中學生通訊解題第二十三期題目

參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
912301

正方形 ABCD 的 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 邊上各有一點 M，N，若∠MAN=45°，

試證： $\dfrac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\sqrt{\dfrac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AD}+\overline{DN}}}$。

參考解答一：

如下圖，從 M 做一垂直線和 $\overline{AC}$ 相交於 E，

從 N 做一垂直線和 $\overline{AC}$ 相交於 F，

$\because \angle 1+\angle 2=45^\circ$

$\angle 2+\angle 3=45^\circ$

$\angle 3+\angle 4=45^\circ$

$\therefore \angle 1=\angle 3$ ， $\angle 2=\angle 4$

$\therefore \triangle AME \sim \triangle AND$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AE}+\overline{ME}}=\frac{\overline{AN}}{\overline{AD}+\overline{DN}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AE}+\overline{ME}}{\overline{AD}+\overline{DN}} \quad \cdots ①$$

$\triangle ABM \sim \triangle AFN$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{AF}+\overline{FN}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{AB}+\overline{BM}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AF}+\overline{FN}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

$\because \angle 5=\angle 6=45^\circ$

$\therefore \overline{ME}=\overline{CE} \Rightarrow \overline{AE}+\overline{ME}=\overline{AE}+\overline{CE}=\overline{AC}$

$\because \angle 7=\angle 8=45^\circ$

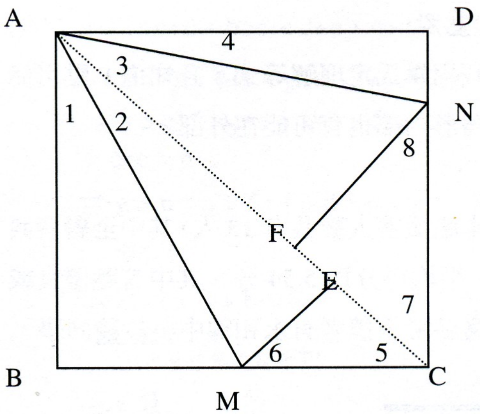
$\therefore \overline{FN}=\overline{CF} \Rightarrow \overline{AF}+\overline{FN}=\overline{AF}+\overline{CF}=\overline{AC}$

$$\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AE}+\overline{ME}}{\overline{AD}+\overline{DN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}+\overline{DN}} \quad \cdots\cdots ③$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AF}+\overline{FN}}=\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AC}} \quad \cdots\cdots ④$$

由③×④得知 $\dfrac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2}=\dfrac{\overline{AC}\times(\overline{AB}+\overline{BM})}{\overline{AC}\times(\overline{AD}+\overline{DN})}$

$$\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\sqrt{\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AD}+\overline{DN}}}\ 。$$



參考解答二：

如右圖，連$\overline{AC}$，則$\angle 1+\angle 3=45^{\circ}$，

$\angle 2+\angle 5=45^{\circ}$，

$\because \angle 1+\angle 2=45^{\circ}$ $\therefore \angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 5$

延長$\overline{BM}$，使$\overline{EB}=\overline{BM}$，連$\overline{AE}$

則$\triangle AEB\cong\triangle AMB$(SAS)，$\therefore \angle 3=\angle 4$，

且$\overline{AE}=\overline{AM}$，故$\angle 2=\angle 4$

延長$\overline{DN}$，使$\overline{DF}=\overline{DN}$，連$\overline{AF}$

則$\triangle AFD\cong\triangle AND$(SAS) $\therefore \angle 5=\angle 6$，

且$\overline{AF}=\overline{AN}$，故$\angle 1=\angle 6$

在$\triangle CEA$和$\triangle CAF$中

$\angle AEC=90^{\circ}-\angle 4=90^{\circ}-\angle 3$

$=\angle 1+\angle 2+\angle 5=\angle 6+\angle 2+\angle 5=\angle CAF$

$\angle AFC=90^{\circ}-\angle 6=90^{\circ}-\angle 5$

$=\angle 2+\angle 1+\angle 3=\angle 4+\angle 1+\angle 3=\angle CAE$

$\therefore \triangle CEA\sim\triangle CAF$(AA 相似)

$$\therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

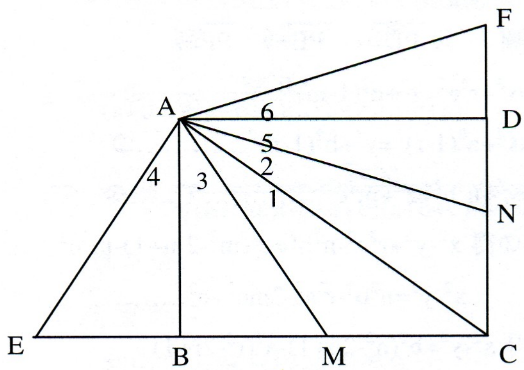
故$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

由$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}\cdots①，\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}\cdots②$$

①×② 得$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CF}}\times\frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}}=\sqrt{\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}}}=\sqrt{\frac{\overline{BC}+\overline{BE}}{\overline{CD}+\overline{DF}}}$$

$$=\sqrt{\frac{\overline{AB}+\overline{BM}}{\overline{AD}+\overline{DN}}}$$



解題重點：

能洞察出輔助線的作法，並利用三角形的全等或相似求得最後結果；或亦可以坐標法透過代數運算求解。

評析：

本題徵答人數共有 7 人，其中全對者共 6 人，平均得分為 6.71 分。其中答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、江翠國中吳哲瑋同學、新莊國中劉彥伶同學。

問題編號 912302

△ABC 中，E，F 分別為 $\overline{AC}$，$\overline{AB}$上的點，且 $\overline{AF}=m\overline{AB}$，$\overline{AE}=n\overline{AC}$，若過 F 垂直$\overline{AB}$的直線交過 E 垂直$\overline{AC}$的直線於 P 點，過 P 作$\overline{BC}$的垂線，垂足為 D，若 $\overline{BD}=r\overline{BC}$，試以 m、n、a、b、c 表示 r 。

(其中$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$)

參考解答：

如下圖， 設$\overline{PD}=x$，$\overline{PE}=y$，$\overline{PF}=z$

$\overline{PB}^2=x^2+r^2a^2=z^2+c^2(1-m)^2$……………①

$\overline{PC}^2=x^2+a^2(1-r)^2=y^2+b^2(1-n)^2$…………②

$\overline{PA}^2=y^2+n^2b^2=z^2+m^2c^2$…………………③

由①-③得 $x^2-y^2+r^2a^2-n^2b^2=c^2(m^2-2m+1)-m^2c^2$

$x^2-y^2=n^2b^2-r^2a^2-2mc^2+c^2$………④

由②得 $x^2-y^2=b^2(n^2-2n+1)-a^2(r^2-2r+1)$

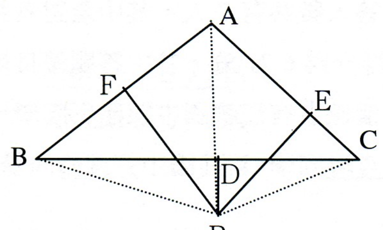
$=b^2n^2-2b^2n+b^2-a^2r^2+2a^2r-a^2$…⑤

由④、⑤得 $n^2b^2-r^2a^2-2mc^2+c^2$

$=b^2n^2-2b^2n+b^2-a^2r^2+2a^2r-a^2$

$2a^2r=a^2-b^2+c^2-2mc^2+2b^2n$

$\therefore\ r=\dfrac{a^2-b^2+c^2-2mc^2+2b^2n}{2a^2}$ 。



解題重點：

利用畢氏定理解等式，且知道 P 點可能在三角形內部也有可能在外部。

評析：

本題徵答人數共有 13 人，其中全對者共 1 人，平均得分為 5.54 分。其中答題優良或解法富參考價值者有永和國中吳俊諭同學。

問題編號 912303

(1)a、b、c、d、e 皆為實數，若 a+b＜c+d，b+c＜d+e，c+d＜e+a，d+e＜a+b，則 a、b、c、d、e 的大小順序有幾種？

(2)a、b、c、d、e、f、g 皆為實數，若 a+b＜c+d，b+c＜d+e，c+d＜e+f，d+e＜f+g，e+f＜g+a，f+g＜a+b，則 a、b、c、d、e、f、g 的大小順序有幾種？

參考解答：

(1)$\because$ $a+b<c+d$，$c+d<e+a$

$\Rightarrow a+b<e+a \Rightarrow b<e$ …①

$b+c<d+e$，$d+e<a+b$

$\Rightarrow b+c<a+b \Rightarrow c<a$ …②

$a+b<c+d$，$d+e<a+b$

$\Rightarrow d+e<c+d \Rightarrow e<c$ …③

由①②③得知 $a>c>e>b$ ……④

$\because$ $e+a>c+d>a+b>d+e>b+c$

$\Rightarrow a>d>b$ …⑤

所以由④、⑤和 a、b、c、d、e 的大小順序有下列三種：

若 $d<e$　　$b<d<e<c<a$

若 $e<d<c$　　$b<e<d<c<a$

若 $e<c<d$　　$b<e<c<d<a$

(2)$\because$ $a+b<c+d$，$b+c<d+e$，$c+d<e+f$，

$d+e<f+g$，$e+f<g+a$，$f+g<a+b$

$\therefore$ $g+a>e+f>c+d>a+b>f+g$
$>d+e>b+c$

$\Rightarrow g>b$，$a>f$，$f>d$，$e>g$，$c>e$，

$d>b$

$\Rightarrow a>f>d>b\cdots$①，

$a>c>e>g>b\cdots$②

$\Rightarrow$ a 最大，b 最小

所以由①、②知 a、b、c、d、e、f、g 的大小順序有下列數種：

若 $g>d$　　f 的排列位置有 4 種，
若 $e>d>g$　f 的排列位置有 3 種，
若 $c>d>e$　f 的排列位置有 2 種，
若 $d>c$　　f 的排列位置有 1 種，

$4+3+2+1=10\Rightarrow$ a、b、c、d、e、f、g 的大小順序共有 10 種。

解題重點：

運用不等式及簡易的排列觀念。

評析：

本題徵答人數共有 15 人，其中兩小題全對者共 10 人。第(1)題平均得分為 5.73 分，第(2)題平均得分為 6.13 分。答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、林志嘉同學、黃俊嘉同學，海山國中江俊緯同學，銘傳國中楊昀琪同學、郭懿潔同學、陳玟琪同學，興雅國中林昭平同學，新竹光華國中范祐維同學，景興國中顏友信同學。

問題編號
912304

若 $a\geq b>c>0$，$a<b+c$，試解方程式

$b\sqrt{x^2-c^2}+c\sqrt{x^2-b^2}=ax$。

參考解答：

$b\sqrt{x^2-c^2}+c\sqrt{x^2-b^2}=ax$

$\Rightarrow b\sqrt{x^2-c^2}=ax-c\sqrt{x^2-b^2}$

$\Rightarrow b^2(x^2-c^2)=a^2x^2-2acx\sqrt{x^2-b^2}+c^2(x^2-b^2)$

$\Rightarrow b^2x^2-b^2/c^2-a^2x^2-c^2x^2+b^2/c^2=-2acx\sqrt{x^2-b^2}$

$\Rightarrow x^2(b^2-a^2-c^2)=-2acx\sqrt{x^2-b^2}$

$\Rightarrow x^4(b^2-a^2-c^2)^2=4a^2c^2x^2(x^2-b^2)$

$\Rightarrow x^2[(b^2-a^2-c^2)^2x^2-4a^2c^2x^2+4a^2b^2c^2]=0$

$\because$ $b\sqrt{x^2-c^2}+c\sqrt{x^2-b^2}=ax$，$\therefore$ $x^2\neq 0\Rightarrow x\neq 0$

$\Rightarrow[(b^2-a^2-c^2)^2-4a^2c^2]x^2+4a^2b^2c^2=0$

$(b^2-a^2-c^2+2ac)(b^2-a^2-c^2-2ac)=b^2-a^2-c^2-4a^2c^2$

$=[b^2-(a-c)^2][b^2-(a+c)^2]$

$=-\underbrace{(b+a-c)}_{>0}\underbrace{(b-a+c)}_{>0}\underbrace{(b+a+c)}_{>0}\underbrace{(a-b+c)}_{>0}$

$$x^2=\frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)}$$

$$\Rightarrow x=\pm\frac{2abc}{\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)}}$$

(負不合)。

解題重點：

利用平方解含根號的等式。

評析：

本題徵答人數共有 7 人，其中全對者共 2 人，平均得分為 6.14 分。其中答題優良或解法富參考價值者有海山國中江俊緯同學、江翠國中李孟翰同學。

問題編號
912305

(1)在下列幾個由小方格組合而成的圖形中，分別有一些圓圈，試用下列的規則，將這些圓圈連在一起。

【規則】

1. 可以從任何一個圓圈開始。
2. 只能往水平方向或垂直方向走，不可往斜角方向走。
3. 在任何圓圈皆可垂直轉彎但不可在空白處轉彎。
4. 不可以在剛走過的路逕就馬上又回頭走

【第 1 題】

		○	○			
	○		○		○	
			○			○
○	○	○	○	○	○	○
○			○			
	○		○		○	
			○	○		

【第 2 題】

○									○
○	○							○	○
○	○	○					○	○	○
○	○	○	○			○	○	○	○
	○	○	○	○	○	○	○	○	
		○	○	○	○	○	○		
			○	○	○	○			
				○	○				

(2)依此規則，在一個 2×N 的方格中，圓圈應如何排列則一定可以走完？試討論之。(N 為正整數)

參考解答：

(1)

第 1 題

		10	9			
	1		8		7	
			20			19
12	2	11	21	17	6	18
13			14			
	3		4		5	
			15	16		

第 2 題

2									1
3	4							36	35
11	5	10					38	37	34
12	6	9	13			28	29	32	33
	7	8	14	25	26	27	30	31	
		40	15	24	23	22	39		
			16	17	20	21			
				18	19				

(2)討論在一個 2×N 的方格中，圓圈應如何排列則一定可以走完：

我們先訂定一些名稱再進行分類討論。

《名稱》

1,表示此格為開頭或結尾之格子，記為"●"。

2.在任意一行中，若此行上下兩邊都有格子時，稱為"**橋**"，記為 "↕"。參考圖 A。

		↑		↑	○	●
●	○	↓	○	↓		

圖 A

3.在某範圍裡，格子分布情形是重複或不需去辨認分布情形而確定是可以走完的，記為"～"。參考圖 B。

<table>
<tr><td>●</td><td>↑</td><td rowspan="2">～</td><td>↑</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>↓</td><td>↓</td><td>●</td></tr>
</table>

圖 B

《判別》

先判別是否有孤立情形再進行下列分類。

孤立：若從其中一個格子開始永遠走不到另一個格子，則此情形稱為"孤立"。如圖 C，①永遠走不到❷。

●	①		○	●
		❷		

圖 C

無孤立情形後，以●的數目來分類：

1.● ＝0 →則此 2xn 之圖形兩邊必為**橋**，可表示如圖 D，可以圖 D-1 方式走完。

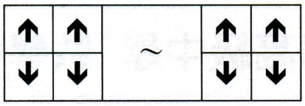


圖 D

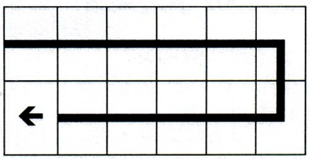


圖 D-1

2.● ＝1 →則此 2xn 之圖形另一邊必為**橋**，表示如圖 E，可以圖 E-1 方式走完。

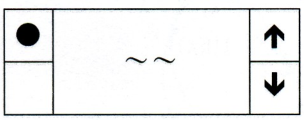


圖 E

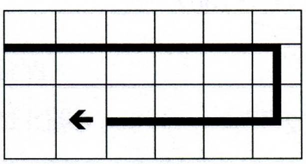


圖 E-1

3.● ＝2 →則此 2xn 之圖形會有三種情形，表示如圖 F、圖 G、圖 H，分別於(a)、(b)、(c)討論之。

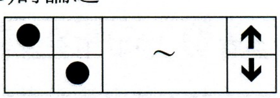


圖 F

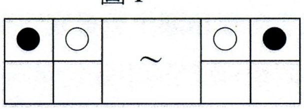


圖 G

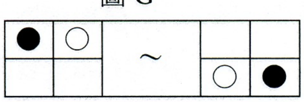


圖 H

4.● ≧ 3 →則此 2xn 之圖形不可完成，表示如圖 I。

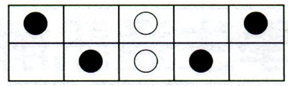


圖 I

《● ＝2 的討論》

(a)圖 F：顯然有一側為橋，可以圖 F-1 方式走完。

圖 F

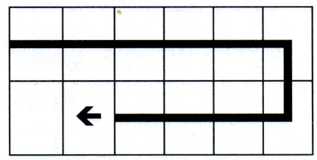


圖 F-1

(b)圖 G：以橋的數目來做分類，可分為 2 類討論之。

第一類：橋=1→因為會產生 3 個頭，所以不可走完。參考圖 G-1。

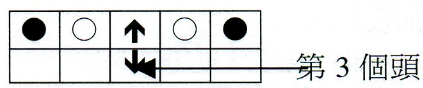


圖 G-1

第二類：橋≧2→必可走完。取出最外側的兩座橋，可以圖 G-3 方式走完。

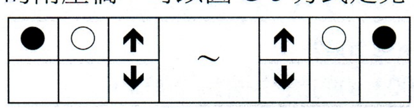


圖 G-2

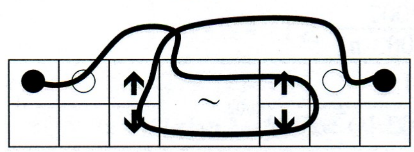


圖 G-3

(c)圖 H：以橋的數目來做分類，可分為 3 類討論之。

第一類：橋=1→必可走完。可以圖 H-2 方式走完。

（下轉第 50 頁）

（上承第 57 頁）

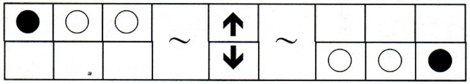


圖 H-1

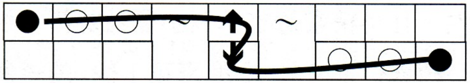


圖 H-2

第二類：橋=2→不可走完。因爲兩座橋會造成一上一下的走向，而無法連通至另一端不同行的圓圈。

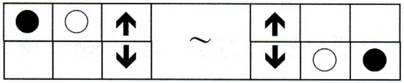


圖 H-3

第三類：橋≧3→必可走完。取出最外側的兩座橋與中間任一座橋，可以圖 H-5 方式走完。

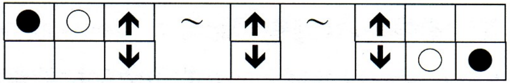


圖 H-4

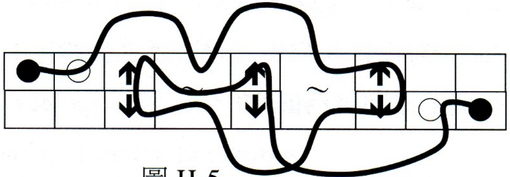


圖 H-5

解題重點：

洞察出通行要點(即解中的橋)以試誤實驗方式作討論。

評析：

本題徵答人數共有 21 人。平均得分爲 2.10 分。