由解題路徑分析的觀點看 Morley's 定理的證明

李政豐
國立竹南高級中學

(一)楔子：

2001.10.13 上過交大應用數學系吳培元老師的課程『由幾何分析到數值域研究』，細心看了施拱星先生的 Morley's Theorem 的證明，此證明係 Kowalewski 在 1940 年所發表，使我對 Morley's Theorem 感到好奇，尤其是它可以應用到那些地方？

打從高中開始，就常聽到這位每次參與大學聯招數學命題，都會有數萬考生得零分的台大數學系教授施拱星先生，於是格外注意這本 52 年 6 月「中華民國科學研習會」發行的「科學研習第二卷第六期單行本」：Morley's Theorem。

施先生是數學教育的老前輩，對於定理的證明有獨到的技巧，這是公認的事實。但是，每次施先生大學聯招數學命題，都會有數萬考生得零分，就表示有太多人進不了施先生的門路。站在提升全民科學水準的立場，似乎我們可以用更通俗的方式，讓更多的學生，可以瞭解這個漂亮定理的證明過程，引領他入門。這就是本文的最大目的。

(二)介紹解題路徑分析：

數學的解題路徑，是由連續、環環相扣、合乎邏輯的關聯步驟所組成。如果數學的解題路徑就好像我們到附近的超級市場去購物的歷程，那樣的簡單、直覺、自然、合理，學習數學就不再是學子的夢魘。

參考 George Polya 『How To Solve It』當中的解題策略，加上 Howard C. McAllister『21st Century Problem Solving』的一些看法，我們把解題的過程，大致分成五個步驟：

(1) 充分認識問題，掌握已知條件。

(2) 探究所給條件，找尋答案關聯。

(3) 根據過去經驗，選擇解題策略。

(4) 規畫解題路徑，逐步找尋答案。

(5) 檢核驗算結果，省思擴展空間。

當我們選擇不同的解題策略，就相對的會產生不同的解題路徑與概念圖，解題過程與方法也會有顯著的差異，此時『解題路徑分析』，就變成是引導我們找尋答案的指北針，在相互比較之下，通常能在『解題路徑分析』中發現最精緻、優美的解法，那也就是我們最後展示給大家欣賞的解題方法。

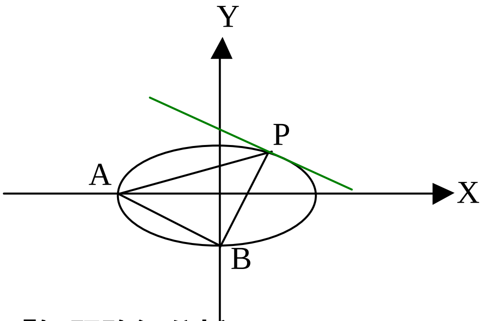
以下列試題為例

試題來源：

八十八年大學聯考自然組非選擇題(三)

題目：

如下圖A，B為橢圓 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 之兩頂點其中a，b皆為正數，若P為第一象限的橢圓弧上之一點則 ΔABP 最大的面積為何？



『解題路徑分析』：

解法(一)：由橢圓的參數式，令座標

$$P(a\cos q, b\sin q),\quad 0<q<\frac{p}{2}$$

由 A(-a，0)，B(0，-b)

$\overrightarrow{AP}=(a\cos q+a, b\sin q)$，$\overrightarrow{AB}$=(a,-b)，由二階行列式

ΔABP面積 $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} a\cos q+a & b\sin q \\ a & -b \end{vmatrix}$ 的絕對值

$=\frac{1}{2}(ab)|\sin q+\cos q+1|$ …由正餘弦函數疊合

$\le(\frac{\sqrt{2}+1}{2})ab$ Q.E.D

解法(二)：用橢圓的切線公式

ΔABP中，$\overline{AB}$長度固定，把它當作三角形的底，若P為第一象限內，橢圓弧上之動點，如果由P向$\overline{AB}$作高，而要使得高最大，那麼過P的切線，必定要與$\overline{AB}$平行。(在線性歸劃的想法，把橢圓第一象限的區域當可行解，斜率為 m_{AB} 的直線平行移動，得到最大高的點P，是最佳解)

設 $P(a\cos q, b\sin q)$，由切線公式，過P之切線方程是 $\frac{(a\cos q)x}{a^2}+\frac{(b\sin q)y}{b^2}=1$

即 $(b\cos q)x+(a\sin q)y-ab=0$

切線斜率 = $\overline{AB}$ 斜率，$\frac{-b\cos q}{a\sin q}=\frac{-b}{a}$

得 $\cot q=1$

$\cos q=\sin q=\frac{\sqrt{2}}{2}$

P點座標 $(\frac{\sqrt{2}a}{2},\frac{\sqrt{2}b}{2})$

$\overrightarrow{AP}=(\frac{a}{\sqrt{2}}+a,\frac{b}{\sqrt{2}})$，$\overrightarrow{AB}=(a,-b)$

ΔABP面積 $=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}}+a & \frac{b}{\sqrt{2}} \\ a & -b \end{vmatrix}$ 的絕對值

$=(\frac{\sqrt{2}+1}{2})ab$ Q.E.D

解法(三)：用點到直線的距離求最大的高

如果在P點能產生最大的高h，則此最大的高h是多少？

由橢圓的參數式，令座標 $P(a\cos q, b\sin q)$，$0<q<\frac{p}{2}$ 直線AB的方程式是 $\frac{x}{-a}+\frac{y}{-b}=1$

即 bx+ay+ab=0

令P點到直線AB的距離為d

$d=\frac{|ba\cos q+ab\sin q+ab|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$=(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})|\sin q+\cos q+1|$ 由正餘弦函數疊合 $\le(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})(\sqrt{2}+1)$ = h

此時 ΔABP面積 $=\frac{1}{2}$(底)(高)

$=\frac{1}{2}$(AB線段的長)(h)

$=\frac{1}{2}(\sqrt{a^2+b^2})(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})(\sqrt{2}+1)$

$=(\frac{\sqrt{2}+1}{2})ab$ Q.E.D

解法(四)：用隱函數微分找斜率與切點

如果在P點能產生最大的高，過P點之

切線斜率是 $\frac{-b}{a}$

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2yy'}{b^2}=0$$

$$y'=\frac{-b^2x}{a^2y}$$

過 $P(x_。,y_。)$ 之切線斜率是 $\frac{-b^2x_。}{a^2y_。}=\frac{-b}{a}$

得到 $ay_。=bx_。$ 解聯立方程組 $\begin{cases} ay_。=bx_。 \\ \frac{x_。{}^2}{a^2}+\frac{y_。{}^2}{b^2}=1 \end{cases}$

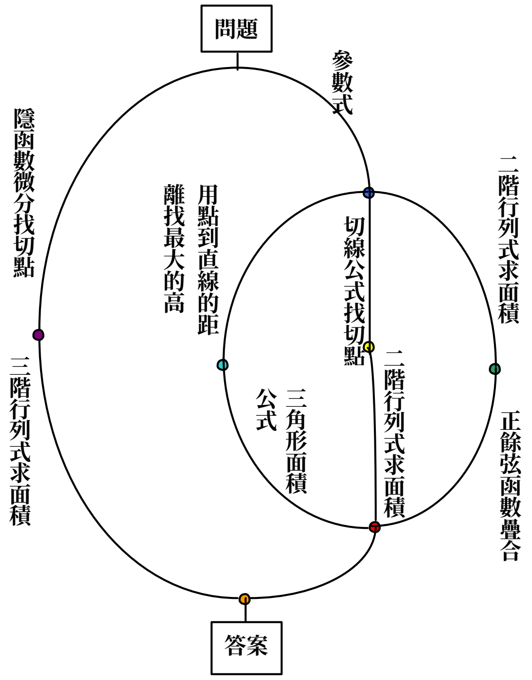
因為切點 $P(x_。,y_。)$ 在第一象限， $x_。,y_。\in R^+$

解得 $(x_。,y_。)=(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}})$ 由三階行列式

此時 ΔABP 面積= $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{a}{\sqrt{2}} & \frac{b}{\sqrt{2}} & 1 \\ -a & 0 & 1 \\ 0 & -b & 1 \end{vmatrix}$ 的絕

對值= $(\frac{\sqrt{2}+1}{2})ab$ Q.E.D

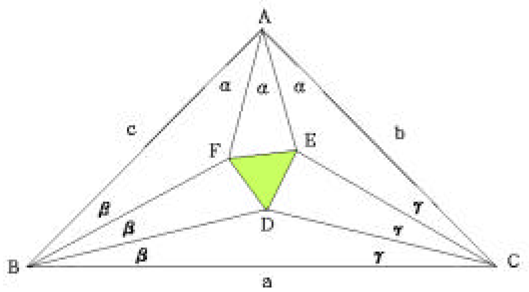
解題路徑分析與概念圖：



(三)解題路徑分析實例：

【Frank Morley's 定理】：如下圖

在任意Δ A B C，設三個頂角∠A，∠B，∠C的三等分線為A E、A F、B F、B D、C D、C E，則其交點所成之Δ D E F為一正三角形。



一開始，我們先做了一個 GSP 的小軟體，移動三個頂點，觀察這個定理是否真的會成立（GSP 圖請看下頁）。

經過一番實驗，確定它會成立之後，我們嘗試以高中學生的數學背景，由解題路徑分析的觀點來證明它！

(1)分析求證的目標：

?DEF 為正三角形的條件

$\overline{DE}=\overline{EF}=\overline{FD} \Leftrightarrow \overline{DE}^2=\overline{EF}^2=\overline{FD}^2$

(2)掌握可用的條件：

條件能多少適中最好，條件設多了；列式方便，化簡難。

條件設少了；礙手礙腳，計算繁。

?ABC 三邊長 abc 為已知,三內角和 3α+3ß+3?=180°

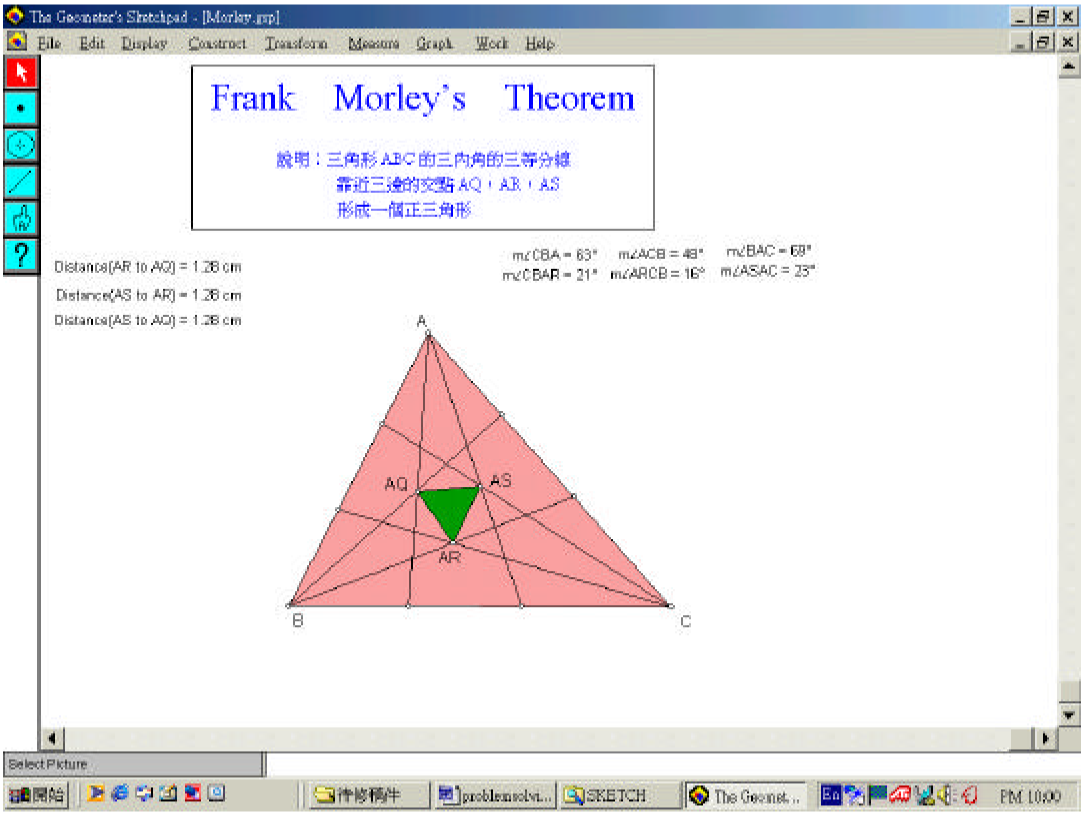
(3)聯想相關的定理：

正弦定理、餘弦定理

(4)計劃解題步驟：

1.Δ D B C中有（A.S.A）的條件，可用正弦定理求得 $\overline{BD}$

【輕按圖形兩下可進入 GS.P 程式】



2. ΔFAB 中有（A.S.A）的條件，可用正弦定理求得 $\overline{BF}$

3. 由 $\overline{BD}$、$\overline{BF}$，ΔFBD 中有（S.A.S）的條件，可用餘弦定理求得 $\overline{FD}$ 用相同的方法，可求得內三角形的另外兩邊 $\overline{DE}$、$\overline{EF}$

(5)著手證明解題：

?DBC 中

$$\frac{a}{\sin(180^\circ-(b+g))}=\frac{\overline{BD}}{\sin g}$$

由換角關係式及 $a+b+g=60^\circ$ 的條件

$$\overline{BD}=\frac{a\sin g}{\sin(b+g)}=\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}$$

(6)找尋相同結構：

同理 $\overline{BF}=\dfrac{c\sin a}{\sin(a+b)}=\dfrac{c\sin a}{\sin(60^\circ-g)}$

$$\overline{AF}=\frac{c\sin b}{\sin(60^\circ-g)}$$

$$\overline{AE}=\frac{b\sin g}{\sin(60^\circ-b)}$$

$$\overline{CE}=\frac{b\sin a}{\sin(60^\circ-b)}$$

$$\overline{CD}=\frac{a\sin b}{\sin(60^\circ-a)}$$

(7)定出證明方向：

由餘弦定理

$$\overline{DF}^2=\overline{BD}^2+\overline{BF}^2-2(\overline{BD})(\overline{BF})\cos b$$

$$\overline{DF}^2=\left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}\right)^2+\left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ-g)}\right)^2-2\left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}\right)\left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ-g)}\right)\cos\beta$$

$$\overline{FE}^2=\left(\frac{c\sin b}{\sin(60^\circ-g)}\right)^2+\left(\frac{b\sin g}{\sin(60^\circ-b)}\right)^2-2\left(\frac{c\sin b}{\sin(60^\circ-g)}\right)\left(\frac{b\sin g}{\sin(60^\circ-b)}\right)\cos\alpha$$

$$\overline{ED}^2=\left(\frac{b\sin a}{\sin(60^\circ-b)}\right)^2+\left(\frac{a\sin b}{\sin(90^\circ-a)}\right)^2-$$
$$2\left(\frac{b\sin a}{\sin(60^\circ-b)}\right)\left(\frac{a\sin b}{\sin(90^\circ-a)}\right)\cos\gamma$$

如果能証明 $\overline{DE}^2=\overline{EF}^2=\overline{FD}^2$ 證明就全部完成。

(8)推測我們要化簡到最後的形式：

觀察上面內三角形的邊長平方，都不是相同的形式，要如何化成相同的形式？要推測這個相同的形式，是什麼樣的式子？是一件非常困難的事。但總是與三邊長 a，b，c，三內角的三分之一度量 α，β，γ 有關。

三邊長 a、b、c 與三內角的三分之一度量 α、β、γ，又是可以用正弦定理，互相轉換的參數。上面內三角形ΔDEF的邊長平方，化簡到最後，必定是個對稱式；是 a、b、c 的對稱式，或者是 α、β、γ 的對稱式，否則三個邊長平方就不會相等。

(9)簡化不必要的參數：

把三邊長 a，b，c 化成 α，β，γ 的三角函數比較方便，至少有一堆三角公式可資利用。

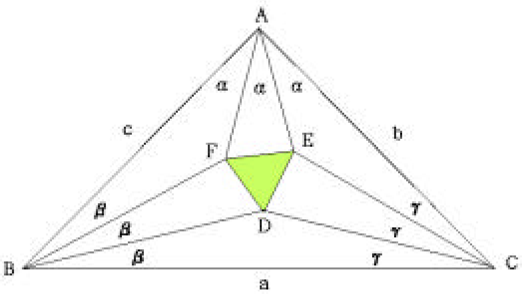
由正弦定理 $\dfrac{a}{\sin 3a}=\dfrac{b}{\sin 3b}=\dfrac{c}{\sin 3g}=2R$，其中 R 是ΔABC的外接圓半徑。

把 a=2Rsin3α，b=2Rsin3β，c=2Rsin3γ 代入上面內三角形的邊長平方，先把 a，b，c 化掉，減少參數的數目。

(10)尋求化簡規則：

$$\overline{DF}^2=\overline{BD}^2+\overline{BF}^2-2(\overline{BD})(\overline{BF})\cos b$$

$$\overline{DF}^2=\left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}\right)^2+\left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ-g)}\right)^2-$$
$$2\left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}\right)\left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ-g)}\right)\cos\beta$$



$\overline{BD}=\dfrac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}$ 要如何化簡 ？

(11)用到特殊的技巧：

$$\overline{BD}=\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}$$
$$=\frac{2R\sin 3a\sin g}{\sin(60^\circ-a)}$$
$$=\frac{2R(3\sin a-4\sin^3 a)\sin g}{\sin(60^\circ-a)}$$
$$=\frac{2R\sin a\sin g\,(3-4\sin^2 a)}{\sin(60^\circ-a)}$$
$$=\frac{2R\sin a\sin g\,[3(\cos^2 a+\sin^2 a)-4\sin^2 a]}{(\sin 60^\circ\cos a-\cos 60^\circ\sin a)}$$

$$=\frac{2R\sin a\sin g(3\cos^2 a-\sin^2 a)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a-\frac{1}{2}\sin a)}$$
$$=\frac{2R\sin a\sin g(4)(\frac{3}{4}\cos^2 a-\frac{1}{4}\sin^2 a)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a-\frac{1}{2}\sin a)}$$
$$=\frac{8R\sin a\sin g(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a+\frac{1}{2}\sin a)(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a-\frac{1}{2}\sin a)}{(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a-\frac{1}{2}\sin a)}$$
$$=8R\sin a\sin g(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos a+\frac{1}{2}\sin a)$$
$$=8R\sin a\sin g(\sin 60^\circ\cos a+\cos 60^\circ\sin a)$$
$$=8R\sin a\sin g\sin(60^\circ+a)$$

同理

$$\overline{BF} = 8R\sin g\ \sin a\ \sin(60^\circ + g)$$

$$\overline{DF}^2 = \left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ - a)}\right)^2 + \left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ - g)}\right)^2 -$$

$$2\left(\frac{a\sin g}{\sin(60^\circ - a)}\right)\left(\frac{c\sin a}{\sin(60^\circ - g)}\right)\cos\beta$$

$$= [8R\sin a\sin g\ \sin(60^\circ + a)]^2$$

$$+ [8R\sin g\ \sin a\ \sin(60^\circ + g)]^2$$

$$-2[8R\sin a\ \sin g\ \sin(60^\circ + a)]$$

$$[8R\sin g\ \sin a\ \sin(60^\circ + g)]\cos b$$

$$= 64R^2\sin^2 a\sin^2 g[\sin^2(60^\circ + a) + \sin^2$$

$$(60^\circ + g) - 2\sin(60^\circ + a)\sin(60^\circ + g)\cos b]$$

對稱式的芻形，已經出現一半，你能預測中括弧內的數據，將化成那一個式子嗎？

(12)猜測結果，朝向目標邁進：

$$[\sin^2(60^\circ + a) + \sin^2(60^\circ + g) -$$

$$2\sin(60^\circ + a)\sin(60^\circ + g)\cos b]$$

$$= \frac{1-\cos(120^\circ + 2a)}{2} + \frac{1-\cos(120^\circ + 2g)}{2}$$

$$+ [\cos(120^\circ + a + g) - \cos(a - g)]\cos b$$

（再度用到解題技巧簡化式子）

$$= 1 - \frac{1}{2}[\cos(120^\circ + 2a) + \cos(120^\circ + 2g)]$$

$$+ [\cos(120^\circ + 60^\circ - b) - \cos(a - g)]\cos b$$

$$= 1 - \cos(120^\circ + a + g)\cos(a - g)$$

$$+ [-\cos b - \cos(a - g)]\cos b$$

$$= 1 - \cos(120^\circ + 60^\circ - b)\cos(a - g)$$

$$-\cos^2 b - \cos(a - g)\cos b$$

$$= 1 + \cos b\cos(a - g) - \cos^2 b - \cos(a - g)\cos b$$

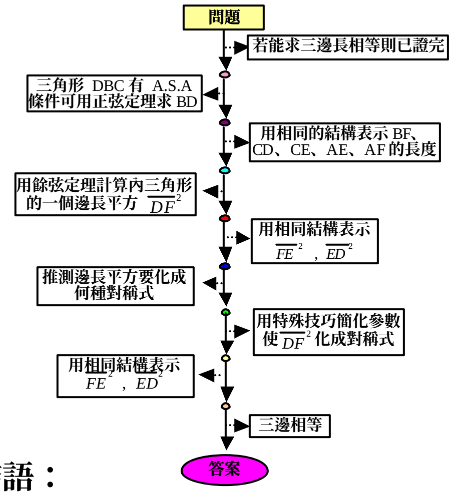
$$= \sin^2 b$$

於是 $\overline{DF}^2 = 64R^2\sin^2 a\ \sin^2 b\ \sin^2 g$ **果然是一個漂亮的對稱式**

同理可証 $\overline{FE}^2 = \overline{ED}^2 = 64R^2\sin^2 a\ \sin^2 b\ \sin^2 g$

整個定理，順利證明完畢！

底下是以「證明三邊等長」為目標的解題路徑分析與概念圖。



結語：

Frank Morley’s**定理的證明，困難在那裏？**

1. **參數多，化簡難**
2. **不知道要朝向那個方向來化簡**
3. **用到兩個獨特的絕妙技巧**
4. **需要找尋化簡的規則**
5. **要有高度的耐心，不厭其煩**

如果能有一個解題路徑分析，來引導我們的學生，相信它的證明，將會變得有跡可循、自然易懂，而不是神來之筆。**由衷的感謝交大應數系吳培元、黃大原老師，花蓮師院袁媛老師的指導。**

參考書籍：

1. **施拱星(民國** 52)。 ***摩黎氏定理*（Morley’s Theorem)，「中華民國科學研習會」發行，「科學研習第二卷第六期單行本」，中華民國** 52 **年** 6 **月。**
2. **國立交通大學應用數學系　吳培元　教授『由幾何分析到數值域研究』講義**
3. George Polya(1957)。***怎樣解題*，閻育蘇譯，張公緒校，九章出版社，台北。**
4. http://www.hawaii.edu/suremath/solutionPaths.html
5. http://standards.nctm.org/document/chapter7/prob.htm