中學生通訊解題第二十四期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號 912401

比較$(2002!)^2$與2002^{2002}之間的大小關係。

（定義：$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$，$n$為自然數）

參考解答一：

令$k=\dfrac{2002^{2002}}{(2002!)^2}$

則$k=\dfrac{2002}{1\times2002}\times\dfrac{2002}{2\times2001}\times\dfrac{2002}{3\times2000}\times\ldots\times\dfrac{2002}{2002\times1}$

每一項的分母可表示為$n(2003-n)$，

$1\leqq n\leqq 2002$，n為自然數

$\therefore\ -n^2+2003n$

$=-(n^2-2003n)$

$=-(n-\dfrac{2003}{2})^2+(\dfrac{2003}{2})^2$

又$\because 1\leqq n\leqq 2002$

$\therefore n(2003-n)$的最小值為 2002，最大值為 1004003

$\therefore \dfrac{2002}{n(2003-n)}\leqq 1$

即$k<1$

$\therefore (2002!)^2>2002^{2002}$。

參考解答二：

$2002^{2002}=(2002^{1001})^2$

$(2002!)^2$

$=[2002\times(2002-1)\times(2002-2)\times\ldots\times1]^2$

$=\{[2002\times1]\times[(2002-1)\times2]\times[(2002-2)\times3]\times\ldots\times[(2002-1000)\times1001]\}^2$

即 2002！所代表之 2002 項之乘積可重組為 1001 項之乘積，且每一項可以

$(2002-m)\times(m+1)$表示，

其中$m = 0、1、2、\ldots、1000$

$(2002-m)\times(m+1) = 2002m-m^2+2002-m$

$= 2002+(2001-m)m$

$\because m = 0、1、2、\ldots、1000$

$\therefore (2001-m)m\geqq 0$

$\therefore (2002-m)\times(m+1)\geqq 2002$

$\therefore 2002!>2002^{1001}$

$\therefore (2002!)^2>2002^{2002}$。

解題重點：

重排後利用配方法、解不等式來比較大小。

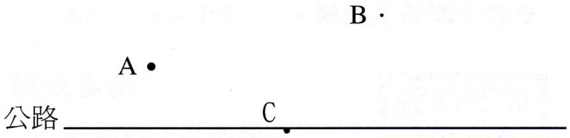
評析：

本題徵答人數共有 93 人，其中全對者共 7 人，平均得分為 4.91 分。其中答題優良或解法富參考價值者有福和國中吳霽庭同學、福和國中林東岳同學、南門國中張鈞傑同學。

問題編號 912402

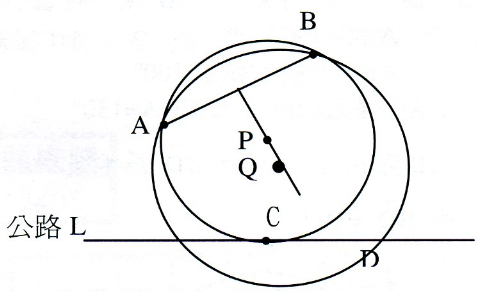
如圖，直線表公路，A、B 兩黑點位置表遠處的兩棵樹，現在攝影師於公路上想要取景將兩棵樹入鏡，且希望取景角度∠ACB 最

大，那麼應該如何決定 C 點位置？試敘述取法並證明之。



參考解答：

(1)作法：如圖過 A、B 作圓，並與直線 L 相切於 C 點，則切點 C 即為所要求之點。



(2)證明：

如上圖：

作小圓 C1 過 A、B、C 三點，圓心為 P，

在 L 上任取異於 C 的一點 D，

作大圓 C2 過 A、B、D 三點，圓心為 Q，

則兩圓之圓心 P、Q 必都在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，

得 $\angle ACB=\frac{1}{2}\angle APB$ 且 $\angle ADB=\frac{1}{2}\angle AQB$

又 $\angle APB > \angle AQB$

故 $\angle ACB > \angle ADB$。

解題重點：

能知道圓心角與圓周角的關係，或用圓之切線性質求之。

評析：

本題徵答人數共有 34 人，答對者共 22 人，平均得分為 5.09 分。其中答題優良或解法富參考價值者有福和國中吳霽庭同學，銘傳國中顏煜洋同學。

問題編號
912403

解 $2x^2-11[x]+12=0$。

([x]為小於或等於 x 的最大整數，例：$x=3.8\to[x]=3$；$x=-0.4\to[x]=-1$；$x=7\to[x]=7$)

參考解答一：

1.定義：

$\because [x]$為小於或等於 x 的最大整數

$\therefore x-1<[x]\leqq x$

2.計算：

求 x 的範圍：$2x^2-11[x]+12=0$

$\Rightarrow 2x^2+12=11[x] \Rightarrow [x]=\dfrac{2x^2+12}{11}$

狀況一：$x-1<\dfrac{2x^2+12}{11}$

$11x-11<2x^2+12 \Rightarrow 2x^2-11x+23>0$

$\because (-11)^2-4\cdot2\cdot23<0$

$\therefore$狀況一沒有限制

狀況二：$\dfrac{2x^2+12}{11}\leqq x$

$\because 2x^2+12=11x \Rightarrow 2x^2-11x+12\leqq 0$

$\Rightarrow (2x-3)(x-4)\leqq 0$

$\therefore \frac{3}{2}\leqq x\leqq 4$

(1)若 $1.5\leqq x<2 \Rightarrow [x]=1$

代入 $2x^2-11[x]+12=0 \Rightarrow 2x^2+1=0$(無實數解)

(2)若 $2\leqq x<3 \Rightarrow [x]=2$

代入 $2x^2-11[x]+12=0\Rightarrow 2x^2-10=0\Rightarrow x^2=5$

$\Rightarrow x=\pm\sqrt{5}$ (負不合)

$\therefore x=\sqrt{5}$ (第一個解)

(3)若 $3\leqq x<4 \Rightarrow [x]=3$

代入 $2x^2-11[x]+12=0 \Rightarrow 2x^2-21=0 \Rightarrow$

$x^2=\frac{21}{2}$ ⇨ $x=\pm\sqrt{\frac{21}{2}}$ (負不合)

∴$x=\sqrt{\frac{21}{2}}$ (第二個解)

(4)若 $x=4$ ⇨ $[x]=4$

代入 $2x^2-11[x]+12=0$ ⇨ $2x^2-32=0$ ⇨ $x^2=16$ ⇨ $x=\pm4$(負不合) ∴$x=4$ (第三個解)

3.計算結果：$x=\sqrt{5}$、$\sqrt{\frac{21}{2}}$、4

參考解答二：

1. $2x^2-11[x]+12=0$ ⇨ $2x^2=11[x]-12$

又 $0<2x^2=11[x]-12$ ⇨ $11[x]-12>0$

⇨ $[x]>\frac{12}{11}$ 又[x]為整數

⇨ $[x]\geqq2$

2.由定義，$x\geqq[x]$∴$11x\geqq11[x]=2x^2+12>2x^2$

⇨$\frac{11x}{2x^2}>1$ ⇨ $\frac{2x^2}{11x}<1$ ⇨ $\frac{2}{11}x<1$

⇨ $x<\frac{11}{2}=5.5$ 又$[x]\leqq x$

⇨ $[x]\leqq x<5.5$ 且 x 是整數

⇨ $[x]\leqq5$

3.由 1、2，$2\leqq[x]\leqq5$

將[x]=2、3、4、5 代入求解([x]為整數)

$[x]=2$， $x=\sqrt{5}$ (負不合)

$=3$， $x=\sqrt{\frac{21}{2}}$ (負不合)

$=4$， $x=4$(負不合)

$=5$， $x=\pm\sqrt{\frac{43}{2}}$ (均不合)

計算結果：$x=\sqrt{5}$、$\sqrt{\frac{21}{2}}$、4

解題重點：

利用夾擊 x 的方法或討論[x]的範圍來求 x 值。

評析：

本題徵答人數共有 94 人，其中全對者共 27 人，平均得分為 3.64 分。答題優良或解法富參考價值者有福和國中林育任同學，東湖國中李光宇同學，江翠國中吳哲瑋同學，金華國中謝博丞同學。

問題編號 912404

四邊形 ABCD 滿足$\overline{AB}=\overline{BC}=10$，$\angle ABC=100^\circ$，$\angle CDA=130^\circ$，則 $\overline{BD}=$？

參考解答一：

如下圖，以 B 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫一個圓

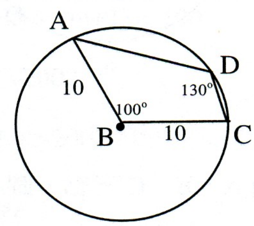
∵$\angle ABC=100^\circ$

∴$\angle ABC$ 所對的弧是 100°

∵AC 優弧$=260^\circ$，$\angle CDA=130^\circ$

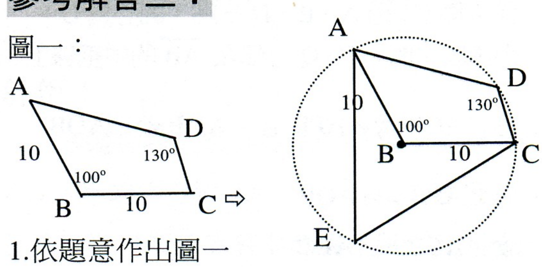
∴D 點在圓周上 ⇨ $\overline{BD}$ 為半徑

⇨ $\overline{BD}=10$。



參考解答二：

圖一：



1.依題意作出圖一

2.過 A、D、C 三點作一圓，在圓上取一點 E，連$\overline{EA}$、$\overline{EC}$，則 A、D、C、E 四點共圓，

∴$\angle AEC+\angle ADC=180^\circ$，∴$\angle AEC=50^\circ$

3.在圓中，$\angle AEC$ 與$\angle ABC$ 對的弧相同，且$\angle ABC=2\angle AEC$，

=>B 點是這個圓的圓心，

$\therefore \overline{BD}$ 為圓 B 的半徑

$\therefore \overline{AB}=10=\overline{BD}$ 。

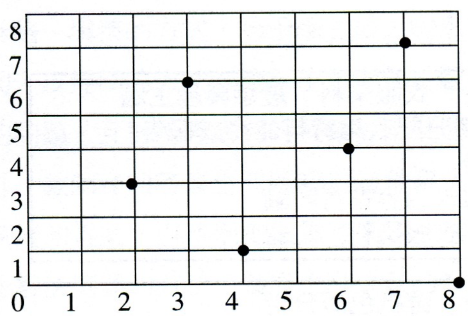
解題重點：

能洞察出以圓輔助，並利用圓周角與圓心角或四點共圓的角度關係發現答案。

評析：

本題徵答人數共有 71 人，其中全對者共 62 人，平均得分為 6.34 分。其中答題優良或解法富參考價值者有興雅國中林昭平同學、銘傳國中林劭安同學、衛道國中廖振廷同學。

問題編號
912405



圖中表某城市的街道地圖，其中六個黑點位置表示住家位置，黑線表示道路位置，若現在要設置一購物中心於某兩黑線交叉位置處：

1.若此購物中心到每個黑點距離的距離和要最短，則應設置在何位置，試以所附座標標示？

2.設置位置有幾種可能情形？

3.若再加入一點於(1,8)後，購物中心位置是否還需要作調整？

4.若購物中心到每個黑點的距離中的最大值定義為最佳距離，如原來的圖中，則購物中心設置在何處時，最佳距離之值為最小？

參考解答：

1.分成 x,y 軸個別討論，總距離和最小即求

$$|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-6|+|x-7|+|x-8|$$

與

$$|y-0|+|y-1|+|y-3|+|y-4|+|y-6|+|y-7|$$

之最小值，故當 x=4 或 5 或 6，且 y=3 或 4 時皆可使總距離和為最小。

2.(x,y)共有 $3\times 2=6$ 種可能情形。若不含住家(6,4)位置，則有 5 種。

3.再加入一點於(1,8)後，同理，分成 x,y 軸個別討論，總距離和最小即求

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-6|+|x-7|+|x-8|$$

及

$$|y-0|+|y-1|+|y-3|+|y-4|+|y-6|+|y-7|+|y-8|$$

之最小值，故當 x=4 且 y=4 時可使總距離和為最小。

4.購物中心設置在(5,3)、(6,3)、(7,4)等位置時，最佳距離均為 6，為最小。

解題重點：

了解街道距離與直線距離之不同意義，清楚絕對值不等式的最小值之求法。

評析：

本題徵答人數共有 20 人，其中全對者共 1 人。平均得分為 2.5 分。其中答題優良或解法富參考價值者有光華國中范祐維同學。