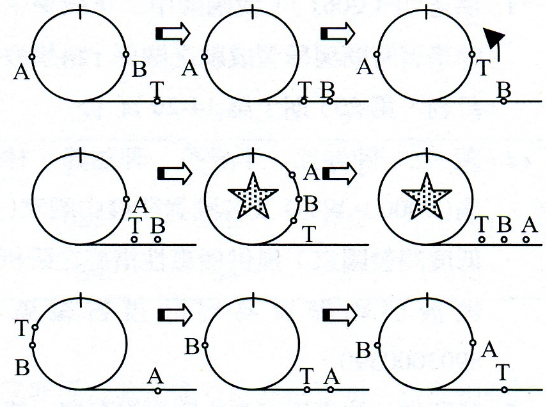

圖 1-2

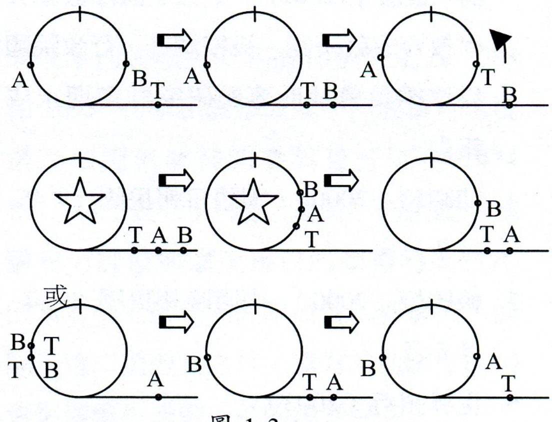

圖 1-3

另一個也可以做個道具讓學生玩玩的問題是：(1)黃家村有 4 匹馬(A、B、C、D)要送到劉家村。假如馬由黃家村走到劉家村和由劉家村走回黃家村所需的時間相等，其中 A 是 1 小時，B 是 2 小時，C 是 4 小時，D 是 5 小時。一次預定送兩匹過去，而騎一匹回來。送馬過去的時間以速度較慢的馬走的時間爲準。有個男人花了 12 個小時完成了這

件工作。請問：他究竟是把 4 匹馬按何種順序送過去的？(2)若把題(1)中的馬改成七匹(A、B、C、D、E、F、G)，而牠們由黃家村走到劉家村所需時間分別爲 1 小時、2 小時、3 小時、4 小時、5 小時、6 小時、7 小時，但每一次都由兩人一起送，且每次每人負責送兩匹。請問：最少需要幾個小時才能完成送馬的工作？

解：(1)①送 A，B 過去(2 小時)；②A 回來(1 小時)；③送 C，D 過去(5 小時)；④B 回來(2 小時)；⑤送 A，B 過去(2 小時)，以上合計 12 小時。

(2)①送 A，B，C，D 過去(4 小時)；②兩人共騎 A 回來(1 小時)；③送 A，E，F，G 過去(7 小時)，以上合計 12 小時。

由這個問題中第(2)小題的解答，很顯然看得出，如果只拘泥於如第(1)小題，一個人騎一匹快馬回來的既定見解，恐怕花的時間就沒那麼少了。

再來一道較常見的思考性問題：有兩根長短粗細不一、燃燒速率不穩定的繩子，而且每根繩子從任一端點燃直到燒完都恰爲一小時。請用這兩根繩子，測出 45 分鐘的時間。

解：將其中一根的兩端與另一根的一端同時點燃，待一根燒完時(過了 30 分鐘)，立即點燃另一根的另一端，直到第二根也全部燒完，則合計費時 30+15=45 分鐘。

以上幾個問題的解法中：一個車頭掛兩個車廂，兩個人騎一匹馬，一根繩子兩頭燒，這些都是吾人生活體驗中，感覺極其自然與合理的事情。而將這樣的經驗應用在數學解題或數學教育的情意教學上，也有其特殊意義與趣味。像同一件東西多了幾個、加上不一樣的組合，可能就有煥然一新的思考空間；一個動作再做一次、多走幾步，也可能開展出意想不到的發現與結果。

二、本文：

問題一：一個鐘錶在 2 點與 3 點間，時針與分針何時重合？

解 1：設 2 時 x 分重合。因爲分針走一分格，時針走 $\frac{1}{12}$ 分格；

即分針走 x 分格，時針走 $\frac{1}{12}x$ 分格。

$$\text{所以 } x = \frac{1}{12}x + 10 \Rightarrow 12x = x + 120$$

$$\Rightarrow 11x = 120 \therefore x = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}\text{，}$$

所以兩針重合的時間爲 2 時 $10\frac{10}{11}$ 分。

解 2：讓我們考慮更多次重合的情形：時鐘面上 0 時（不含）到 12 時止，時針與分針共計重合 11 次。所以某次重合至下一次重合需時 $\frac{12}{11}$ 小時。而 2 點與 3 點間是第 2 次重合，因此時間爲 $2\times\frac{12}{11}$ 時，而 $2\frac{2}{11}$ 時 $=2$ 時 $10\frac{10}{11}$ 分。

若老師專爲此類問題，索性只給學生「公式」：a 時 b 分，時分針夾角 $\left|30a-\frac{11}{2}b\right|$ 度，將 $a=2$ 代入

$\Rightarrow 30\times 2-\frac{11}{2}\times b=0 \Rightarrow b=\frac{120}{11}$，一般而

論，這是值得商榷的教法。

問題二：已知ΔABC中，

$$\overline{AB}=\overline{AC}，求證\angle B=\angle C。$$

證 1：作$\overline{AD}$平分$\angle A$，並交$\overline{BC}$於 D(如圖 2-1)

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$，又

$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

$\therefore \Delta ABC\cong\Delta ACD\ (SAS)$，故

$\angle B=\angle C$。

證 2：比較ΔABC與ΔACB (如圖 2-2)

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AC}=\overline{AB}$，$\angle A=\angle A$

$\therefore \Delta ABC\cong\Delta ACB\ (SAS)$，故

$\angle B=\angle C$。

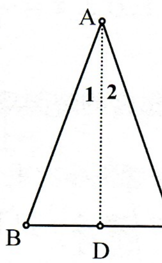

圖 2-1

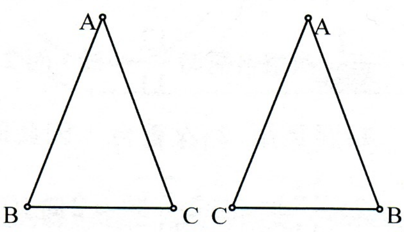

圖 2-2

問題三：如圖 2-3-(1)，有一個底面半徑為 5 的圓柱體，它的一頭被斜切去一部分，於是斜面至底面的最高與最低高度分別為 12 和 14，請求出此立體圖形的體積？

解 1：如圖 2-3-(2)，高度在 12 以上的體積為

$$\frac{1}{2}\times\pi\times5^2\times(14-12)=25\pi$$

所以總體積為

$$\pi\times5^2\times12+25\pi=325\pi$$

解 2：如圖 2-3-(3)，若再取一個同樣的立體圖形，將兩個拼成一個圓柱，就可推得原立體圖形體積為

$$[\pi\times5^2\times(12+14)]\div2=\pi\times25\times13=325\pi$$

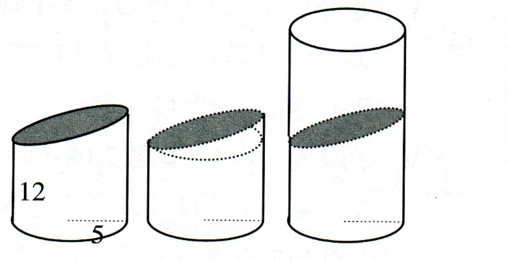

圖 2-3

問題四：因式分解

$$3x^2+5xy-2y^2+3x-8y-6$$

解 1：利用「一而再」的十字交乘法作因式分解：

$$\begin{array}{ccc} (3x & -y) & -3 \\ (x & +2y) & +2 \end{array}$$

$\therefore$原式$=(3x-y-3)(x+2y+2)$

解 2：將原式依 x (或 y)的降冪重新排列，再利用「一而再」的十字交乘法作因式分解：

原式$=3x^2+(5y+3)x-(2y^2+8y+6)$

$$\begin{array}{ccccc} 3x & & -(y & & +3) \\ & \times & & \times & \\ x & & (2y & & +2) \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=(3x-y-3)(x+2y+2)$

問題五：解 $\begin{cases} 201x-99y=102\cdots\cdots(1) \\ 101x-199y=-98\cdots\cdots(2) \end{cases}$

解 1：兩式相減後即「代入消去」：

(1)−(2)

$\Rightarrow 100x+100y=200 \quad \Rightarrow x+y=2$

$\Rightarrow x=2-y\cdots\cdots(3)$

(3)代入(1)

$\Rightarrow 201(2-y)-99y=102$

$\Rightarrow 402-201y-99y=102$

$\Rightarrow 300y=-300 \Rightarrow y=1\cdots\cdots(4)$

(4)代入(3) $\Rightarrow x=2-1 \Rightarrow x=1$

$\therefore x=1, y=1$

解 2：兩式相減得到一個新式，用原來的被減式(另一式也可)再減此新式：

$(1)-(2) \Rightarrow 100x+100y=200$

$\Rightarrow x+y=2\cdots\cdots(3)$

$(1)-(3) \Rightarrow 200x-100y=100$

$\Rightarrow 2x-y=1\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)$

$\Rightarrow 3x=3 \quad \Rightarrow x=1 \quad \Rightarrow y=1$

$\therefore x=1, y=1$

問題六：如圖 2-4 是由矩形與等腰三角形組成的一張白紙，若(1)紙可以摺也可以翻面，請用直尺和美工刀，將它切拼成等腰三角形。(2)紙不可以摺，但可以翻面，請用直尺和美工刀，將它切拼成等腰三角形。

解：(1)如圖 2-5 與圖 2-6 兩種切拼法皆可。圖中的 M、N、P 是邊的中點，可以運用摺紙將它們找出，再用直尺和美工刀沿虛線切下拼合即可。

(2)如圖 2-7 中，塗黑點的區域表示原來紙張的反面，其中有一個步驟是將切拼過的紙張再作一次切割，而其切拼原理是利用「三角形的全等性質」。

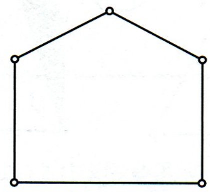

圖 2-4

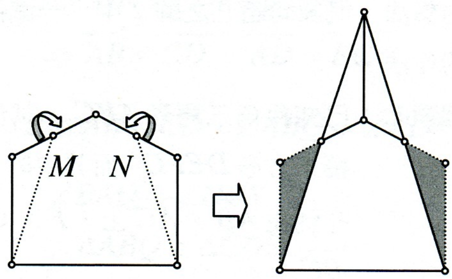

圖 2-5

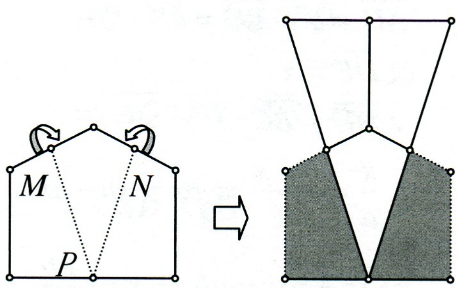

圖 2-6

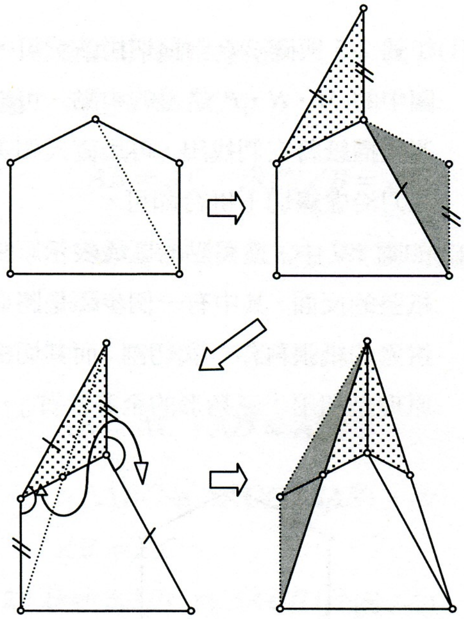

圖 2-7

以上問題六之(2)的解法中「一切再切」的想法，很像問題五之解 2 中「一減再減」的作法。

問題七： 已知銳角三角形 ABC，試作一內接正方形 $DEFG$，而其中的 D、E 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，F、G 皆在 $\overline{BC}$ 上。

解析： 如圖 2-8 中，設 $DEFG$ 爲三角形 ABC 的內接正方形。

若 $\overline{AH}$ 爲 $\overline{BC}$ 上的高，且令 $\overline{AH}=b$，$\overline{BC}=a$。

設 $\overline{DE}=x$

$\because \overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$

$$\therefore \frac{x}{a}=\frac{b-x}{b} \Rightarrow bx=ab-ax$$

$$\Rightarrow (a+b)x=ab \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b}$$

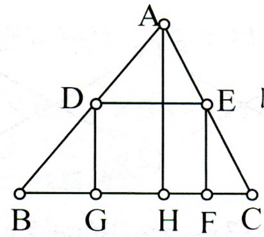

圖 2-8

作法 1： (1)如圖 2-9 中，作 $\overline{AH}\perp\overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 H。

(2)過 B 作 $\overleftrightarrow{BX}\perp\overline{BC}$。

(3) 在 $\overleftrightarrow{BX}$ 上取 Q 點，且使 $\overline{BQ}=\overline{BC}$。

(4)連 $\overline{HQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 D。

(5)作 $\overline{DG}\perp\overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 G。

(6)以 $\overline{DG}$ 爲邊作內接矩形 $DEFG$ 即爲所求。

證明： $\because \overline{BQ} \,/\!/\, \overline{DG} \,/\!/\, \overline{AH}$

$$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{BH}} \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BH}} \cdots\cdots ②$$

$$①+② \Rightarrow \frac{\overline{DG}}{a}+\frac{\overline{DG}}{b}=1$$

$$\Rightarrow (a+b)\overline{DG}=ab \Rightarrow \overline{DG}=\frac{ab}{a+b}$$

故正方形 $DEFG$ 合爲所求。

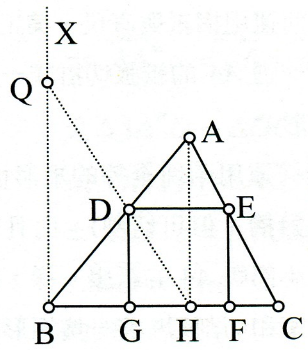

圖 2-9

作法 2：(1)如圖 2-**10** 中，在 $\overline{AB}$上取一點D'，並作 $\overline{D'G'} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 G'。

(2)以 $\overline{D'G'}$ 爲邊作正方形 $D'G'F'E'$，而 F' 在 $\overleftrightarrow{BC}$ 上。

(3)作 $\overleftrightarrow{BE'}$ 交 $\overline{AC}$ 於 E 點。

(4)作 $\overline{EF}$ 爲邊作內接矩形 $DEFG$ 即爲所求。

證明：$\because \overline{D'E'} : \overline{DE} = \overline{BE'} : \overline{BE} = \overline{E'F'} : \overline{EF}$

又 $\overline{D'E'} = \overline{E'F'}$　$\therefore \overline{DE} = \overline{EF}$

故 $DEFG$ 即爲所求之內接正方形。

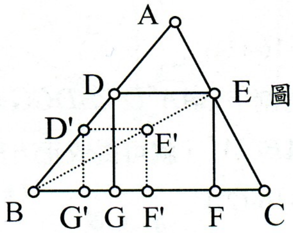

圖 2-10

問題八：如圖 2-11 中，矩形撞球台 $PQRS$ 的 $\overline{PS} = 300$，$\overline{PQ} = 160$，一球自 A 點撞出，三顆星後恰好回到 A 點，求 $ABCD$ 周長？

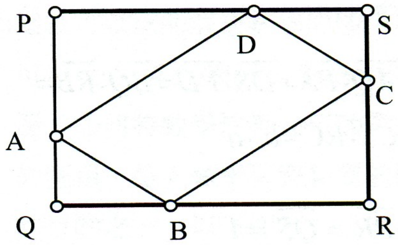

圖 2-11

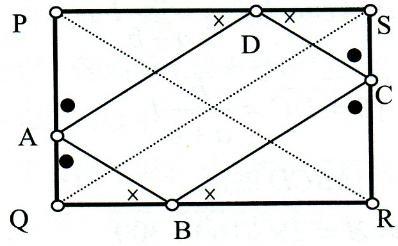

圖 2-12

解 1：(1)由圖 2-12 中×與●的兩種角度

$\Rightarrow \angle ABC = \angle ADC$，

$\angle DAB = \angle BCD$

$\Rightarrow ABCD$ 爲平行四邊形

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$，$\overline{AD} = \overline{BC}$

(2)由 $\overline{AB} = \overline{CD}$，$\angle ABQ = \angle CDS$，

$\angle BAQ = \angle DCS$

$\therefore \Delta ABQ \cong \Delta CDS$

又 $\Delta ABQ \sim \Delta ADP$

$\Rightarrow \overline{BQ} = \overline{DS}$，

$\overline{AQ} : \overline{PA} = \overline{BQ} : \overline{PD}$

$\Rightarrow \overline{AQ} : \overline{PA} = \overline{DS} : \overline{PD}$

$\therefore \overline{AD} \parallel \overline{QS}$

(3)同理可推得 $\overline{BC} \parallel \overline{QS}$，

$\overline{DC} \parallel \overline{PR}$，$\overline{AB} \parallel \overline{PR}$

(4)令

$\overline{AQ}:\overline{PA}=\overline{DS}:\overline{PD}=\overline{BQ}:\overline{RB}=\overline{CS}:\overline{RC}=b:a$

$\overline{PR}=\overline{QS}=l$

$\Rightarrow \overline{AD}=\overline{BC}=\dfrac{a}{a+b}l$，

$\overline{AB}=\overline{DC}=\dfrac{b}{a+b}l$

$\Rightarrow ABCD$ 周長

$=2l=2\times\sqrt{160+300}$

$=2\times 20\times\sqrt{8^2+15^2}$

$=40\times 17=680$

解 2：利用「一而再」的鏡射，由圖 2-13 可推算得 $ABCD$ 周長

$=\overline{AA'''}=\sqrt{\overline{AK}^2+\overline{A'''K}^2}$

$=\sqrt{(2\overline{PS})^2+(2\overline{PQ})^2}$

$=2\sqrt{300^2+160^2}=40\sqrt{15^2+8^2}$

$=40\times 17=680$

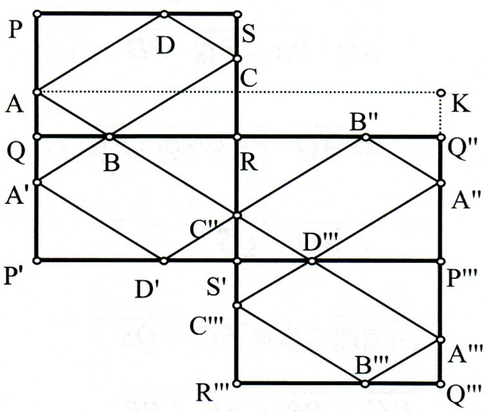

圖 2-13

問題九：(1)如何運用摺紙與直尺、美工刀，將一張 $A4$ 的紙張切拼成一個正方形？

(2)如何運用兩塊全等的矩形板(無法對摺，但可切割)，而且它的大小都與 $A4$ 的紙張一樣，請利用筆和切割刀，將一塊矩形板切拼成正方形？

解：(1)如以下的切拼步驟以及簡要的證明：

①首先將 $A4$ 的紙張定名爲 $ABCD$，且 $\overline{AB}$ 爲短邊，$\overline{AD}$ 爲長邊。(如圖 2-14)

②摺出正方形 $ABA'E$。(如圖 2-14)

③摺紙找出 $\overline{AD}$ 的中點 M。(如圖 2-15)

④過 M 將紙對摺，使 A 落於 $\overline{EA'}$ 上，打開紙張後會出現摺痕線 $\overline{MN}$。(如圖 2-15)

⑤過 A 摺出 $\overline{MN}$ 的垂直線段 $\overline{AF}$，且與 $\overline{EA'}$ 交於 A''。(如圖 2-16-(1))

⑥摺出 $\overleftrightarrow{DA''}$ 且與 $\overline{BC}$ 交於 G。(如圖 2-16-(1))

⑦切割下 $\Delta AA''D$、ΔDCG 與四邊形 $ABGA''$，就可拼成正方形。(如圖 2-16-(2))

⑧說明：令 $\overline{AD}=a$，$\overline{AB}=b$

$\because \overline{AM}=\overline{MA''}=\overline{MD}$ $\therefore \Delta AA''D$ 爲直角三角形

又 $\overline{A''E}\perp\overline{AD}$

$\therefore \overline{AA''}^2=\overline{AE}\times\overline{AD}$

$$\Rightarrow \overline{AA''} = \sqrt{\overline{AE} \times \overline{AD}} = \sqrt{ab}$$

又 $\Delta AA''D \sim \Delta DCG$

$$\Rightarrow \overline{GD} : \overline{AD} = \overline{CD} : \overline{AA''}$$

$$\Rightarrow \overline{GD} : a = b : \sqrt{ab}$$

$\therefore \overline{GD} = \sqrt{ab} \Rightarrow$ 所拼成之四邊形的四邊等長

又 $\angle AA''D = 90^\circ$ 故推得所拼成之四邊形爲正方形。

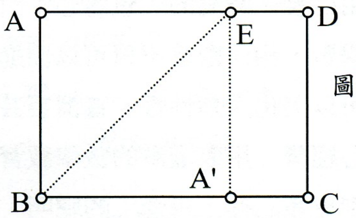

圖 2-14

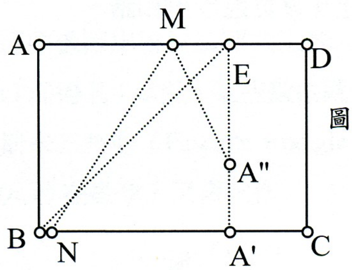

圖 2-15

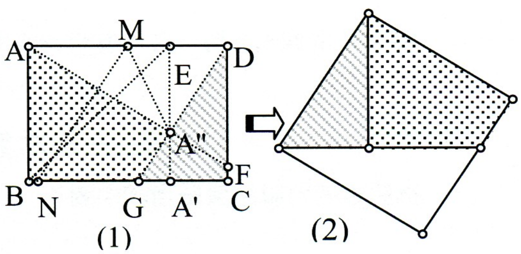

圖 2-16

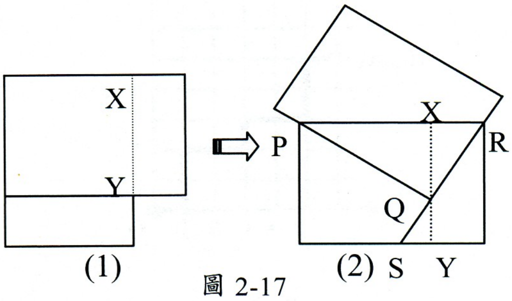

圖 2-17

(2)摺紙可以幫助解決數學問題，但不一定可以完全或有效解決生活中的現實問題。如何將數學性質在生活中作有效率的應用，是人類學習與發展數學很重要的目的之一。以下切割方式所運用的數學原理和(1)的解法相同，當然正方形的拼法也一樣。但其簡潔精確的切割過程，卻如同來自老經驗的工匠一雙充滿自信的巧手：

①將兩塊矩形板中的一塊橫放、一塊直放，且使一個直角處重疊，則兩塊板子重疊的區域恰是正方形，沿上方板子邊緣用筆畫出 $\overline{XY}$ (如圖 2-17-(1))。

②移動並調整上方的矩形板，使上方矩形板的一直角頂點置於 $\overline{XY}$ 正上方，且此直角的兩邊正好位於下方板子之其中兩頂點的正上方(如圖 2-17-(2))。

③用刀沿著上方板子的邊緣切割出 $\overline{PQ}$ (如圖 2-17-(2))。

④移動上方板子，使板子邊緣對齊 $\overleftrightarrow{RQ}$，再用刀切割出 $\overline{RS}$ (如圖 2-17-(2))。

⑤如圖 2-16-(2)的方式，即可拼成正方形。

而且這個問題經過教師的妥善規劃與佈題，想必也會是極佳的合作解題模式，譬如說可以改成如此問法:「如果你和你的朋友各有一塊矩形板(無法對摺，但可切割)，而且每塊的大小都與 $A4$ 的紙張一樣，請你們兩人合作以筆和切割刀，

將兩塊矩形板都切拼成正方形。」

三、結論：

「讀者文摘」曾刊載過一則「一而再」「弄假成真」的笑話：兩個人在酒吧裏，其中一人對另一人說：「我跟你賭一百塊錢，我能咬我左眼。」那人答應跟他賭，他把假眼睛摳出來放進嘴裏就咬。接著他又說：「現在我給你個機會把錢贏回去，我再跟你賭一百塊錢：我能咬我的右眼！」那個人心想，他不可能兩隻眼睛都是假的，毫不猶豫地把鈔票拿了出來。誰知那人掏出假牙就去咬他的右眼。

以上不應只是個笑話，它也說明天底下有各式稀奇古怪的迷障，稍不小心就會讓人困惑上當。除此以外，還有更多「一而再」的因緣巧合、「一而再」的串通圈套，這些令人動心驚嘆或感慨憤怒的真人實事，也幾乎天天在我們人類生存的環境裡「一而再」的上演。

近一二十年來，台灣地區可以算是一個高所得、物資豐裕的工商社會。然而翻開報紙、打開電視，卻有看不盡的醜陋、可怕與犯罪事件的新聞。如果身為數學教育的教學者，能夠體悟「尊重思考」才是「尊重生命」的真諦，少用強硬、怒罵的「威權觀」教數學，多用啓發、關愛的「包容心」引導學生作數學學習，相信數學不只可以促進科學昌明，還可以美化人類性靈、普濟芸芸眾生。畢竟用心經營、用愛灌溉的數學教育，會讓學生學到更多心存「善念」的聰明，現在和未來的社會會更進步與和諧。