幾個恆等式的幾何證明

許介彥

大葉大學　電信工程學系

前言

本刊第 247 期「Catalan Numbers 簡介」一文中，筆者曾經介紹如何由一個求解路徑個數的問題導出 Catalan numbers；本文中，讀者將看到類似的概念可以用來證明許多與二項式係數有關的恆等式。

所謂「二項式係數」(binomial coefficients) 指的是可表為

$$C(n,r)=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

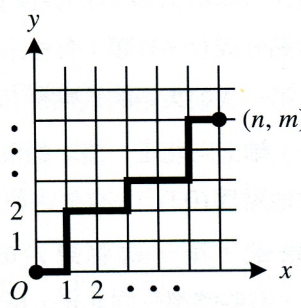
的數，這些數因出現於二項式定理 (binomial theorem) 而得名；當然，這些數也就是讀者熟悉的巴斯卡三角形 (Pascal's triangle) 所含的數。$C(n,r)$ 在數學上又常記作

$$C_r^n \text{ 或 } \binom{n}{r}.$$

本文假設其中的 n 與 r 皆為非負整數。

基本概念

下圖中的直線與橫線代表著道路：



某人想由原點出發，循最短的路徑到達 (n,m)，也就是說，他隨時不是朝東（正 x 軸方向）就是朝北（正 y 軸方向）；請問他總共有幾種走法？上圖中的粗線顯示了一種可能的走法。

很明顯，不管此人怎麼走，他都須向東及向北分別走 n 格及 m 格（總共須走 $(n+m)$ 格）；如果我們將向東一格及向北一格分別用一個 E 及一個 N 來表示，那麼此人的任何一種走法都可以用一個包含了 n 個 E 及 m 個 N 的字串來描述。舉例來說，上圖中的路徑對應到以下字串：

$$ENNEENEENNE$$

另一方面，任何一個由 n 個 E 及 m 個 N 組成的字串其實都對應到一種可能的走法；因此，由 n 個 E 及 m 個 N 可組成多少個字串就對應到此人有多少種走法，而此數顯然是由 $(n+m)$ 個位置中選出 n 個來作為 E 的位置的方法數，也就是 $C(n+m,n)$；一旦選定了 E 的位置，剩下的位置就是 N 的位置。

將每個二項式係數看成是平面上某兩個點之間的最短路徑個數的觀念可以讓我們用「幾何」的方式證明許多與二項式係數有關的恆等式；以下將介紹幾個例子，其中所提及的「路徑」都是指最短路徑而言。

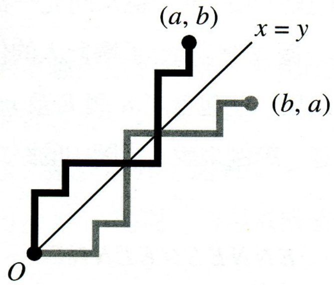
幾個恆等式的證明

恆等式一：

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}.$$

證明：

考慮任意一條由 $(0,0)$ 至 (a,b) 的路徑；此路徑可以用一個含有 a 個 E 及 b 個 N 的字串來描述，如果我們將此字串中所有的 E 以 N 取代，所有的 N 以 E 取代，所得的新路徑將是一條由 $(0,0)$ 至 (b,a) 的路徑，新舊兩條路徑對稱於直線 $x=y$：



讀者不難看出，任意兩條從 $(0,0)$ 至 (a,b) 的相異路徑所對應的兩條從 $(0,0)$ 至 (b,a) 的路徑一定不同，而每一條從 $(0,0)$ 至 (b,a) 的路徑也總有一條從 $(0,0)$ 至 (a,b) 的路徑與之對應；換句話說，新舊路徑之間的對應關係是一對一（one-to-one）且映成（onto）的，因此由 $(0,0)$ 至 (a,b) 的路徑數就等於由 $(0,0)$ 至 (b,a) 的路徑數：

$$\binom{a+b}{a}=\binom{a+b}{b}.$$

如果我們讓 $n=a+b$ 且 $r=a$，上式即爲題目所要證明的式子。

恆等式二：

$$\binom{n}{r}=\binom{n-1}{r}+\binom{n-1}{r-1}.$$

證明：

由 $(0,0)$ 至 (a,b) 的路徑總共有

$$\binom{a+b}{a}$$

條，這些路徑可以依到達 (a,b) 的方式分爲兩類，有些路徑是由 $(a,b-1)$ 往北到達 (a,b)，有些則是由 $(a-1,b)$ 往東到達 (a,b)；由於由 $(0,0)$ 至 $(a,b-1)$ 總共有 $C(a+b-1,a)$ 種走法，由 $(0,0)$ 至 $(a-1,b)$ 總共有 $C(a+b-1,a-1)$ 種走法，因此

$$\binom{a+b}{a}=\binom{a+b-1}{a}+\binom{a+b-1}{a-1}.$$

如果我們讓 $n=a+b$ 且 $r=a$，上式即爲我們要證明的式子。

恆等式三：

$$\binom{n}{0}+\binom{n+1}{1}+\cdots+\binom{n+r}{r}=\binom{n+r+1}{r}.$$

證明：

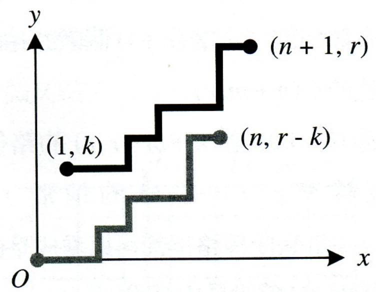
由 $(0,0)$ 至 $(n+1,r)$ 的路徑總共有

$$\binom{n+r+1}{r}$$

條；這些路徑可以依由 $(0,0)$ 出發後「第一次」朝東走的地點分成 $(r+1)$ 類；有些路徑一開始就朝東走（第一次朝東走的地點爲 $(0,0)$ ），有些路徑先在 y 軸上向北走一格才朝東走（第一次朝東走的地點爲 $(0,1)$ ），有些路徑先向北走兩格才朝東走（第一次朝東走的地點爲 $(0,2)$ ），…，有些路徑先向北走 r 格才朝東走

（第一次朝東走的地點爲 $(0,r)$ ）。如果我們能夠知道這 $(r+1)$ 類的每一類各有幾種走法，這 $(r+1)$ 個數的和應該就等於前述的 $C(n+r+1,r)$ 。

考慮由 $(0,0)$ 出發後第一次朝東走的地點爲 $(0,k)$ 的情形，其中 $0 \le k \le r$ 。這種路徑有幾條呢？此種路徑往東走的第一格必定會走到 $(1,k)$ ，所以此種路徑的個數就是由 $(1,k)$ 至 $(n+1,r)$ 的路徑個數，而這又等於從 $(0,0)$ 至 $(n,r-k)$ 的路徑個數，如下圖所示：



因此，由 $(0,0)$ 至 $(n+1,r)$ 且出發後第一次朝東走的地點爲 $(0,k)$ 的路徑有

$$\binom{n+r-k}{n}=\binom{n+r-k}{r-k}$$

條，而當 $k=0,1,\ldots,r$ ，所有 $(r+1)$ 類路徑的總數一定會等於 $C(n+r+1,r)$ ，即

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{n+r-k}{r-k}=\binom{n+r}{r}+\binom{n+r-1}{r-1}+\cdots+\binom{n}{0}$$

$$=\binom{n+r+1}{r}.$$

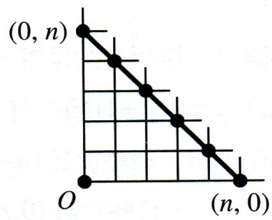
這正是我們要證明的式子。

恆等式四：

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

證明：

由 $(0,0)$ 出發後任意走 n 格，每格皆向東或向北，最後的位置一定會落在直線 $x+y=n$ 上：



由於每一步都有向東及向北兩種可能，因此由原點出發走 n 格總共可走出 2^n 條不同的路徑，這些路徑可以依最後所在位置分爲 $(n+1)$ 類；有些路徑最後的位置在 $(n,0)$ ，有些在 $(n-1,1)$ ，有些在 $(n-2,2)$ ，…，有些在 $(0,n)$ 。如果我們能夠知道這 $(n+1)$ 類的每一類各有幾條路徑，這 $(n+1)$ 個數的和應該就等於前述的 2^n 。

考慮最後位置在 $(n-k,k)$ 的情形，其中 $0 \le k \le n$ ；這種路徑總共有 $C(n,k)$ 條。當 $k=0,1,\ldots,n$ ，所有 $(n+1)$ 類路徑的總數一定會等於 2^n ，即

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n.$$

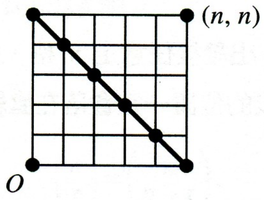
這正是我們要證明的式子。

恆等式五：

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

證明：

由 $(0,0)$ 至 (n,n) 的路徑總共有 $C(2n,n)$ 條，每條此種路徑一定會與直線 $x+y=n$ 交於一點：



依據與圖中直線相交的位置，由 $(0,0)$ 至 (n,n) 的路徑可分為 $(n+1)$ 類；有些路徑與圖中的直線交於 $(n,0)$，有些交於 $(n-1,1)$，有些交於 $(n-2,2)$，⋯，有些交於 $(0,n)$。如果我們能夠知道這 $(n+1)$ 類的每一類各有幾條路徑，這 $(n+1)$ 個數的和應該就等於前述的 $C(2n,n)$。

考慮由 $(0,0)$ 至 (n,n) 的路徑與圖中的直線交於 $(n-k,k)$ 的情形，其中 $0 \le k \le n$；每條此種路徑都可以看成是由前後兩段連接而成；前段是由 $(0,0)$ 至 $(n-k,k)$（有 $C(n,k)$ 種走法），後段則是由 $(n-k,k)$ 至 (n,n)（也有 $C(n,k)$ 種走法），因此前後段合起來總共有

$$\binom{n}{k}\cdot\binom{n}{k}=\binom{n}{k}^2$$

種走法；當 $k=0,1,\ldots,n$，所有 $(n+1)$ 類路徑的總數一定會等於 $C(2n,n)$，即

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}.$$

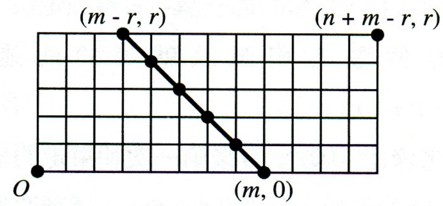
這正是我們要證明的式子。

恆等式六：

$$\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}+\cdots+\binom{n}{r}\binom{m}{0}=\binom{n+m}{r}.$$

證明：

由 $(0,0)$ 至 $(n+m-r,r)$ 的路徑總共有 $C(n+m,r)$ 條，每條此種路徑一定會與通過 $(m,0)$ 及 $(m-r,r)$ 的直線交於一點：



依據與圖中直線相交的位置，由 $(0,0)$ 至 $(n+m-r,r)$ 的路徑可分為 $(r+1)$ 類；有些路徑與圖中的直線交於 $(m,0)$，有些交於 $(m-1,1)$，有些交於 $(m-2,2)$，⋯，有些交於 $(m-r,r)$。如果我們能夠知道這 $(r+1)$ 類的每一類各有幾條路徑，這 $(r+1)$ 個數的和應該就等於前述的 $C(n+m,r)$。

考慮由 $(0,0)$ 至 $(n+m-r,r)$ 的路徑與圖中的直線交於 $(m-k,k)$ 的情形，其中 $0 \le k \le r$；每條此種路徑都可以看成是由前後兩段連接而成；前段是由 $(0,0)$ 至 $(m-k,k)$（有 $C(m,k)$ 種走法），後段則是由 $(m-k,k)$ 至 $(n+m-r,r)$（有 $C(n,r-k)$ 種走法），因此前後段合起來總共有

$$\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

種走法；當 $k=0,1,\ldots,r$，所有 $(r+1)$ 類路徑的總數一定會等於 $C(n+m,r)$，即

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

$$=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0}$$

$$=\binom{n+m}{r}.$$

這正是我們要證明的式子。此恆等式通常稱為 Vandermonde's identity，因法國數學家 Alexandre-Théophile Vandermonde（1735–

1796）而得名。

恆等式七：

$$\binom{n}{m}\binom{r}{0}+\binom{n-1}{m-1}\binom{r+1}{1}+\cdots+\binom{n-m}{0}\binom{r+m}{m}$$

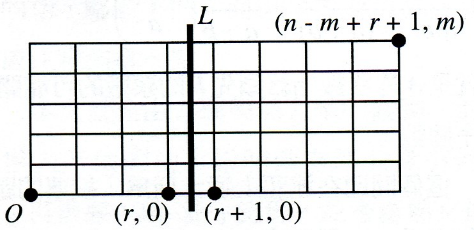
$$=\binom{n+r+1}{m}.$$

證明：

由 $(0,0)$ 至 $(n-m+r+1,m)$ 的路徑總共有

$$\binom{n+r+1}{m}$$

條，每條此種路徑一定會與下圖中的直線 L 有正好一個交點：



依據與圖中的直線 L 相交的位置，由 $(0,0)$ 至 $(n-m+r+1,m)$ 的路徑可分爲 $(m+1)$ 類；有些路徑在 $(r,0)$ 與 $(r+1,0)$ 之間與 L 相交，有些在 $(r,1)$ 與 $(r+1,1)$ 之間與 L 相交，有些在 $(r,2)$ 與 $(r+1,2)$ 之間與 L 相交，…，有些在 (r,m) 與 $(r+1,m)$ 之間與 L 相交。如果我們能夠知道這 $(m+1)$ 類的每一類各有幾條路徑，這 $(m+1)$ 個數的和應該就等於前述的 $C(n+r+1,m)$。

考慮由 $(0,0)$ 至 $(n-m+r+1,m)$ 的路徑與直線 L 交於 (r,k) 與 $(r+1,k)$ 之間的情形，其中 $0\le k\le m$；每條此種路徑可以看成是由前後兩段連接而成；前段是由 $(0,0)$ 至 (r,k) 然後再往東一格至 $(r+1,k)$（有 $C(r+k,k)$ 種走法），後段則是由 $(r+1,k)$ 至 $(n-m+r+1,m)$（有 $C(n-k,m-k)$ 種走法），因此前後段合起來總共有

$$\binom{r+k}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

種走法；當 $k=0,1,\ldots,m$，所有 $(m+1)$ 類路徑的總數一定會等於 $C(n+r+1,m)$，即

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{r+k}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$=\binom{r}{0}\binom{n}{m}+\binom{r+1}{1}\binom{n-1}{m-1}+\cdots+\binom{r+m}{m}\binom{n-m}{0}$$

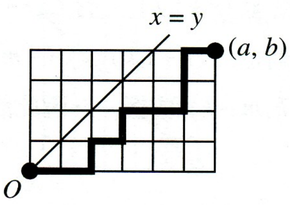
$$=\binom{n+r+1}{m}.$$

這正是我們要證明的式子。

一個相關的問題

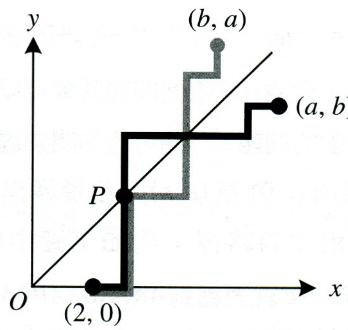
在一場選舉中，只有 A 與 B 兩位候選人，開票的結果是 A 與 B 分別獲得了 a 票與 b 票，且 $a>b$。請問：從開出第一張票起到將票全部開出的過程中，A 的得票數始終領先 B 的得票數的可能開票過程有多少種？舉例來說，如果 $a=4$ 且 $b=2$，那麼可能的開票過程有 *AAAABB*, *AAABAB*, *AAABBA*, *AABAAB*, *AABABA* 等五種。

讀者不難看出，這個問題其實可以轉換成求路徑個數的問題，一個可能的開票過程就對應到一條由 $(0,0)$ 至 (a,b) 且行進過程與直線 $x=y$ 不相交的路徑；例如下圖中的路徑 *EENENEENNE* 就對應到 *AABABAABBA* 的開票順序：



由於 A 須一路領先，任何一條符合要求的路徑由原點出發後一定先向東走兩格，因此這個問題又相當於求由 $(2,0)$ 至 (a,b) 且行進過程與直線 $x=y$ 不相交的路徑個數。如果先不管不能與直線 $x=y$ 相交的限制，那麼由 $(2,0)$ 至 (a,b) 的路徑總共有 $C(a+b-2,a-2)$ 條；此數減去行進過程會與直線 $x=y$ 相交的路徑數即爲與直線 $x=y$ 不相交的路徑數；以下我們將設法求出由 $(2,0)$ 至 (a,b) 且行進過程會與直線 $x=y$ 相交的路徑有多少條。

仿照「Catalan Numbers 簡介」一文中所使用的方法，對任意一條會與直線 $x=y$ 相交的路徑，我們可以找到它由 $(2,0)$ 出發後第一次與直線 $x=y$ 相交的位置（假設此點爲 P），此路徑被 P 分爲前後兩段；如果我們將 P 之後所有的 E 以 N 取代，所有的 N 以 E 取代，所得的結果與前段合起來一定是一條由 $(2,0)$ 至 (b,a) 的路徑：



這種轉換關係不難推知是一對一且映成的，因此由 $(2,0)$ 至 (a,b) 且行進過程會與直線 $x=y$ 相交的路徑數就等於由 $(2,0)$ 至 (b,a) 的路徑數，也就是 $C(a+b-2,a)$ 。

因此，由 $(2,0)$ 至 (a,b) 且行進過程與直線 $x=y$ 不相交的路徑個數爲

$$\binom{a+b-2}{a-2}-\binom{a+b-2}{a}$$

$$=\frac{(a+b-2)!}{(a-2)!b!}-\frac{(a+b-2)!}{a!(b-2)!}$$

$$=\frac{(a+b-2)!}{a!b!}(a(a-1)-b(b-1))$$

$$=\frac{(a+b-2)!}{a!b!}(a-b)(a+b-1)$$

$$=\frac{(a+b)!}{a!b!}\cdot\frac{(a-b)}{(a+b)}=\frac{a-b}{a+b}\binom{a+b}{a}.$$

這就是 A 的票數始終領先 B 的票數的可能開票順序個數。

這個問題在述語上通常稱爲「投票問題」（the ballot problem）。

練習題

以下是幾個與本文相關的問題，提供讀者參考。

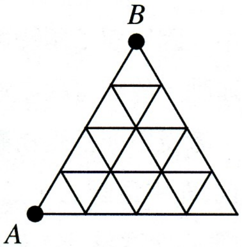
1. 以本文的幾何方式證明以下恆等式：

$$\binom{n-1}{r-1}+\binom{n-2}{r-1}+\binom{n-3}{r-1}+\cdots+\binom{r-1}{r-1}=\binom{n}{r}.$$

2. 每條由 $(0,0)$ 至 $(n-r,r)$ 的路徑一定會與直線 $x=n-r-1$ 交於一點；據此發展出一個恆等式。
3. 某人想由下圖中的 A 點走到 B 點，行進過程隨時不是往右（→）就是往右上（↗）或左上（↖），請問他總共有幾種走法？

（下轉第 32 頁）

（上承第 26 頁）



4.某個袋子裡有 a 顆白球與 b 顆黑球，a 與 b 皆爲正整數且 $a<b$。如果從此袋中將球一顆一顆隨機取出，並在取球過程中隨時記錄已經取出的白球數與黑球數，那麼從取出第一顆球後到將球全部取出的過程中，已取出的白球數與黑球數曾經在某個時候相等的機率是多少？

結語

證明與二項式係數有關的恆等式較典型的作法是由代數著手，例如將特定的值代入二項式定理或是直接將各 $C(n,r)$ 表爲分式然後再通分化簡等；另一個常見的作法是由組合的觀點設法營造出適當的情境，例如將 $C(n,r)$ 解釋成由 n 顆球中取出 r 顆球的方法數等，數學歸納法及生成函數亦是可能的證明方式；本文則是由幾何的觀點賦予一些恆等式幾何上的意義。

「一題多解」原爲數學解題樂趣的泉源，所謂「條條道路通羅馬」；本文探討的是與路徑有關的問題，這句格言在此顯得格外貼切。

參考資料

1.許介彥（2002），Catalan Numbers 簡介，科學教育月刊，第 247 期。

2.J. A. Anderson, *Discrete Mathematics with Combinatorics*, Prentice Hall, p.468-472, 2001.

3.S. Washburn, T. Marlowe and C. T. Ryan, *Discret eMathematics*, Addison-Wesley, p.106-108, 1999.