

中學生通訊解題第二十三期題目

參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號

912301

正方形 ABCD 的 \overline{BC} ， \overline{CD} 邊上各有一點

M，N，若 $\angle MAN = 45^\circ$ ，

試證：
$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \sqrt{\frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AD} + \overline{DN}}}$$

參考解答一：

如下圖，從 M 做一垂直線和 \overline{AC} 相交於 E，

從 N 做一垂直線和 \overline{AC} 相交於 F，

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 45^\circ$$

$$\angle 2 + \angle 3 = 45^\circ$$

$$\angle 3 + \angle 4 = 45^\circ$$

$$\therefore \angle 1 = \angle 3, \quad \angle 2 = \angle 4$$

$$\therefore \triangle AME \sim \triangle AND$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AE} + \overline{ME}} = \frac{\overline{AN}}{\overline{AD} + \overline{DN}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AE} + \overline{ME}}{\overline{AD} + \overline{DN}} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\triangle ABM \sim \triangle AFN$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AN}}{\overline{AF} + \overline{FN}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AB} + \overline{BM}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AF} + \overline{FN}} \quad \dots \textcircled{2}$$

$$\therefore \angle 5 = \angle 6 = 45^\circ$$

$$\therefore \overline{ME} = \overline{CE} \Rightarrow \overline{AE} + \overline{ME} = \overline{AE} + \overline{CE} = \overline{AC}$$

$$\therefore \angle 7 = \angle 8 = 45^\circ$$

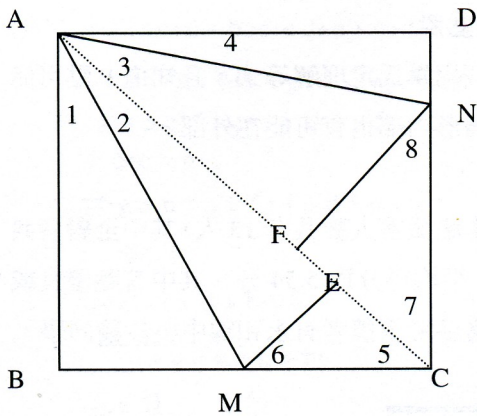
$$\therefore \overline{FN} = \overline{CF} \Rightarrow \overline{AF} + \overline{FN} = \overline{AF} + \overline{CF} = \overline{AC}$$

$$\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AE} + \overline{ME}}{\overline{AD} + \overline{DN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AD} + \overline{DN}} \quad \dots \textcircled{3}$$

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AF} + \overline{FN}} = \frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AC}} \quad \dots \textcircled{4}$$

由 $\textcircled{3} \times \textcircled{4}$ 得知
$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{\overline{AC} \times (\overline{AB} + \overline{BM})}{\overline{AC} \times (\overline{AD} + \overline{DN})}$$

$$\therefore \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \sqrt{\frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AD} + \overline{DN}}}$$



參考解答二：

如右圖，連 \overline{AC} ，則 $\angle 1 + \angle 3 = 45^\circ$ ，

$$\angle 2 + \angle 5 = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 45^\circ \therefore \angle 2 = \angle 3, \angle 1 = \angle 5$$

延長 \overline{BM} ，使 $\overline{EB} = \overline{BM}$ ，連 \overline{AE}

則 $\triangle AEB \cong \triangle AMB(SAS)$ ， $\therefore \angle 3 = \angle 4$ ，

且 $\overline{AE} = \overline{AM}$ ，故 $\angle 2 = \angle 4$

延長 \overline{DN} ，使 $\overline{DF} = \overline{DN}$ ，連 \overline{AF}

則 $\triangle AFD \cong \triangle AND(SAS)$ $\therefore \angle 5 = \angle 6$ ，

且 $\overline{AF} = \overline{AN}$ ，故 $\angle 1 = \angle 6$

在 $\triangle CEA$ 和 $\triangle CAF$ 中

$$\angle AEC = 90^\circ - \angle 4 = 90^\circ - \angle 3$$

$$= \angle 1 + \angle 2 + \angle 5 = \angle 6 + \angle 2 + \angle 5 = \angle CAF$$

$$\angle AFC = 90^\circ - \angle 6 = 90^\circ - \angle 5$$

$$= \angle 2 + \angle 1 + \angle 3 = \angle 4 + \angle 1 + \angle 3 = \angle CAE$$

$\therefore \triangle CEA \sim \triangle CAF(AA \text{ 相似})$

$$\therefore \frac{\overline{AE}}{\overline{AF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

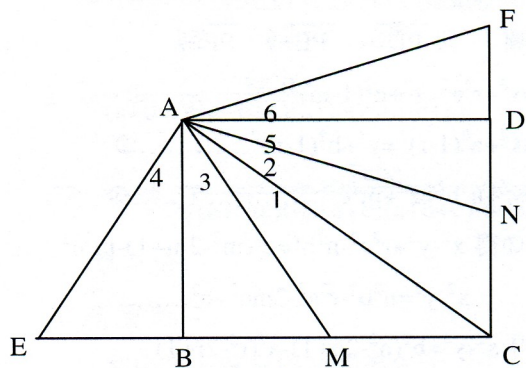
$$\text{故 } \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

$$\text{由 } \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} \dots \textcircled{1}, \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}} \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \times \textcircled{2} \text{ 得 } \frac{\overline{AM}^2}{\overline{AN}^2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CF}} \times \frac{\overline{CE}}{\overline{AC}}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = \sqrt{\frac{\overline{CE}}{\overline{CF}}} = \sqrt{\frac{\overline{BC} + \overline{BE}}{\overline{CD} + \overline{DF}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\overline{AB} + \overline{BM}}{\overline{AD} + \overline{DN}}}$$



解題重點：

能洞察出輔助線的作法，並利用三角形的全等或相似求得最後結果；或亦可以坐標法透過代數運算求解。

評析：

本題徵答人數共有 7 人，其中全對者共 6 人，平均得分為 6.71 分。其中答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、江翠國中吳哲瑋同學、新莊國中劉彥伶同學。

問題編號
912302

△ABC 中，E、F 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 上的點，且 $\overline{AF} = m\overline{AB}$ ， $\overline{AE} = n\overline{AC}$ ，若過 F 垂直 \overline{AB} 的直線交過 E 垂直 \overline{AC} 的直線於 P 點，過 P 作 \overline{BC} 的垂線，垂足為 D，若 $\overline{BD} = r\overline{BC}$ ，試以 m、n、a、b、c 表示 r。

(其中 $\overline{BC} = a$ ， $\overline{AC} = b$ ， $\overline{AB} = c$)

參考解答：

如下圖，設 $\overline{PD} = x$ ， $\overline{PE} = y$ ， $\overline{PF} = z$

$$\overline{PB}^2 = x^2 + r^2 a^2 = z^2 + c^2 (1-m)^2 \dots\dots\dots ①$$

$$\overline{PC}^2 = x^2 + a^2 (1-r)^2 = y^2 + b^2 (1-n)^2 \dots\dots\dots ②$$

$$\overline{PA}^2 = y^2 + n^2 b^2 = z^2 + m^2 c^2 \dots\dots\dots ③$$

由①-③得 $x^2 - y^2 + r^2 a^2 - n^2 b^2 = c^2 (m^2 - 2m + 1) - m^2 c^2$

$$x^2 - y^2 = n^2 b^2 - r^2 a^2 - 2mc^2 + c^2 \dots\dots\dots ④$$

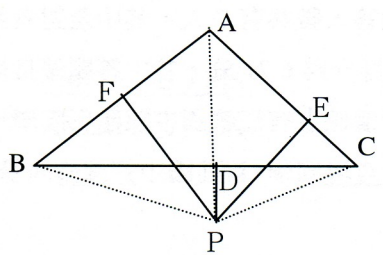
由②得 $x^2 - y^2 = b^2 (n^2 - 2n + 1) - a^2 (r^2 - 2r + 1)$

$$= b^2 n^2 - 2b^2 n + b^2 - a^2 r^2 + 2a^2 r - a^2 \dots\dots ⑤$$

由④、⑤得 $n^2 b^2 - r^2 a^2 - 2mc^2 + c^2$

$$= b^2 n^2 - 2b^2 n + b^2 - a^2 r^2 + 2a^2 r - a^2$$

$$2a^2 r = a^2 - b^2 + c^2 - 2mc^2 + 2b^2 n$$

$$\therefore r = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - 2mc^2 + 2b^2 n}{2a^2} .$$


解題重點：

利用畢氏定理等式，且知道 P 點可能在三角形內部也有可能在外部。

評析：

本題徵答人數共有 13 人，其中全對者共 1 人，平均得分為 5.54 分。其中答題優良或解法富參考價值者有永和國中吳俊諱同學。

問題編號
912303

- (1) a、b、c、d、e 皆為實數，若 $a+b < c+d$ ， $b+c < d+e$ ， $c+d < e+a$ ， $d+e < a+b$ ，則 a、b、c、d、e 的大小順序有幾種？
- (2) a、b、c、d、e、f、g 皆為實數，若 $a+b < c+d$ ， $b+c < d+e$ ， $c+d < e+f$ ， $d+e < f+g$ ， $e+f < g+a$ ， $f+g < a+b$ ，則 a、b、c、d、e、f、g 的大小順序有幾種？

參考解答：

- (1) $\because a+b < c+d$ ， $c+d < e+a$
- $$\Rightarrow a+b < e+a \Rightarrow b < e \dots\dots ①$$
- $$b+c < d+e$$
- ，
- $d+e < a+b$
- $$\Rightarrow b+c < a+b \Rightarrow c < a \dots\dots ②$$
- $$a+b < c+d$$
- ，
- $d+e < a+b$
- $$\Rightarrow d+e < c+d \Rightarrow e < c \dots\dots ③$$
- 由①②③得知 $a > c > e > b \dots\dots ④$
- $\because e+a > c+d > a+b > d+e > b+c$
- $$\Rightarrow a > d > b \dots\dots ⑤$$

所以由④、⑤和 a、b、c、d、e 的大小順序有下列三種：

- 若 $d < e$ $b < d < e < c < a$
 若 $e < d < c$ $b < e < d < c < a$
 若 $e < c < d$ $b < e < c < d < a$

(2) ∵ $a+b < c+d$, $b+c < d+e$, $c+d < e+f$,

$$d+e < f+g, e+f < g+a, f+g < a+b$$

$$\therefore g+a > e+f > c+d > a+b > f+g > d+e > b+c$$

$$\Rightarrow g > b, a > f, f > d, e > g, c > e,$$

$$d > b$$

$$\Rightarrow a > f > d > b \cdots \textcircled{1},$$

$$a > c > e > g > b \cdots \textcircled{2}$$

$$\Rightarrow a \text{ 最大, } b \text{ 最小}$$

所以由①、②知 a 、 b 、 c 、 d 、 e 、 f 、 g 的大小順序有下列數種：

若 $g > d$ f 的排列位置有 4 種，

若 $e > d > g$ f 的排列位置有 3 種，

若 $c > d > e$ f 的排列位置有 2 種，

若 $d > c$ f 的排列位置有 1 種，

$$4+3+2+1=10 \Rightarrow a、b、c、d、e、f、g \text{ 的}$$

大小順序共有 10 種。

解題重點：

運用不等式及簡易的排列觀念。

評析：

本題徵答人數共有 15 人，其中兩小題全對者共 10 人。第(1)題平均得分為 5.73 分，第(2)題平均得分為 6.13 分。答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、林志嘉同學、黃俊嘉同學，海山國中江俊緯同學，銘傳國中楊昀琪同學、郭懿潔同學、陳玟琪同學，興雅國中林昭平同學，新竹光華國中范祐維同學，景興國中顏友信同學。

問題編號

912304

若 $a \geq b > c > 0$, $a < b+c$, 試解方程式

$$b\sqrt{x^2-c^2} + c\sqrt{x^2-b^2} = ax.$$

參考解答：

$$b\sqrt{x^2-c^2} + c\sqrt{x^2-b^2} = ax$$

$$\Rightarrow b\sqrt{x^2-c^2} = ax - c\sqrt{x^2-b^2}$$

$$\Rightarrow b^2(x^2-c^2) = a^2x^2 - 2acx\sqrt{x^2-b^2} + c^2(x^2-b^2)$$

$$\Rightarrow b^2x^2 - b^2c^2/c^2 - a^2x^2 - c^2x^2 + b^2/c^2 = -2acx\sqrt{x^2-b^2}$$

$$\Rightarrow x^2(b^2-a^2-c^2) = -2acx\sqrt{x^2-b^2}$$

$$\Rightarrow x^4(b^2-a^2-c^2)^2 = 4a^2c^2x^2(x^2-b^2)$$

$$\Rightarrow x^2[(b^2-a^2-c^2)^2x^2 - 4a^2c^2x^2 + 4a^2b^2c^2] = 0$$

$$\therefore b\sqrt{x^2-c^2} + c\sqrt{x^2-b^2} = ax, \therefore x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$$

$$\Rightarrow [(b^2-a^2-c^2)^2 - 4a^2c^2]x^2 + 4a^2b^2c^2 = 0$$

$$(b^2-a^2-c^2+2ac)(b^2-a^2-c^2-2ac) = b^2-a^2-c^2-4a^2c^2$$

$$= [b^2-(a-c)^2][b^2-(a+c)^2]$$

$$= \frac{-(b+a-c)}{>0} \frac{(b-a+c)}{>0} \frac{(b+a+c)}{>0} \frac{(a-b+c)}{>0}$$

$$x^2 = \frac{4a^2b^2c^2}{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)}$$

$$\Rightarrow x = \pm \frac{2abc}{\sqrt{(a+b-c)(-a+b+c)(a+b+c)(a-b+c)}}$$

(負不合)。

解題重點：

利用平方解含根號的等式。

評析：

本題徵答人數共有 7 人，其中全對者共 2 人，平均得分為 6.14 分。其中答題優良或解法富參考價值者有海山國中江俊緯同學、江翠國中李孟翰同學。

問題編號

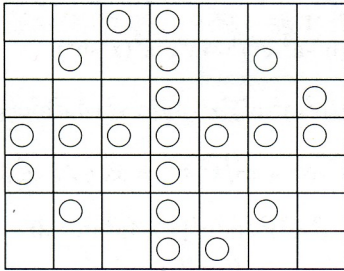
912305

(1) 在下列幾個由小方格組合而成的圖形中，分別有一些圓圈，試用下列的規則，將這些圓圈連在一起。

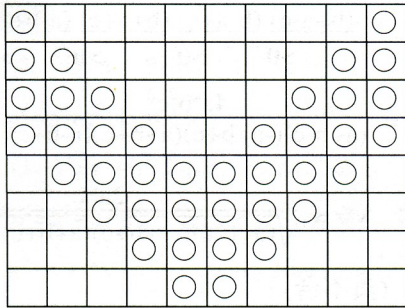
【規則】

1. 可以從任何一個圓圈開始。
2. 只能往水平方向或垂直方向走，不可往斜角方向走。
3. 在任何圓圈皆可垂直轉彎但不可在空白處轉彎。
4. 不可以在剛走過的路徑就馬上又回頭走

【第 1 題】



【第 2 題】



(2)依此規則，在一個 $2 \times N$ 的方格中，圓圈應如何排列則一定可以走完？試討論之。
(N 為正整數)

參考解答：

(1)

第 1 題

| | | | | | | |
|----|---|----|----|----|---|----|
| | | 10 | 9 | | | |
| | 1 | | 8 | | 7 | |
| | | | 20 | | | 19 |
| 12 | 2 | 11 | 21 | 17 | 6 | 18 |
| 13 | | | 14 | | | |
| | 3 | | 4 | | 5 | |
| | | | 15 | 16 | | |

第 2 題

| | | | | | | | | | | |
|----|---|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| 2 | | | | | | | | | 1 | |
| 3 | 4 | | | | | | | 36 | 35 | |
| 11 | 5 | 10 | | | | | | 38 | 37 | 34 |
| 12 | 6 | 9 | 13 | | | | 28 | 29 | 32 | 33 |
| | 7 | 8 | 14 | 25 | 26 | 27 | 30 | 31 | | |
| | | 40 | 15 | 24 | 23 | 22 | 39 | | | |
| | | | 16 | 17 | 20 | 21 | | | | |
| | | | | 18 | 19 | | | | | |

(2)討論在一個 $2 \times N$ 的方格中，圓圈應如何排列則一定可以走完：

我們先訂定一些名稱再進行分類討論。

《名稱》

1. 表示此格為開頭或結尾之格子，記為“●”。
2. 在任意一行中，若此行上下兩邊都有格子時，稱為“橋”，記為“ \updownarrow ”。參考圖 A。

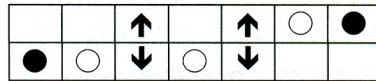


圖 A

3. 在某範圍裡，格子分布情形是重複或不需去辨認分布情形而確定是可以走完的，記為“~”。參考圖 B。



圖 B

《判別》

先判別是否有孤立情形再進行下列分類。

孤立：若從其中一個格子開始永遠走不到另一個格子，則此情形稱為“孤立”。

如圖 C，①永遠走不到②。

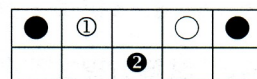


圖 C

