# 數學解題中「一而再」的經驗

許建銘
高雄市立龍華國民中學

## 一、前言：

以下這個問題，聽說在上個世紀初風靡了整個日本校園。圖 1-1 中的 A 與 B 分別表示兩個在迴轉鐵道上暫停的車廂，而 T 是一個火車頭，至於矩形狀的 C 是一座固定在軌道正上方的天橋。如果天橋 C 因高度限制，只能讓火車頭由其下方通過，而無法讓較高的車廂穿過。請問如何在圖中現有的軌道上，藉由火車頭的調度，讓 A 與 B 兩個車廂互換位置？但火車頭必須開回原來的停放地點。

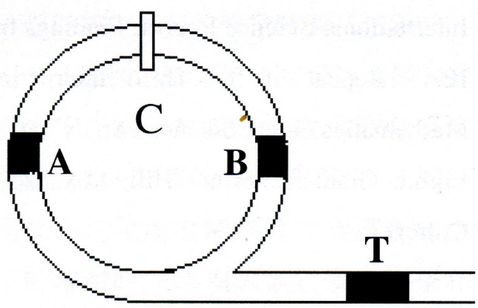


圖 1-1

這的確是個很有趣的問題，如果能夠花個時間製作教具，並找機會(如：科學活動營、趣味數學遊戲)讓學生親手操弄，保證讓他們回味無窮。解法如以下的圖 1-2 與圖 1-3 皆可，而其解題關鍵在於：火車頭一定要同時掛上兩個車廂行進(圖中加畫「星」號的步驟)，再逐一置換車廂的位置。

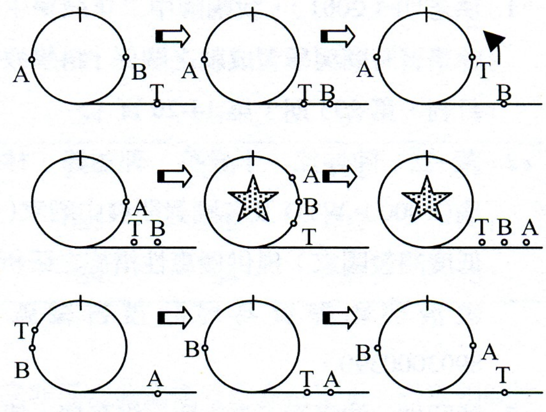

圖 1-2

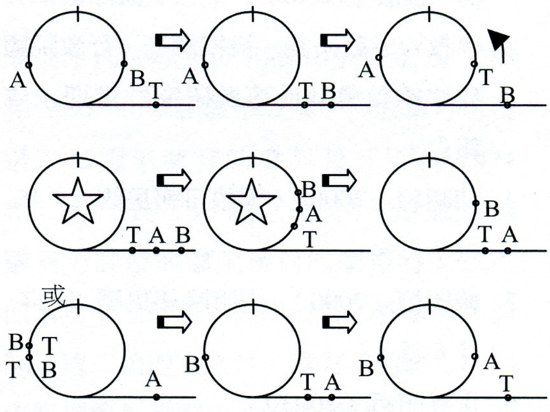


圖 1-3

另一個也可以做個道具讓學生玩玩的問題是：(1)黃家村有 4 匹馬(A、B、C、D)要送到劉家村。假如馬由黃家村走到劉家村和由劉家村走回黃家村所需的時間相等，其中 A 是 1 小時，B 是 2 小時，C 是 4 小時，D 是 5 小時。一次預定送兩匹過去，而騎一匹回來。送馬過去的時間以速度較慢的馬走的時間爲準。有個男人花了 12 個小時完成了這

件工作。請問：他究竟是把 4 匹馬按何種順序送過去的？(2)若把題(1)中的馬改成七匹(A、B、C、D、E、F、G)，而牠們由黃家村走到劉家村所需時間分別爲 1 小時、2 小時、3 小時、4 小時、5 小時、6 小時、7 小時，但每一次都由兩人一起送，且每次每人負責送兩匹。請問：最少需要幾個小時才能完成送馬的工作？

**解：**(1)①送 A，B 過去(2 小時)；②A 回來(1 小時)；③送 C，D 過去(5 小時)；④B 回來(2 小時)；⑤送 A，B 過去(2 小時)，以上合計 12 小時。

(2)①送 A，B，C，D 過去(4 小時)；②兩人共騎 A 回來(1 小時)；③送 A，E，F，G 過去(7 小時)，以上合計 12 小時。

由這個問題中第(2)小題的解答，很顯然看得出，如果只拘泥於如第(1)小題，一個人騎一匹快馬回來的既定見解，恐怕花的時間就沒那麼少了。

再來一道較常見的思考性問題：有兩根長短粗細不一、燃燒速率不穩定的繩子，而且每根繩子從任一端點燃直到燒完都恰爲一小時。請用這兩根繩子，測出 45 分鐘的時間。

**解：**將其中一根的兩端與另一根的一端同時點燃，待一根燒完時(過了 30 分鐘)，立即點燃另一根的另一端，直到第二根也全部燒完，則合計費時 30+15=45 分鐘。

以上幾個問題的解法中：一個車頭掛兩個車廂，兩個人騎一匹馬，一根繩子兩頭燒，這些都是吾人生活體驗中，感覺極其自然與合理的事情。而將這樣的經驗應用在數學解題或數學教育的情意教學上，也有其特殊意義與趣味。像同一件東西多了幾個、加上不一樣的組合，可能就有煥然一新的思考空間；一個動作再做一次、多走幾步，也可能開展出意想不到的發現與結果。

## 二、本文：

**問題一：**一個鐘錶在 2 點與 3 點間，時針與分針何時重合？

**解 1：**設 2 時 $x$ 分重合。因爲分針走一分格，時針走 $\frac{1}{12}$ 分格；

即分針走 $x$ 分格，時針走 $\frac{1}{12}x$ 分格。

$$所以\ x=\frac{1}{12}x+10 \Rightarrow 12x=x+120$$

$$\Rightarrow 11x=120 \therefore x=\frac{120}{11}=10\frac{10}{11}，$$

所以兩針重合的時間爲 2 時 $10\frac{10}{11}$ 分。

**解 2：**讓我們考慮更多次重合的情形：時鐘面上 0 時（不含）到 12 時止，時針與分針共計重合 11 次。所以某次重合至下一次重合需時 $\frac{12}{11}$ 小時。而 2 點與 3 點間是第 2 次重合，因此時間爲 $2\times\frac{12}{11}$ 時，而 $2\frac{2}{11}$ 時 $=2$ 時 $10\frac{10}{11}$ 分。

若老師專爲此類問題，索性只給學生「公式」：$a$ 時 $b$ 分，時分針夾角 $\left|30a-\frac{11}{2}b\right|$ 度，將 $a=2$ 代入

$\Rightarrow 30\times2-\frac{11}{2}\times b=0 \Rightarrow b=\frac{120}{11}$，一般而

論，這是值得商榷的教法。

**問題二**：已知 $\Delta ABC$ 中，

$$\overline{AB}=\overline{AC}\text{，求證}\angle B=\angle C\text{。}$$

**證 1**：作 $\overline{AD}$ 平分 $\angle A$，並交 $\overline{BC}$ 於 $D$(如圖 2-1)

$\Rightarrow \angle 1=\angle 2$，又

$\overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AD}=\overline{AD}$

$\therefore \Delta ABC\cong\Delta ACD\ (SAS)$，故

$\angle B=\angle C$。

**證 2**：比較 $\Delta ABC$ 與 $\Delta ACB$ (如圖 2-2)

$\because \overline{AB}=\overline{AC}$，$\overline{AC}=\overline{AB}$，$\angle A=\angle A$

$\therefore \Delta ABC\cong\Delta ACB\ (SAS)$，故

$\angle B=\angle C$。

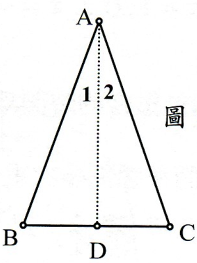


圖 2-1

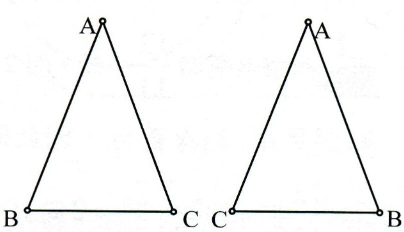


圖 2-2

**問題三**：如圖 2-3-(1)，有一個底面半徑為 5 的圓柱體，它的一頭被斜切去一部分，於是斜面至底面的最高與最低高度分別為 12 和 14，請求出此立體圖形的體積？

**解 1**：如圖 2-3-(2)，高度在 12 以上的體積為

$$\frac{1}{2}\times\pi\times5^2\times(14-12)=25\pi$$

所以總體積為

$$\pi\times5^2\times12+25\pi=325\pi$$

**解 2**：如圖 2-3-(3)，若再取一個同樣的立體圖形，將兩個拼成一個圓柱，就可推得原立體圖形體積為

$$[\pi\times5^2\times(12+14)]\div2=\pi\times25\times13=325\pi$$

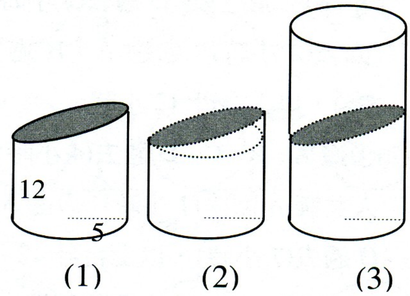


圖 2-3

**問題四**：因式分解

$$3x^2+5xy-2y^2+3x-8y-6$$

**解 1**：利用「一而再」的十字交乘法作因式分解：

$$\begin{array}{ccc} (3x & -y) & -3 \\ (x & +2y) & +2 \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=(3x-y-3)(x+2y+2)$

**解 2**：將原式依 $x$ (或 $y$ )的降冪重新排列，再利用「一而再」的十字交乘法作因式分解：

原式 $=3x^2+(5y+3)x-(2y^2+8y+6)$

$$\begin{array}{ccc} 3x & -(y & +3) \\ x & (2y & +2) \end{array}$$

$\therefore$ 原式 $=(3x-y-3)(x+2y+2)$

**問題五**：解 $\begin{cases} 201x-99y=102\cdots\cdots(1) \\ 101x-199y=-98\cdots\cdots(2) \end{cases}$

**解 1**：兩式相減後即「代入消去」：

(1)−(2)

$\Rightarrow 100x+100y=200 \quad \Rightarrow x+y=2$

$\Rightarrow x=2-y\cdots\cdots(3)$

(3)代入(1)

$\Rightarrow 201(2-y)-99y=102$

$\Rightarrow 402-201y-99y=102$

$\Rightarrow 300y=-300 \Rightarrow y=1\cdots\cdots(4)$

(4)代入(3) $\Rightarrow x=2-1 \Rightarrow x=1$

$\therefore x=1, y=1$

**解 2**：兩式相減得到一個新式，用原來的被減式(另一式也可)再減此新式：

$(1)-(2) \Rightarrow 100x+100y=200$

$\Rightarrow x+y=2\cdots\cdots(3)$

$(1)-(3) \Rightarrow 200x-100y=100$

$\Rightarrow 2x-y=1\cdots\cdots(4)$

$(3)+(4)$

$\Rightarrow 3x=3 \quad \Rightarrow x=1 \quad \Rightarrow y=1$

$\therefore x=1, y=1$

**問題六**：如圖 2-4 是由矩形與等腰三角形組成的一張白紙，若(1)紙可以摺也可以翻面，請用直尺和美工刀，將它切拼成等腰三角形。(2)紙不可以摺，但可以翻面，請用直尺和美工刀，將它切拼成等腰三角形。

**解**：(1)如圖 2-5 與圖 2-6 兩種切拼法皆可。圖中的 $M$、$N$、$P$ 是邊的中點，可以運用摺紙將它們找出，再用直尺和美工刀沿虛線切下拼合即可。

(2)如圖 2-7 中，塗黑點的區域表示原來紙張的反面，其中有一個步驟是將切拼過的紙張再作一次切割，而其切拼原理是利用「三角形的全等性質」。

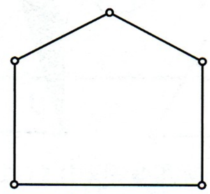

圖 2-4

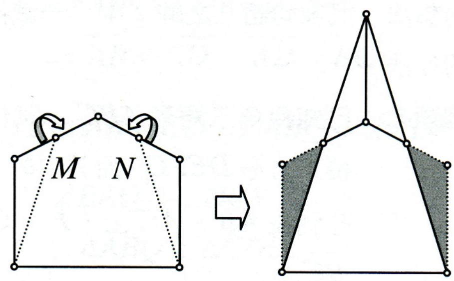


圖 2-5

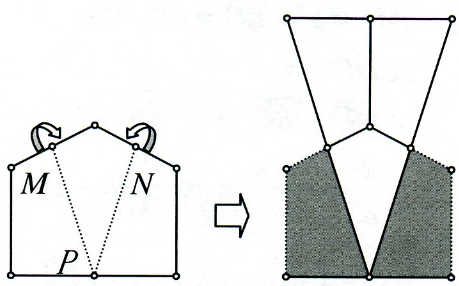


圖 2-6

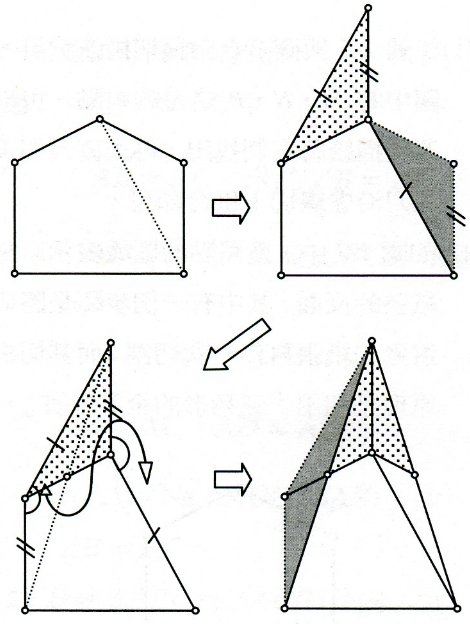

圖 2-7

以上問題六之(2)的解法中「一切再切」的想法，很像問題五之解 2 中「一減再減」的作法。

**問題七：** 已知銳角三角形 $ABC$，試作一內接正方形 $DEFG$，而其中的 $D$、$E$ 分別在 $\overline{AB}$、$\overline{AC}$ 上，$F$、$G$ 皆在 $\overline{BC}$ 上。

**解析：** 如圖 2-8 中，設 $DEFG$ 爲三角形 $ABC$ 的內接正方形。

若 $\overline{AH}$ 爲 $\overline{BC}$ 上的高，且令 $\overline{AH}=b$，$\overline{BC}=a$。

設 $\overline{DE}=x$

$\because \overline{DE} \,/\!/\, \overline{BC}$

$$\therefore \frac{x}{a}=\frac{b-x}{b} \Rightarrow bx=ab-ax$$

$$\Rightarrow (a+b)x=ab \Rightarrow x=\frac{ab}{a+b}$$

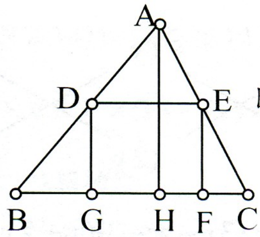


圖 2-8

**作法 1：** (1)如圖 2-9 中，作 $\overline{AH} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 $H$。

(2)過 $B$ 作 $\overleftrightarrow{BX} \perp \overline{BC}$。

(3) 在 $\overleftrightarrow{BX}$ 上取 $Q$ 點，且使 $\overline{BQ}=\overline{BC}$。

(4)連 $\overline{HQ}$ 交 $\overline{AB}$ 於 $D$。

(5)作 $\overline{DG} \perp \overline{BC}$ 且交 $\overline{BC}$ 於 $G$。

(6)以 $\overline{DG}$ 爲邊作內接矩形 $DEFG$ 即爲所求。

**證明：** $\because \overline{BQ} \,/\!/\, \overline{DG} \,/\!/\, \overline{AH}$

$$\therefore \frac{\overline{DG}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{GH}}{\overline{BH}} \cdots\cdots ①$$

$$\frac{\overline{DG}}{\overline{AH}}=\frac{\overline{BG}}{\overline{BH}} \cdots\cdots ②$$

$$①+② \Rightarrow \frac{\overline{DG}}{a}+\frac{\overline{DG}}{b}=1$$

$$\Rightarrow (a+b)\overline{DG}=ab \Rightarrow \overline{DG}=\frac{ab}{a+b}$$

故正方形 $DEFG$ 合爲所求。