摩擦力做的功與熱力學第一定律

蔡尚芳
國立臺灣大學 物理系

摘要：

「摩擦生熱」是眾所週知的一句話，經由實驗，很容易驗證這項敘述的正確性，但要如何由古典力學的「功–能」定理，證明因爲摩擦而減少的力學能，確實轉換成等量的熱能(或內能)，卻幾乎沒有一本國中、高中或大學的物理教科書，明白加以解說，個中原因主要是熱力學裡的功，其實與力學裡慣用的功，略有不同，而這些書通常並沒有了解或注意到這一點。

本文首先由力學與熱力學的觀點，討論摩擦力所做的功，說明兩者間究竟有何差異，再根據「功–能」定理，並考慮熱交換，由能量守恆的觀點導出熱力學第一定律，並以一簡單的例子，即兩物體間的相對滑動運動，說明因摩擦而減少的力學能，的確轉換成等量的熱能。

摩擦力做的功與熱力學第一定律

「功」是一個非常基本的物理學概念，不管是用在力學或熱力學中，它的定義其實都是相同的，更明白的說，「功(W)」指的是「力(F)」乘以「力的作用點沿力方向的位移(s)」，即 $W = Fs$。依據這個定義，當一個質點順著運動路徑滑動很小的一段距離 s 時，摩擦力 f 對此質點所做的功 W 應爲

$$W = -fs \tag{1}$$

對一個不能被簡化爲質點的物體而言，在力學中討論與此物體移動有關的運動問題時，上式所給的結果一般都可視爲是正確的，但在熱力學中，如果討論的是包括內能(有時亦稱爲熱能)在內的各種能量之間的轉換，或者討論的是有關能量守恆的問題，則(1)式所給的結果就不一定是正確的。以下分節討論爲什麼會有這樣的差異，並說明如何由「功–能」定理推導出熱力學第一定律。

爲簡化問題，本文中所考慮的物體運動，只限物體質心沿一水平直線路徑移動的情形，物體相對於質心並無轉動運動。

(一)物體可視為剛體時，物體的動能與摩擦力對物體所做的功

在力學中討論物體的運動時，通常都將物體視爲剛體，亦即物體內任何兩點之間的距離永遠固定不變。在這樣的模型下，當物體以移動方式運動時，此物體內各質點的位移與速度，分別都與物體質心 CM 的位移 s 與速度 V 相同(如圖 1)。

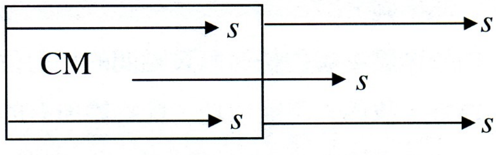


圖 1

使用剛體模型時，組成物體的各質點，其運動方向均相同，因此物體內部沒有任何熱運動，無法反映溫度的變化。由於各質點相對於質心的速度都為零，沒有來自內部熱運動的動能，因此物體的動能 K 全部都來自於其整體的移動運動，而與質心運動的動能 K_{CM} 相同，即

$$K = K_{CM} = \frac{1}{2} mV^2 \qquad (2)$$

上式中 m 為物體的質量。

考慮一個初速不為零的剛體物體，在有摩擦力的水平面上，沿著直線路徑運動。當物體由 a 移動到 b 時，其質心速度會逐漸改變而由 V_a 變成 V_b，因此其動能的變化根據(2)式為

$$\Delta K = \Delta K_{CM} = \frac{1}{2} mV_b^2 - \frac{1}{2} mV_a^2 \qquad (3)$$

當此物體移動時，物體上受到摩擦力作用的各點 i，其位移 s_i 均等於質心位移 s，故摩擦力對物體所做的功 W，等於各接觸點上的摩擦力 f_i 的合力 f，乘以質心沿 f 方向的位移($-s$)，即

$$W = -\sum f_i s_i = -(\sum f_i)s = -fs \qquad (4)$$

上式與(1)式的結果相同，顯示將物體視為剛體時，摩擦力對物體與對質點所做的功，其公式並無不同。

由於剛體物體內任何兩質點間的相對位移均為零，故內力不能做功，此物體所有的功均來自於摩擦力，因此依據「功–能」定理，物體動能的變化須等於摩擦力對物體所做的功，即

$$\Delta K = \Delta K_{CM} = -fs \qquad (5)$$

上式右邊之值為負，故物體的動能會減少，即受到摩擦力作用時，力學能會一直減少，而不能守恆。

(二)「功–能」定理(物體內部的運動不可忽略，但與外界溫度相同)

在熱力學中，因為需要考慮物體內部的分子運動，不能將物體視為剛體，因此前(一)節中所得有關物體移動運動的力學公式與結果，並不一定適用。

假設物體是由質量為 m_i 的許多質點組成，則物體的質量為 $m = \sum m_i$。若此物體的質心速度為 $\boldsymbol{V}$，則依定義可得

$$m\boldsymbol{V} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i \qquad (6)$$

設第 i 個組成質點的速度為 $\boldsymbol{v}_i$，則此質點相對於質心的速度 $\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{V}$ 可用來描述此物體內部的運動狀態。若將上式右邊的質點速度 $\boldsymbol{v}_i$，改用相對速度 $\boldsymbol{u}_i$ 與質心速度 $\boldsymbol{V}$ 表示，則可得

$$m\boldsymbol{V} = \sum m_i \boldsymbol{v}_i = \sum m_i(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{u}_i) = m\boldsymbol{V} + \sum m_i \boldsymbol{u}_i$$

比較上式最左與最右兩邊的結果，可看出 $\sum m_i \boldsymbol{u}_i = 0$。同樣地，物體的動能也可改用相對速度與質心速度表示為

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}\sum m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{u}_i)\cdot(\boldsymbol{V} + \boldsymbol{u}_i) \\ &= \frac{1}{2}\sum m_i(V^2 + u_i^2 + 2\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{u}_i) \\ &= \frac{1}{2}(\sum m_i)V^2 + \frac{1}{2}\sum m_i u_i^2 + \\ &\quad \boldsymbol{V}\cdot(\sum m_i \boldsymbol{u}_i) \end{aligned}$$

但上式最後一項爲零，故得物體的動能爲

$$K=\frac{1}{2}mV^2+\frac{1}{2}\sum m_i u_i^2=K_{CM}+K_{\text{int}} \quad (7)$$

上式中的 K_{CM} 與(2)式中所得的結果相同，稱爲此物體「質心運動的動能」，而 K_{int} 則稱爲此物體「內部運動(或相對運動)的動能」。顯然地，由於內部的分子運動，在熱力學中，物體的動能不再是(2)式。

假設外力對物體所做的功爲 W_{ext}，而在物體內部運動狀態改變時，內力所做的功爲 W_{int}，則依據古典力學中的「功–能」定理，$(W_{ext}+W_{\text{int}})$必等於物體的動能變化 ΔK，故由(7)式可得

$$W_{ext}+W_{\text{int}}=\Delta K=\Delta K_{CM}+\Delta K_{\text{int}} \quad (8)$$

在一般問題中，物體的內力爲保守力，故必存在一個與組成質點相對位置有關的位能函數 U_{int}，而可改用此位能的損失來表示內力所做的功，即 $W_{\text{int}}=-\Delta U_{\text{int}}$，故(8)式在移項整理後，亦可表示爲

$$W_{ext}=\Delta K_{CM}+\Delta K_{\text{int}}+\Delta U_{\text{int}} \quad (9)$$

若以 E_{int} 代表 K_{int} 與 U_{int} 之和，即 $E_{\text{int}}=K_{\text{int}}+U_{\text{int}}$，則 E_{int} 即爲物體的「內能」，而上式可更進一步簡化爲

$$W_{ext}=\Delta K_{CM}+\Delta E_{\text{int}} \quad (10)$$

(三)「熱力學第一定律」(物體內部的運動不可忽略，且與外界溫度不同)

(10)式所顯示的關係，是在物體與外界兩者的溫度相同的假設下得到的，因此兩者之間只能以「功」的形式，來進行能量(包括動能與位能)的交換。當物體與外界的溫度不同時，兩者之間尚可透過「熱」的形式交換能量，因此在熱力學中，上式左邊必須包括由外界進入物體的淨熱量 Q，即

$$Q+W_{ext}=\Delta K_{CM}+\Delta E_{\text{int}} \quad (11)$$

上式所表示的關係，即爲「熱力學第一定律」。

(四)物體內部的運動不可忽略時，摩擦力對物體所做的功

在(四)與(五)兩節中，都假設物體是在水平面上沿直線路徑滑行，並以物體質心速度 V 的方向爲正方向。

若將物體與水平面兩者間的接觸面放大來看，則如圖 2 所示，接觸面將呈凹凸不平，而只在一些點上接觸。設兩者間第 i 個接觸點的位移爲 s_i，而水平面與物體在此點受到的摩擦力分別爲作用力 f_i 與反作用力 $-f_i$，則由於摩擦力的作用，水平面對物體做的功爲 $W=\sum(-f_i)s_i$，而物體對水平面做的功則爲 $W'=\sum f_i s_i$，因此 $W+W'=0$，即摩擦力在兩者相對滑行時所做的功爲零。注意：此處因物體與水平面不可視爲剛體，故不同的兩個接觸點，其位移 s_i 與 s_j 並不一定相同。

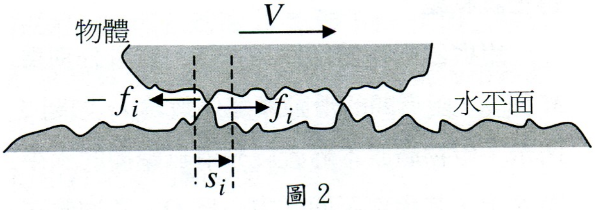


圖 2

(五)物體內部的運動可忽略時，摩擦力對物體所做的功

在力學中討論摩擦力所做的功時，一般

都將物體與水平面視爲剛體，忽略內部運動，故物體與水平面接觸的各點，其位移 s_i 都等於物體質心運動的位移 s，即摩擦力對物體所做的功爲

$$W = \sum(-f_i)s_i = (-\sum f_i)s = -fs \quad (12)$$

同樣地，水平面各點的位移 s_i' 也都等於其質心運動的位移 s'，故摩擦力對水平面所做的功爲

$$W' = \sum f_i s_i' = (\sum f_i)s' = fs' \quad (13)$$

當物體相對於水平面的滑行速度爲正時，$-f<0$，物體的位移 $s>s'$，故摩擦力在兩者相對滑行時所做的功 $W+W' = -f(s-s')<0$，即恆爲負值，此結果與第(四)節的結論 $W+W'=0$，明顯不同，但一般的物理教科書，似乎都未特別強調此一差異。

(六)在摩擦力作用下，減少的質心動能，等於增加的內能

以下以一個簡單的例子，說明由於摩擦力的作用，兩物體的質心動能總和會減少，但內能的總和則會增加，且減少的質心動能必等於增加的內能。此例子取材自今年二月舉行的國際物理奧林匹亞競賽國家代表隊複選考試試題。

甲與乙兩物體均爲長方體，質量分別爲 M 與 m，兩者間的滑動摩擦係數爲 μ。如圖3所示，甲物體原本靜置於光滑無摩擦的水平面 S 上，其頂部平面的中心爲 O。乙物體在甲物體頂部平面上，於時刻 $t=0$ 時，以初速 v 開始向右滑行，於 $t=\tau$ 時，到達 O 點後停在該點。由動量守恆定律，當乙逐漸減速時，甲會逐漸加速。

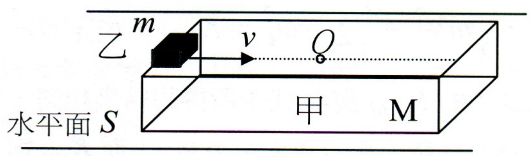


圖 3

爲了考慮內能的變化，必須以第(四)節的方式，處理摩擦力對甲與乙兩物體所做的功。設摩擦力爲接觸力，則如圖2所示，甲與乙兩物體在第 i 個接觸點的位移相同而均爲 s_i，而甲與乙在此接觸點受到的摩擦力，則互爲作用力 f_i 與反作用力 $(-f_i)$。故甲經由摩擦力對乙所做的功爲 $W=-\sum f_i s_i$，而乙經由摩擦力對甲所做的功爲 $W'=\sum f_i s_i$，故得 $W+W'=0$，即摩擦力對兩物體所做的功爲零，此與第(四)節所得之結果相同。

因兩物體與外界無功或熱之交換，摩擦力對乙所做之功 W 即爲外力所做之總功，故若由甲進入乙的熱量爲 Q，則依熱力學第一定律，即(11)式，乙物體質心動能之變化量 ΔK_{CM} 與內能之變化量 ΔU，必須滿足下式：

$$W + Q = \Delta K_{CM} + \Delta U \quad (14)$$

同理，若由乙進入甲的熱量爲 Q'，則甲物體質心動能之變化量 $\Delta K'_{CM}$ 與內能之變化量 $\Delta U'$，必須等於功 W' 與熱 Q' 之和，即

$$W' + Q' = \Delta K'_{CM} + \Delta U' \quad (15)$$

但因兩物體與外界無功或熱之交換，即 $W+Q+W'+Q'=0$，故將(14)與(15)兩式相加後，可得兩物體因摩擦而增加之內能共爲

$$\Delta U + \Delta U' = -(\Delta K_{CM} + \Delta K'_{CM}) \quad (16)$$

上式顯示**兩物體因摩擦而增加之內能，確實等於兩物體減少之質心動能**。

本例子中損失的質心動能可求出如下。假設位移與摩擦力均取向右爲正方向。當乙物體到達中心 O 停下時，兩物體合爲一體，其質心速度相同而均爲 V，故由總動量守恆可得 $mv = (m+M)V$，即

$$V = \frac{m}{m+M} v \quad (17)$$

在水平方向上，乙物體受到的動摩擦力爲 $-\mu mg$（g 爲重力加速度），滑行的加速度恆爲 $a = -\mu g$，故由等加速度運動的公式，可求得乙到達 O 點之時刻 τ 爲

$$\tau = \frac{V-v}{-a} = \frac{Mv}{\mu g(m+M)} \quad (18)$$

在 $t=0$ 到 τ 期間，乙物體質心滑行之距離爲

$$\begin{aligned} d &= \frac{1}{2}(v+V)\tau \\ &= \frac{v}{2}\cdot\frac{2m+M}{m+M}\cdot\frac{Mv}{\mu g(m+M)} \quad (19) \\ &= \frac{M(2m+M)v^2}{2\mu g(m+M)^2} \end{aligned}$$

而甲物體質心滑行之距離則爲

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2}(0+V)\tau \\ &= \frac{v}{2}\cdot\frac{m}{m+M}\cdot\frac{Mv}{\mu g(m+M)} \quad (20) \\ &= \frac{mMv^2}{2\mu g(m+M)^2} \end{aligned}$$

在 $t=0$ 到 τ 期間，乙物體質心動能之變化量 ΔK_{CM} 等於動摩擦力 $-\mu mg$ 與其質心位移 d 之乘積，即 $\Delta K_{CM} = -\mu mgd$，而甲物體質心動能之變化量 $\Delta K'_{CM}$ 則等於動摩擦力 μmg 與其質心位移 D 之乘積，即 $\Delta K'_{CM} = \mu mgD$，故利用(19)與(20)式的結果，可由(16)式得

$$\begin{aligned} &\Delta U + \Delta U' \\ &= \mu mg(d-D) \\ &= \frac{mM(2m+M)v^2 - m^2Mv^2}{2(m+M)^2} \quad (21) \\ &= \frac{mM}{2(m+M)}v^2 \end{aligned}$$

在本例中，因甲與乙兩物體最後合爲一體，無相對運動，故亦可視之爲完全非彈性的碰撞問題。考慮甲與乙兩物體所組成的系統，在碰撞前(即甲爲靜止，乙以速度 v 出發)，系統的質心速度爲 V，如(17)式，而甲與乙相對於系統質心的速度則分別爲$(0-V)$與$(v-V)$。故利用(17)式，可得在碰撞前，系統內相對運動的動能爲

$$\begin{aligned} K_{\text{int}} &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m(v-V)^2 \\ &= \frac{1}{2}M\left(\frac{mv}{m+M}\right)^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{Mv}{m+M}\right)^2 \quad (22) \\ &= \frac{mM}{2(m+M)}v^2 \end{aligned}$$

在碰撞後(即乙到達 O 點停下)，甲與乙相對於系統質心的速度均爲零，故系統內相對運動的動能爲零，亦即(22)式所示之系統內最初相對運動的動能完全損失。

由(21)與(22)兩式可看出

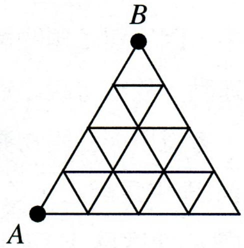
$$\Delta U + \Delta U' = K_{\text{int}} \quad (23)$$

即甲與乙兩物體所組成的系統，在發生完全非彈性碰撞後，系統內相對運動的動能 K_{int}

完全損失，而全部轉換成為系統增加之內能($\varDelta U+\varDelta U'$)。

由以上的討論可知，若將物體視為剛體，則物體的內能將不可能有變化，也就無法由功–能定理，說明損失的力學能會轉換成為等量的內能。遇到例如上例或一般熱力學中的問題時，因需考慮物體內能的變化，不可將物體視為剛體，而計算摩擦力對物體所做的功時，也必須由功的基本定義(即力乘以作用點沿力方向的位移)出發，不能將物體各部分的位移都視為完全一樣，而說摩擦力所做的功就像剛體所適用的公式一樣，仍然還是 $-\mu mgd$ 與 μmgD。

（上承第 26 頁）



4.某個袋子裡有 a 顆白球與 b 顆黑球，a 與 b 皆為正整數且 $a<b$。如果從此袋中將球一顆一顆隨機取出，並在取球過程中隨時記錄已經取出的白球數與黑球數，那麼從取出第一顆球後到將球全部取出的過程中，已取出的白球數與黑球數曾經在某個時候相等的機率是多少？

結語

證明與二項式係數有關的恆等式較典型的作法是由代數著手，例如將特定的值代入二項式定理或是直接將各 $C(n,r)$ 表為分式然後再通分化簡等；另一個常見的作法是由組合的觀點設法營造出適當的情境，例如將 $C(n,r)$ 解釋成由 n 顆球中取出 r 顆球的方法數等，數學歸納法及生成函數亦是可能的證明方式；本文則是由幾何的觀點賦予一些恆等式幾何上的意義。

「一題多解」原為數學解題樂趣的泉源，所謂「條條道路通羅馬」；本文探討的是與路徑有關的問題，這句格言在此顯得格外貼切。

參考資料

1.許介彥（2002），Catalan Numbers 簡介，科學教育月刊，第 247 期。

2.J. A. Anderson, *Discrete Mathematics with Combinatorics*, Prentice Hall, p.468-472, 2001.

3.S. Washburn, T. Marlowe and C. T. Ryan, *Discret eMathematics*, Addison-Wesley, p.106-108, 1999.