

中學生通訊解題第廿二期題目參考解答與評析

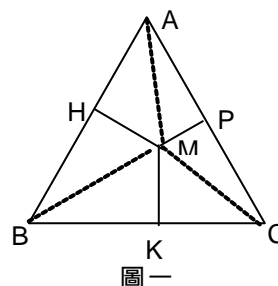
臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912201

從正三角形 ABC 內部一點 M 向三邊做垂線 MH, MK, MP, 垂足為 H, K, P, 請證明：

$$(1) AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2$$

$$(2) AH + BK + CP = HB + KC + PA$$



參考解答一：

$$\begin{aligned} (1) & AH^2 + BK^2 + CP^2 \\ &= (AM^2 - HM^2) + (BM^2 - KM^2) + (CM^2 - MP^2) \\ &= (AM^2 - MP^2) + (BM^2 - HM^2) + (CM^2 - KM^2) \\ &= BH^2 + AP^2 + CK^2 \\ &\Rightarrow AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2 \end{aligned}$$

(2) 由(1)可知

$$\begin{aligned} (AH^2 - BH^2) + (BK^2 - CK^2) + (CP^2 - PA^2) &= 0 \\ \Rightarrow AB(AH - BH) + BC(BK - CK) + AC(CP - PA) &= 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

此為一正三角形， $AB = BC = AC$

$$\begin{aligned} AB(AH - BH) + BC(BK - CK) + AC(CP - PA) \\ = AB[(AH - BH) + (BK - CK) + (CP - PA)] = 0 \\ AB \cdot 0 \end{aligned}$$

$$(AH - BH) + (BK - CK) + (CP - PA) = 0$$

$$\text{即 } AH + BK + CP = HB + KC + PA$$

參考解答二：

(1) 連接 AM、BM、CM，如圖一

$$\text{依畢氏定理 } \Rightarrow AH^2 = AM^2 - HM^2,$$

$$BK^2 = BM^2 - KM^2, CP^2 = CM^2 - PM^2$$

$$\text{同理 } \Rightarrow HB^2 = BM^2 - HM^2,$$

$$KC^2 = CM^2 - MK^2, PA^2 = AM^2 - PM^2$$

$$AH^2 + BK^2 + CP^2$$

$$= AM^2 + BM^2 + CM^2 - HM^2 - KM^2 - PM^2$$

$$HB^2 + KC^2 + PA^2$$

$$= BM^2 + CM^2 + AM^2 - HM^2 - MK^2 - PM^2$$

$$\Rightarrow AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2$$

(2) 設此正三角形的邊長為 x

$$AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2$$

$$AH^2 + BK^2 + CP^2$$

$$= (x - AH)^2 + (x - BK)^2 + (x - PC)^2$$

$$= 3x^2 + AH^2 + BK^2 + PC^2 - 2x(AH + BK + PC)$$

$$\Rightarrow 3x^2 = 2x(AH + BK + PC)$$

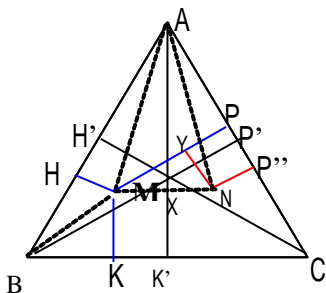
$$\Rightarrow 3x = 2(AH + BK + PC)$$

3x 恰為此正三角形的周長

$$3x = AH + BK + PC + BH + CK + PA$$

$$= 2(AH + BK + PC)$$

$$AH+BK+CP=HB+KC+PA$$



圖二

參考解答三：

(1)由畢氏定理知

$$AM^2 = AH^2 + MH^2 = PA^2 + MP^2 \quad \text{-----} \textcircled{1}$$

$$BM^2 = BK^2 + MK^2 = HB^2 + MH^2 \quad \text{-----} \textcircled{2}$$

$$CM^2 = CP^2 + MP^2 = KC^2 + MK^2 \quad \text{-----} \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1}+\textcircled{2}+\textcircled{3}$$

$$\Rightarrow AH^2 + MH^2 + BK^2 + MK^2 + CP^2 + MP^2 = PA^2 + MP^2 + HB^2 + MH^2 + KC^2 + MK^2$$

$$\Rightarrow AH^2 + BK^2 + CP^2 = HB^2 + KC^2 + PA^2$$

(2)從正三角形 ABC 三頂點向三對邊作中垂線

AK', BP', CH' 且 K', P', H' 各為三邊中點，

如圖二

$$AH + BK + CP$$

$$= AH' + H'H + BK' + K'K + CP' + P'P$$

$$= AH' + BK' + CP' + (H'H + P'P + K'K)$$

AH' + BK' + CP' 為周長的一半，由 M

點作 BC 之平行線 MN，交中垂線 AK' 於 X 點，且 MX = XN，由 N 點作 AC 邊的垂線 NP'' 交 AC 於 P'' 點，由 N 點作 MP 之垂線 NY 交 MP 於 Y 點。

$$\Rightarrow \triangle AXM \cong \triangle AXN, \triangle AMH \cong \triangle ANP'',$$

$$AH = AP''$$

$$AP' = AH',$$

$$HH' = P'P'', \quad PP' = PP' + P'P'' = PP' + HH',$$

$$MP \parallel NP'', \quad NY \parallel AC \Rightarrow YN = PP''$$

MP // BP', MN // BC, MYN 為直角三角形

$$\angle NMY = \angle CBP' = 30^\circ,$$

$$YN = \frac{1}{2} MN = MX, \quad PP' = MX$$

MK // AK', MN // BC,

$$\Rightarrow MX = KK', \quad KK' = PP'' = PP' + HH'$$

$$PP' + HH' + KK' = 0, \quad \text{即}$$

$$AH + BK + CP = HB + KC + PA$$

解題重點：

運用代換方法來接近目標，在關於垂直的主題上，畢氏定理也是常可聯想到的方式。另外可試試解析法。

評析：

本題徵答人數共有 70 人，其中全對者共 53 人，如徵答情形所列，因人數過多，不再詳述。平均得分為 5.76 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有敦化國中曾偉綸同

學、海山國中江俊緯同學、銘傳國中楊昀達同學、銘傳國中林昱航同學等。

問題編號
912202

正八面體之各面中點連成一多面體 Ω_1 ，此多面體之各面中點連成一多面體 Ω_2 ，求 Ω_2 之內切球。

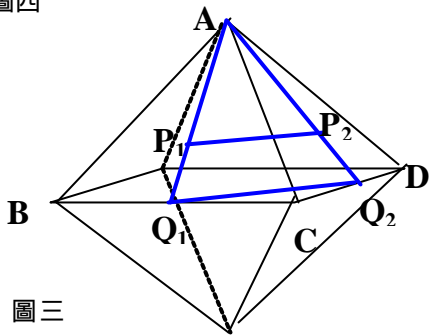
參考解答：

設此八面體各邊長為 a ，如圖三 Q_1Q_2 分別為 BC 邊及 CD 邊的中點， P_1P_2 分別為 ABC 及 ACD 的重心， Q_1Q_2C 為一等腰直角三角形，

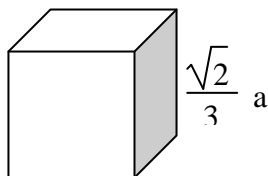
$$\Rightarrow Q_1Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} a \quad \Rightarrow P_1P_2 = \frac{2}{3} Q_1Q_2 = \frac{\sqrt{2}}{3} a$$

\Rightarrow 多面體 Ω_1 是一邊長為 $\frac{\sqrt{2}}{3} a$ 的正立方體，如

圖四



圖三



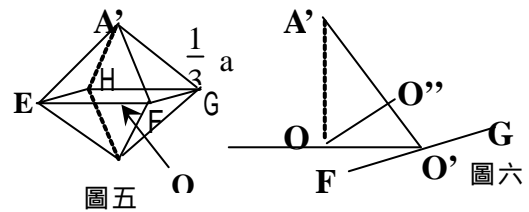
圖四

\Rightarrow 多面體 Ω_2 是一邊長為 $\frac{1}{3} a$ 的正八面體，如

圖五

\Rightarrow 所以欲求之內切球的球心在 $EFGH$ 平面的中心 O 上，此內切球的半徑為中心 O 到各面的垂直距離，如圖六 O' 為 FG 的中點，且 OO'' 與 $A'O'$ 互相垂直，從 $A'FO'$ 中去求 OO'' ，即為欲求之內切球半徑，半徑

$$\text{為 } \frac{\sqrt{6}}{18} a$$



圖五

圖六

解題重點：

將圖形正確地描繪出並考慮圖形(邊長)的改變，最重要的是要有空間圖形的觀念及對正多面體結構的了解，有興趣的同學可以參考高中教材第三冊第二章會多多少少有些幫助。

評析：

本題徵答人數共有 3 人，其中全對者共 0 人，本題平均得分為 1.67 分。

問題編號
912203

已知 W_1, W_2, W_3 都是整數且 $W_1 > W_2 > W_3$ 。

今有重量各為 W_1, W_2, W_3 單位之 A、B、C 三種金幣各 N 個，分贈甲、乙、丙三人，

每人 N 個。若甲、乙都有拿到 A；乙、丙都有拿到 B，甲、丙都有拿到 C，且甲、乙、丙所得的金幣總重各為 82、35、21 單位，求 N 之值，並問 A、B、C 三種金幣之重各是多少？

參考解答

設甲、乙、丙三人所拿到的金幣如下表所列：

	甲	乙	丙	總個數	重量
金幣 A	X_1W_1	X_2W_1	X_3W_1	N	NW_1
金幣 B	Y_1W_2	Y_2W_2	Y_3W_2	N	NW_2
金幣 C	Z_1W_3	Z_2W_3	Z_3W_3	N	NW_3
共重	82	35	21		138

$\Rightarrow N(W_1+W_2+W_3)=138$ ， $N \geq 2$ (因為至少要有兩人拿到同一種金幣)

$\Rightarrow N=2, 3, 6, 23, 46, 69, 138$

將可能的情形整理如下：

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦
N	2	3	6	23	46	69	138
$W_1+W_2+W_3$	69	46	23	6	3	2	1

W_1, W_2, W_3 都為整數，且 $W_1 > W_2 > W_3$

$W_1+W_2+W_3 \geq 6 \Rightarrow$ ⑤⑥⑦ 不合

① $N=2, W_1+W_2+W_3=69$

$N=2$ ，甲拿到 W_1 及 $W_3 \Rightarrow W_1+W_3=82$

② $N=3, W_1+W_2+W_3=46$

由甲所得金幣來觀察：

若 $X_1=1, Y_1=1, Z_1=1$ ，則 $W_1+W_2+W_3=82$

若 $X_1=2, Y_1=1, Z_1=1$ ，則 $2W_1+W_2+W_3=82 \Rightarrow$

$W_1=36$ 但由乙來觀察 $\Rightarrow 36 > 35$

若 $X_1=1, Y_1=0, Z_1=1$ ，則 $W_1+W_3=82$

若 $X_1=2, Y_1=0, Z_1=1$ ，則 $2W_1+W_3=82$

$\Rightarrow W_1 - W_2=36, W_2=4, W_3=2, W_1=40$

但由乙來觀察 $\Rightarrow 40 > 35$

若 $X_1=1, Y_1=1, Z_1=2$ ，則 $W_1+W_2+2W_3=82 \Rightarrow$

$W_3=36$ 由丙來觀察 $\Rightarrow 36 > 21$

若 $X_1=2, Y_1=1, Z_1=2$ ，則 $2W_1+W_2+2W_3=82$

$\Rightarrow W_1+W_3=36, W_2=10, 9 - W_3 - 1$

$\Rightarrow 35 - W_1 - 27$ ，由丙所得金幣來觀察

$\Rightarrow 19 < 21$

若 $X_1=1, Y_1=0, Z_1=2$ ，則 $W_1+2W_3=82$

$\Rightarrow W_3 - W_2=36 (W_2 > W_3)$

若 $X_1=2, Y_1=0, Z_1=2$ ，則 $2W_1+2W_3=82$

$\Rightarrow W_1+W_3=41, W_2=5, 4 - W_3 - 1$

$\Rightarrow 40 - W_1 - 37$ ，由乙所得金幣來觀察

$\Rightarrow 37 > 35$

③ $N=6, W_1+W_2+W_3=23$

(W_1, W_2, W_3) 的情形共有下列幾種：

$(20, 2, 1), (19, 3, 1), (18, 4, 1), (18, 3, 2), (17, 5, 1),$

$(17, 4, 2), (16, 6, 1), (16, 5, 2), (16, 4, 3), (15, 7, 1),$

$(15, 6, 2), (15, 5, 3), (14, 8, 1), (14, 7, 2), (14, 6, 3),$

$(14, 5, 4), (13, 9, 1), (13, 8, 2), (13, 7, 3), (13, 6, 4),$

$(12, 10, 1), (12, 9, 2), (12, 8, 3), (12, 7, 4), (12, 6, 5),$

$(11, 10, 2), (11, 9, 3), (11, 8, 4), (11, 7, 5), (10, 9, 4),$

$(10, 8, 5), (10, 7, 6), (9, 8, 6)$

同理可驗證出 $(16, 5, 2)$ 為唯一符合的情形，此時甲得 5A1C、乙得 1A3B2C、丙得

3B3C。

④ $N=23, W_1+W_2+W_3=6$

$W_1+W_2+W_3=6$ 且 $W_1>W_2>W_3$

$W_1=3, W_2=2, W_3=1$

由金幣 A 可得 $3(X_1+X_2+X_3)=23,$

且 $(X_1+X_2+X_3)$ 為整數

由以上的討論中可得出： $N=6,$

$(W_1, W_2, W_3)=(16, 5, 2)$

解題重點：

先找出重量與個數間的關係，再分析情況來作討論。

評析：

本題徵答人數共有 7 人，其中全對者共 2 人，包含敦化國中曾偉綸；海山國中江俊緯等同學。本題平均得分為 3.86 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有海山國中江俊緯同學。

問題編號 912204

$X_1, X_2, X_3, X_{n-1}, X_n$ 均為 -1 或 0 或 1 或 2, n 為正整數，且滿足下列兩個等式：

$X_1+X_2+X_3+ \dots +X_{n-2}+X_{n-1}+X_n=91$

$X_1^2+X_2^2+X_3^2+ \dots +X_{n-2}^2+X_{n-1}^2+X_n^2=2002$

求 $X_1^3+X_2^3+ \dots +X_{n-1}^3+X_n^3$ 之最大值、最小值。

(1)若無解，請說明原因；若有解，請求出其

最大值與最小值。

(2)若將題目改成

$X_1+X_2+X_3+ \dots +X_{n-2}+X_{n-1}+X_n=92,$ 是否有

解？若無解，請說明原因；若有解，請求出其最大值與最小值。

參考解答：

(1)設有 A 個 -1, B 個 0, C 個 1, D 個 2, ABCD

皆為自然數或零

欲求 $X_1^3+X_2^3+ \dots +X_{n-1}^3+X_n^3=8D+C-A$ 的最大值與最小值

$\Rightarrow 2D+C-A=91, 4D+C+A=2002$

$\Rightarrow 6D+2C=2093 \Rightarrow 3D+C = \frac{2093}{2}$

$\Rightarrow CD$ 為自然數或零，無解

也可從整數的奇偶性來觀察， X 與 X^2 要同奇偶，無解

(2)由(1)可得 $2D+C-A=92, 4D+C+A=2002$

$\Rightarrow 6D+2C=2093 \Rightarrow 3D+C=1047$

$\Rightarrow D=349 - \frac{C}{3},$ 且 CD 皆為自然數或零

$2^3>1^3,$ 有愈多的 2 則可以使 $X_1^3+X_2^3+ \dots +X_{n-1}^3+X_n^3$ 的值愈大

\Rightarrow 取 $C=0, D=349, A=606$

$8D+C-A=2792+0-606=2186$ _____ 最大值

同理，愈少的 2 則可以使 $X_1^3+X_2^3+ \dots +X_{n-1}^3+X_n^3$ 的值愈小

\Rightarrow 取 $D=0, C-A=92, C+A=2002, C=1047,$

$A=955, C-A=92$ _____ 最小值

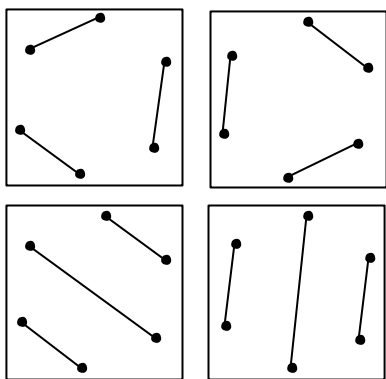
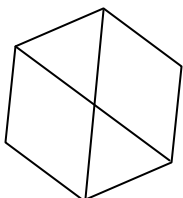
解題重點：

強調奇偶性的重要以及分析的能力。

評析：

本題徵答人數共有 15 人，其中全對者共 4 人，為福和國中林育任、周宣宇；敦化國中曾偉綸；銘傳國中楊昫達等同學。本題平均得分為 3.60 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有福和國中林育任同學、福和國中周宣宇同學；敦化國中曾偉綸同學；銘傳國中楊昫達同學等。

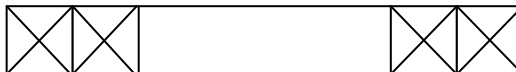
問題編號
912205



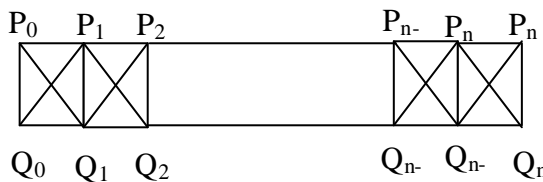
一個偶數個頂點的圖上的完美配對是指將這些頂點兩個成一組，且同組的兩個點有邊直接相連。下例上圖(有六個頂點，注意中

間對角線的交點不算頂點)的完美配對有四個，配對法分別如左以實線表示。

試問下圖有幾個完美配對？(一共有 n 個正方形並列，對角線的交點不算頂點)



參考解答：



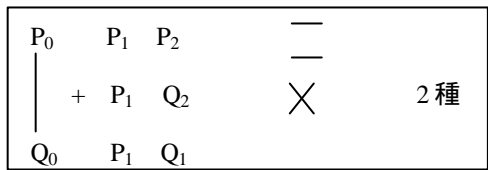
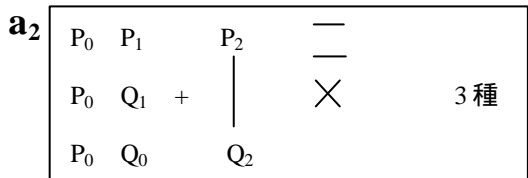
圖七

設 n 個正方形有 a_n 種完美配對

$a_1 : P_0 \quad P_1$

$P_0 \quad Q_1 \quad \times \quad \longrightarrow \quad$ 共 3 種

$P_0 \quad Q_0$



\longrightarrow 共 5 種

a_n ：考慮左上角的頂點 P_0 可與 P_1, Q_0, Q_1 相連：

1. 若 P_0 與 P_1 相連，則 Q_0 只能與 Q_1 相連，其餘頂點有 a_{n-2} 種連法。
2. 若 P_0 與 Q_0 相連，其餘頂點有 a_{n-1} 種連法。

3. 若 P_0 與 Q_1 相連，則 Q_0 只能與 P_1 相連，

其餘頂點有 a_{n-2} 種連法。

故 $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ ，其中 $a_1 = 3$ ， $a_2 = 5$

設 a_n 可表示為 $s \cdot x_1^n + t \cdot x_2^n$ ，則

$$x^2 = x + 2 \quad x^2 - x - 2 = 0 \quad (x+1)(x-2) = 0 \quad x = -1, 2$$

$$s(2)^1 + t(-1)^1 = 3$$

$$s(2)^2 + t(-1)^2 = 5$$

$$s = \frac{4}{3}, \quad t = \frac{1}{3}$$

$$a_n = \frac{4}{3} (2)^n + \frac{1}{3} (-1)^n$$

解題重點：

看出遞迴的關係，有興趣者可參考與遞迴相關的資料。

評析：

本題徵答人數共有 5 人，其中全對者共 2 人，包含江翠國中莊智涵；光華國中范祐維等同學。本題平均得分為 3.80 分。

中學生通訊解題第二十二期徵答情形

區 域	學 校	姓 名	年 級	指 導 老 師	912201	912202	912203	912204	912205	總 分
台北市	民生國中	曾懷德	2	王士美	0	0	X	X	X	0
	民生國中	金英詰	2	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	顏經豪	2	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	謝天林	2	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	李茂霖	2	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	盧佑樺	2	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	江肖樊	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	劉宜杰	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	鄭禮衛	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	陳怡潔	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	游雅婷	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	朱天羽	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	林軒毅	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	陳韻竹	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	曾維怡	3	王士美	7	X	X	X	X	7
	民生國中	余敏嘉	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	詹易達	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	蔡宜臻	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	黃天劭	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7

	民生國中	張育唐	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	嚴家弘	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	蔡日昇	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	何昶毅	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	洪巨屏	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	馮熾臻	3	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	王又淳	3	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	余岳勳	3	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	葉品萱	3	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	陳奕修	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	吳季衡	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	林健智	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	民生國中	施延興	2	程麗娟	7	X	X	X	X	7
	敦化國中	曾偉綸	2	桂雪萍	7	X	7	7	X	21
	敦化國中	葉明仁	1	李美惠	X	0	X	X	X	0
	金華國中	謝宜庭	3		7	X	X	X	X	7
	金華國中	謝博丞			3	X	2	X	X	5
台北縣	江翠國中	黃豪平	2	陳彩鳳	7	X	X	2	X	9
	江翠國中	李孟翰	2	陳彩鳳	7	X	X	2	X	9
	江翠國中	陳建宏	2	陳彩鳳	6	X	X	X	X	6
台北縣	江翠國中	陳建彰	2	陳彩鳳	7	X	5	X	X	12
	江翠國中	簡志達	2	陳彩鳳	7	X	X	X	X	7
	江翠國中	丁 羚	2	陳彩鳳	3	X	X	2	X	5
	江翠國中	呂亞軒	2	陳彩鳳	0	X	X	X	X	0
	江翠國中	黃詩純	2	陳彩鳳	7	X	X	2	X	9
	江翠國中	黃子誠	2	陳彩鳳	7	X	6	X	5	18
	江翠國中	吳宗儒	2	陳彩鳳	7	X	X	X	X	7
	江翠國中	張 寧	2	陳彩鳳	7	X	X	X	X	7
	江翠國中	莊智涵	3	吳明標	X	5	X	X	7	12
	海山國中	江俊緯	1	唐家琴	7	X	7	2	X	16
	福和國中	林育任	3	鄭鈞鋒、 陳明貴	3	X	X	7	X	10
	福和國中	沈彥汝	3	鄭鈞鋒、 陳明貴	X	X	X	2	X	2
	福和國中	林佑蓉	2	鄭鈞鋒、 蕭素玲	3	X	X	5	X	8

中學生通訊解題第廿二期題目參考解答與評析

	福和國中	林佑蒔	2	鄭鈞鋒、 蕭素玲	3	X	X	5	X	8
	福和國中	周宣宇	3	鄭鈞鋒	3	X	X	7	X	10
	福和國中	彭瑋翔	3	鄭鈞鋒	7	X	X	X	X	7
	福和國中	劉軒志	3	鄭鈞鋒	7	X	X	2	X	9
	福和國中	張引碩	3	鄭鈞鋒	7	X	X	X	X	7
	新莊國中	劉彥伶	2	林正吉	7	X	X	X	X	7
	積穗國中	蕭屹宏	1	林秀美	7	X	X	X	X	7
	時雨國中	簡孝竝	3		3	X	X	X	X	3
基隆市	銘傳國中	楊昀達	1	張麗珠	7	X	X	7	X	14
	銘傳國中	陳逸菁	2	宋佩玉	X	X	0	X	X	0
	銘傳國中	張凱翔	2	宋佩玉	X	X	X	0	X	0
	銘傳國中	程奕翔	1	宋佩玉	X	X	X	X	0	0
	銘傳國中	陳威東	1	宋佩玉	X	X	X	X	0	0
	銘傳國中	林昱航	3	宋佩玉	7	X	X	X	X	7
	銘傳國中	黃品澈	1	宋佩玉	0	X	X	X	X	0
	銘傳國中	張瓊文	1	宋佩玉	7	X	X	X	X	7
	銘傳國中	張任鋒	1	宋佩玉	0	X	X	X	X	0
	銘傳國中	安真漢	1	宋佩玉	0	X	X	X	X	0
	銘傳國中	朱哲成	2	宋佩玉	0	X	X	X	X	0
	銘傳國中	張凱翔	2	宋佩玉	2	X	X	X	X	2
	銘傳國中	許宇函	1	宋佩玉	3	X	X	X	X	3
	銘傳國中	許閔翔	1	宋佩玉	0	X	X	X	X	0
	銘傳國中	黃冠霖	1	宋佩玉	7	X	X	X	X	7
	銘傳國中	鄭宇宏	2	劉鄭文德	7	X	X	X	X	7
	銘傳國中	林弘恩	2	劉鄭文德	7	X	X	X	X	7
新竹市	光華國中	范祐維	1	高東獻	X	X	0	2	7	9
	答題人數				70	3	7	15	5	
	全對人數				53	0	2	4	2	
	平均分				5.76	1.67	3.86	3.60	3.80	

提醒徵答同學們：務必以一題一張(或多張)來作答，切勿多題一張，以使我們作業能更順暢，謝謝！