數學解題中「正與反」的途徑

許建銘

高雄市立龍華國民中學

前言：

問題：一個玻璃瓶(如圖 1-1)的瓶身上有度量刻度，但是刻度並沒有到達瓶口，想量出瓶子的容積，只要在瓶內裝入一些水，再蓋緊瓶口就可以了。這到底是怎麼一回事？

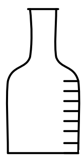


圖 1-1

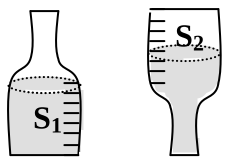


圖 1-2

解答：先在瓶裡倒入些水，而且水量超過瓶子容積的一半，但又不超過刻度，然後蓋緊瓶口。再將瓶子正立著量出水量 S_1，然後把瓶反置，量出沒有水的部份的容積 S_2，則 S_1+S_2 就等於這個瓶子的容積(如圖 1-2)。

問題：有點數 1 點至 13 點的 13 張紙牌，正面朝上堆成一疊，並持於手上。然後把最上面一張(第 1 張)移到整疊牌最下面，再將最上面一張(第 2 張)推出放在桌上；最上面一張(第 3 張)移到整疊牌最下面，最上面一張(第 4 張)推出放桌上……如此操作方式一直持續到 13 張紙牌全數置於桌上為止。如果要使推出的紙牌依點數 1 至 13，由小到大陸續出現在桌上，問原先手上的 13 張牌，該如何預先安排其次序？

解答：將點數 1 至 13 點的 13 張紙牌正面朝上，依點數由小到大，由上而下疊好，並持於一隻手上。然後依題意之操作方式：「取最上面一張置牌底，再取最上面一張置桌上。」將手上 13 張牌一一推出後排列於桌上，此時就可輕易見到先後出現的紙牌點數為 2、4、6、8、10、12、1、5、9、13、7、3、11。此次序換個角度來說，也就是如果要讓點數 1 的紙牌最先被推出，就應將點數 1 的紙牌，安置於整疊牌的第 2 張的位置；而接下來要推出的點數 2 的紙牌，應安置於整疊牌的第 4 張的位置……所以原先整疊牌的點數安排，由上而下應為 7、1、12、2、8、3、11、4、9、5、13、6、10。

另解：像錄影帶倒帶那樣倒排就行。先將點數由大到小，由上而下排好成一疊(如同推出置於桌上的牌)。從整疊牌中，將點數 13 的紙牌取過來放在手裡，再把點數 12 的紙牌取過來放在點數 13 的紙牌上面，然後把 13 移到 12 上面。把點數 11 的紙牌取過來放在手上紙牌的最上面，並將最下面那 1 張牌(點數 12)移到最上面來。把 10 取過來放在最上面，再把最下面的 1 張移到最上面來。以此類推，把 13 張紙牌都移好就行(如圖 1-3)。

以上兩個例子，或許是不少讀者在一些數學相關書籍中，常見到的問題。筆者將它們同時呈現，是因為它們的解法中，都牽連到「反」的思考途徑。或許有讀者這麼一聽，會立刻聯想到：「老師理該教導學生走正途，

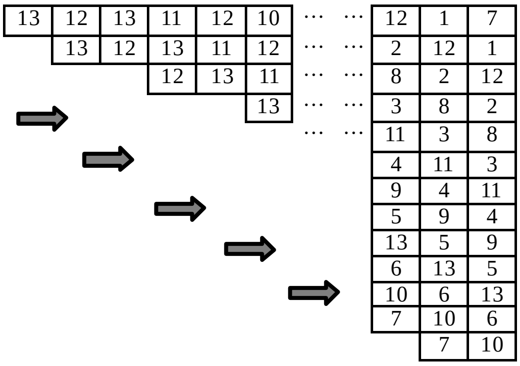


圖 1-3

你怎會鼓動他們走『反』途！」其實，這裡所稱：「反」的思考，本無關「做人道理」，而是其思考方式和途徑與一般解決問題執意採取正視面向的解程「反其道而行」而已，果真要與為人處事相提並論，這種思維觀點的某部分還很像中國古人講的「反躬自省」，也就是從結果推想事情，期使事相更透徹明白的思考方式，所以也該是正人君子之所為。

譬如說：數學證明常用的「分析法」與間接證題法中的「反證法」，以及數學解題中常用的「逆推」(或「反推」)，都可以說是這種反向或反面觀點下的自然產物。我們可以說：「反」的思考是一個人自啟蒙以來，思考模式上的重大進展，於是一個人的思想會因此跟著逐漸成熟。例如一個人第一次能夠從較遠而陌生的路途，依循印象回到原出發點；小孩子會開始反思到這件事情：「為什麼我想跟他們玩，但是他們都不找我玩？」或者用口語表達出想法：「阿傑喜歡小花，但反過來看，小花好像不怎麼喜歡阿傑。」

此外，生活中也屢見不鮮道理更為深刻的實例：一個老闆硬要讓一名員工離職，於是將兩張都寫「去」字的紙條丟進盒子，然後騙這個員工說：「如果你抽到了『留』字，就可繼續做；如果抽到『去』字，就要立刻辦離職！」員工在抽紙條時，識破老闆詭計，於是抽起其中一張紙條就隨手撕爛，然後對他的老闆說：「只要看盒內的紙條寫了什麼字，不就可以知道被撕爛的紙條是寫『去』還是『留』嗎？」

由此更加確定：「反」不只不是指「反對」，而且還可能完全「肯定」，是以「造『反』有理」來論證一件事實的另一途徑。

那麼如何培養中學生具有「正與反」的獨立與聯合運思的解題能力，進而提昇他們慎思明辯的寬宏觀點與應對能力呢？當然除了一般基礎邏輯知識的教學外，適時讓國中階段的學生了解「正與反」雙向、多重途徑的解題模式，也是當前倡導更「生活化」數學教育之際，值得教師重視的課題。

以下就以筆者在國中任教所接觸到的幾個數學問題，從「正」與「反」的不同角度作解析，希望藉此讓讀者更加體會上述文字的意涵。而且讀者從這些解題中不難發現：部分問題的解題途徑上，往往也蘊含更多「正」與「反」融合與深入的思考，而且正如「煎土司」的道理一樣，有著百樣千變的組合型式(如圖 1-4)。

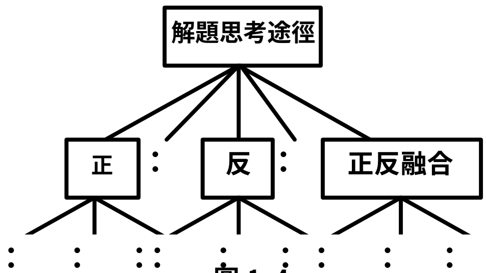


圖 1-4

二、本文：

問題(一)：

來自 $k(1<k<13)$所國中的 13 個學生，他們圍著圓桌坐在一起。桌上現在有一副 52 張的撲克牌，每位學生從中任抽一張(這是每個人第一次拿牌)，老師仔細看過學生拿的牌後，發現花色是黑桃的張數正好等於 k。如果老師要每位學生同時依逆時針方向，將手上的持牌一張一張遞給他右手邊的學生，直到每位學生都拿過 13 次(支)牌。請證明：在 13 次持遞牌的過程中，必有某次有來自同一所國中的兩名學生，手上拿到了黑桃的牌。

證明：

假設來自某國中的學生有 $x\ (x>1)$ 人 $\Rightarrow kx\neq 13$

(1)假如 $kx>13$，就表示在 13 次的換牌中，這 x 個學生拿到黑桃的總次數超過 13，依照迪里赫萊(Dirichlet)原則(抽屜原則)，他們必有一次拿到兩張(以上)黑桃的牌。

(2)假如 $kx<13$，就表示在 13 次的換牌中，至少有一次這 x 個學生都沒有拿到黑桃的牌。但相反的，此時這 k 張黑桃的牌，必落在另外 k-1 所國中的學生手上，依照抽屜原則，必有某一所國中的學生拿到兩張黑桃的牌。

由(1)及(2)，此題得證。

反證：

讓我們討論每次每所學校拿到黑桃的牌都不超過 1 張的情形：

(1)若 13 次中有某校在某次拿到 0 張黑桃的牌，則此次 k 所學校所拿到的黑桃張數必小於 k，則與事實矛盾。

(2)若每校每次都拿到 1 張黑桃的牌，則在 13 次的持遞牌中，每校共拿到黑桃的總次數皆 13 次。而此時來最多學生(設有 y 人，而 y>1)的學校，學生共拿了 ky 次黑桃的牌，但 $ky\neq 13$，所以這個假設也不對。

由(1)及(2)，此題得證。

問題(二)：

10 個足球隊進行單循環比賽，試證：在賽程的任何時候，至少有兩個隊是賽完相同的場數。

證明：

假設賽程中的某一時候有一個隊已賽完 9 場，那麼這 10 個隊中每隊的的已賽場數只能是 1，2，3 …… 8，9，依據抽屜原則，至少有兩個隊的已賽場數是相同的。

而如果賽程的某一時刻，沒有任何一隊賽完 9 場，那麼這 10 個隊的已賽場數只能是 0，1，2，3 …… 7，8，依據抽屜原則，至少有兩個隊的已賽場數是相同的。

反證：

假設賽程中的某個時候，每個隊的已賽場數都不同，那麼 10 個隊的賽完場數會有 0，1，2，……，8，9 共 10 種情形。但此時，已賽 9 場的隊必與每個隊都比賽過，所以不可能有已賽場數是 0 的，所以假設不成立。

問題(三)：

某球隊的隊長在一場球賽之後，準備將他的獎金依次按照下述的方法分給他的隊友：第一個隊友分 100 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；第二個隊友分 200 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；第三個

隊友分 300 元和所剩獎金的 $\frac{1}{10}$；……；依次類推，最後發現獎金正好分完，而且每個隊友又分得一樣多錢，那麼隊長共有幾個隊友(隊長不算在內)？又每個隊友分得多少元？

解【1】：假設全部的獎金有 x 元

第一個隊友分得

$$100+\frac{1}{10}(x-100)=90+\frac{1}{10}x\ (\text{元})$$

第二個隊友分得

$$200+\frac{1}{10}[x-(90+\frac{1}{10}x)-200]=171+\frac{9}{100}x$$

(元)

$$90+\frac{1}{10}x=171+\frac{9}{100}x$$

$$\Rightarrow 9000+10x=17100+9x$$

$$\Rightarrow x=8100$$

每一個隊友分得 $90+\frac{1}{10}\times 8100=900$ (元)

因為 $8100\div 900=9$，所以隊長共有 9 個隊友。

解【2】：假設最後一位隊友分得獎金 y 元

倒數第二個隊友分得的獎金為 $(y-100)$元＋所剩獎金的 $\frac{1}{10}$，而此算式可知：所剩獎金的 $\frac{1}{10}$ 就是 100 元，因此得知所剩獎金為 1000 元。而最後一位隊友就是分得

$1000-100=900$ 元，由獎金的分法反推可知：隊長的隊友恰有 9 人。

問題(四)：

有個表演廣場共有 25 排座位，依次每一排比前一排多 2 個座位，已知最後一排有 80 個座位，那麼這個表演廣場共有多少個座位？

解【1】：將第一排座位數當成等差級數的首項

所以 $n=25$ ，$d=2$，$a_n=80$

由 $a_n=a_1+(n-1)d$ 推得

$$80=a_1+(25-1)\times 2 \quad \therefore a_1=32$$

$$S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=\frac{25(32+80)}{2}=1400$$

所以共有 1400 個座位。

解【2】：將最後一排座位數當成等差級數的首項

所以 $n=25$，$d=-2$，$a_1=80$

$$S_n=\frac{25[2\times 80+24\times(-2)]}{2}=\frac{25\times 112}{2}=1400$$

所以共有 1400 個座位。

問題(五)：

自一群男女之中，女走了 15 名時，則餘下來的男女比例為 2 比 1，在此之後，男走了 45 名，則男女的比例為 1 比 5。問最初的女人數是多少？

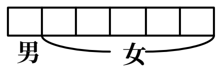
解【1】：設最初女人數為 x，依題意知男人數為 $2(x-15)$

$$\therefore \frac{2(x-15)-45}{x-15}=\frac{1}{5} \quad \Rightarrow 5[2(x-15)-45]=x-15$$

$$\Rightarrow 10x-150-225=x-15 \Rightarrow 9x=360$$

$$\therefore x=40$$

解【2】：最後的男女比例為 1 比 5(如下圖)

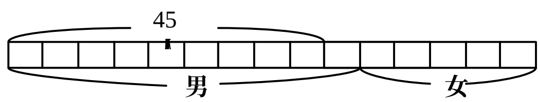


若 45 名男生回來，則男：女=2：1(如下圖)

由上面兩個圖中可推得 □

$=45\div 9=5$ (人)

∴最初的女人數 $=5\times 5+15=40$ (人)



問題(六)：

有一堆梨子，甲取全部的一半多一個，乙取剩下的一半多一個，丙再取剩下的一半

多一個，丁又取剩下的一半多一個，而且這四個人剛好將全部的梨子取完。

問原來總共有多少個梨子？

解【1】：假設原有梨子 x 個

甲取 $(\frac{1}{2}x+1)$ 個；乙取

$\frac{1}{2}[x-(\frac{1}{2}x+1)]+1=(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})$ 個

丙取

$\frac{1}{2}[x-(\frac{1}{2}x+1)-(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})]+1=(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4})$

個；丁取 $(\frac{1}{16}x+\frac{1}{8})$ 個

由

$(\frac{1}{2}x+1)+(\frac{1}{4}x+\frac{1}{2})+(\frac{1}{8}x+\frac{1}{4})+(\frac{1}{16}x+\frac{1}{8})=x$

$\Rightarrow \frac{1}{16}x=\frac{15}{8}$　　$\therefore x=30$　所以原有梨子 30 個。

解【2】：由丁取剩下的一半多一個後，梨子剛好取完，可反推得知，丁未取梨子之時，所剩梨子數應有 $2\times(0+1)=2$ 個。同理得知丙未取梨子之時，所剩梨子數有 $2\times(2+1)=6$ 個；乙未取梨子之時，所剩梨子數有 $2\times(6+1)=14$ 個；甲未取梨子之時，所剩梨子數有 $2\times(14+1)=30$ 個。所以原有的梨子數為 30 個。

問題(七)：

解 $\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-3)-3]-3\right\}-3=0$

解【1】：利用移項法則與等量乘法：

$\frac{1}{2}[\frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-3)-3]-3=6$

$\Rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x-3)-3=18 \Rightarrow \frac{1}{2}x-3=42$

$\Rightarrow x=90$

解【2】：將「方程思想」擬想成實際問題，運用「正反融合」的思考解題也頗有趣：有四個人取物，第一人取全部的一半少 3 個，第二人取第一人的一半少 3 個，第三人取第二人的一半少 3 個，第四人取第三人的一半少 3 個，則第四人取到的數量為 0，求原來的物品數量？

我們就可用反推的思考方式：將後面一人所取之物的數量加 3 後乘 2，就可得前一人所取數量。所以原來的物品數量為 $2(2(2(2(0+3)+3)+3)+3)=90$ 個。

問題(八)：

一元二次方程式 $5x^2+8x+m=0$ 的兩根為 $x=\frac{-4\pm\sqrt{31}}{5}$，求 m 值？

解【1】：利用公式解可得

$$x=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\times5\times m}}{2\times5}=\frac{-8\pm\sqrt{64-20m}}{10}$$

與 $x=\frac{-4\pm\sqrt{31}}{5}$ 對照可得

$\sqrt{64-20m}=2\sqrt{31}$

$\Rightarrow 16-5m=31 \Rightarrow m=-3$

解【2】：因為 $x=\frac{-4\pm\sqrt{31}}{5}$，由配方法反推原方程式配方可得 $(5x+4)^2=31$

$\Rightarrow 25x^2+40x-15=0$，與

$5x^2+8x+m=0$ 對照可得

$-15=5m \Rightarrow m=-3$

問題(九)：

試證任意三邊長為整數的直角三角形，必有一股邊的長為 3 的倍數。

說明：可走三種不同的證明途徑，其中有證明(1)：利用商高定理，直接證出必有一股邊長為 3 的倍數；也可用證明(2)：假設有一股邊長不是 3 的倍數，而證出另一股邊長必是 3 的倍數。但也可以利用反證法(3)：假設兩股長皆不是 3 的倍數，證出此三角形不為直角三角形，而與事實條件矛盾。

證明【1】：設兩股長為 a 和 b，斜邊長 c

設 $a=3m-k$ (m正整數， $k=0, 1, 2$)

$\Rightarrow a^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $a^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

同理可推 $b^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或

$b^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$， $c^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或

$c^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

由 $a^2+b^2=c^2 \Rightarrow \begin{cases} a^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 3) \\ b^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 3) \end{cases}$ 或

$\begin{cases} a^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 3) \\ b^2 \equiv 1 \ (\text{mod } 3) \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a^2 \equiv 1 \ (\text{mod } 3) \\ b^2 \equiv 0 \ (\text{mod } 3) \end{cases}$

即 $a^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $b^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$

$\Rightarrow 3 \mid a^2$ 或 $3 \mid b^2 \Rightarrow 3 \mid a$ 或 $3 \mid b$ 故得證。

證明【2】：設兩股長為 a 和 b，斜邊長 c

假設 $a=3m-k$ (m正整數， $k=1, 2$)

$\Rightarrow a^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

若 $b=3n-p$ (n正整數， $p=0, 1, 2$)

$\Rightarrow b^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $b^2 \equiv 1 \ (\text{mod}3)$

且 $c=3r-s$ (r正整數， $s=0, 1, 2$)

$\Rightarrow c^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $c^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

$\Rightarrow a^2+b^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$ 或

$a^2+b^2 \equiv 2 \ (\text{mod}3)$

由 $a^2+b^2=c^2$ 推知 $a^2+b^2 \equiv 2 \ (\text{mod}3)$

不合【$\because c^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $c^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$】

$\therefore a^2+b^2 \equiv 1 \ (\text{mod}3) \Rightarrow 3 \mid b^2 \Rightarrow 3 \mid b$ 故得證。

證明【3】：設兩股長為 a 和 b，斜邊長 c

假設 $a=3m-k$ (m正整數， $k=1, 2$)

$\Rightarrow a^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

假設 $b=3n-p$ (n正整數， $p=1, 2$)

$\Rightarrow b^2 \equiv 1 \ (\text{mod}3)$

若 $c=3r-s$ (r正整數， $s=0, 1, 2$)

$\Rightarrow c^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $c^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$

$\Rightarrow a^2+b^2 \equiv 2 \ (\text{mod}3)$

由 $a^2+b^2=c^2$ 推知 $a^2+b^2 \equiv 2 \ (\text{mod}3)$

不合【$\because c^2 \equiv 0 \ (\text{mod}3)$ 或 $c^2 \equiv 1 (\text{mod}3)$】

$\therefore 3 \mid a$ 或 $3 \mid b$ 故得證。

若將問題的「必有一股邊的長為 3 的倍數」改為「必有一邊的長為 5 的倍數」，則命題仍然成立，解法也大致相同。

問題(十)：

如圖 2-1，在$\triangle ABC$ 中，$\overline{BD}$ 平分 $\angle ABC$ 且交 $\overline{AC}$ 於 D，$\overline{CE}$ 平分 $\angle ACB$ 且交 $\overline{AB}$ 於 E，若 $\overline{CE}=\overline{BD}$，求証$\triangle ABC$ 為等腰$\triangle$。

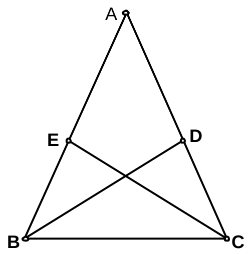


圖 2-1

反證【1】：(如圖 2-2)

(1)作平行四邊形 $BDFE$ 使 $\overline{EF} \,/\!/\, \overline{BD}$，$\overline{DF} \,/\!/\, \overline{BE}$，連 $\overline{CF}$。

(2)假設 $\angle BCE > \angle DBC$

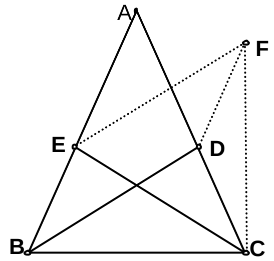


圖 2-2

$\because \overline{CE}=\overline{BD}$， $\overline{BD}=\overline{EF}$

$\therefore \overline{CE}=\overline{EF} \Rightarrow \angle ECF=\angle EFC$

又 $\angle BCE>\angle DBC$， $\overline{BC}=\overline{BC}$，

$\overline{CE}=\overline{BD}$

由樞紐定理 $\Rightarrow \overline{BE}>\overline{CD}$

$\because \overline{DF}=\overline{BE}$ $\therefore \overline{DF}>\overline{CD}$ ……①

$\because \angle DCE=\angle ECB>$

$\angle DBC=\angle EBD=\angle EFD$

又

$\angle ECF=\angle EFC$ $\therefore \angle DCF<\angle DFC$

， $\overline{DF}<\overline{CD}$ ……②

由①, ②兩式互相矛盾 $\Rightarrow$ 假設不成立。

(3)假設 $\angle BCE<\angle DBC$ ，如(2)證明方式，同理可證得假設也不成立。

(4)由(2)，(3)可推得

$\angle BCE=\angle DBC \Rightarrow \angle ABC=\angle ACB$

，故△ABC 為等腰△。

反證【2】：(如圖 2-3)

(1)假設

$\angle ACE>\angle ABD$

作 $\angle FCE=\angle ABD$

$\because \angle BCF>\angle FBC$

$\therefore \overline{BF}>\overline{CF}$

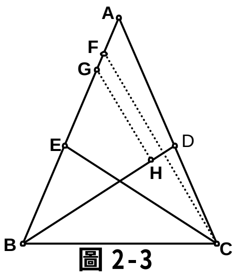


圖 2-3

在 $\overline{BF}$ 取一點 G，使 $\overline{BG}=\overline{CF}$

並過 G 作 $\overline{GH}$ ∥ $\overline{CF}$ 且交 $\overline{BD}$ 於 H

$\Rightarrow \angle BGH=\angle EFC$

由 $\overline{BG}=\overline{CF}$， $\angle GBH=\angle FCE$，

$\angle BGH=\angle EFC$

$\Rightarrow \Delta BGH \cong \Delta CFE$

$\therefore \overline{BH}=\overline{CE}$ $\Rightarrow \overline{BD}>\overline{CE}$，此結果與已知條件不合，故假設不成立。

(2)假設 $\angle ACE<\angle ABD$，如(2)証明方式，同理可證得與已知條件不合，故假設也不成立。

(3)由(1)，(2) $\Rightarrow \angle ACE=\angle ABD$

$\therefore \angle ACB=\angle ABC$，故 ΔABC 為等腰△。

三、結論：

有一位學生解數學填充題：「請將 7，0，-3，2 四個數，依照大小次序排列出來。」他寫的答案並不是老師原先的「標準答案」：「7>2>0>-3」或「7，2，0，-3」，而是寫：「-3，0，2，7」。他的數學老師因此給他打錯。後來這名學生去跟老師要分數，並解釋：「題目上只寫說照大小次序排列，並沒有說要將大的數寫在左邊，更何況數線上的數，都是小的排在大的左邊，愈大的數排在愈右邊。」老師聽完之後，認為學生言之有理，自然也給了他這道問題的全部分數。

其實，以上的例子也著實應驗了：「正」與「反」的思考途徑是可以兼容並蓄、殊途同歸的，而兩者共存的關鍵，就端看原理的靈巧運用與合理的觀點解釋。過去傳統式的教學活動，動不動強調「威權」與「權威」，學習的控制權大都在老師身上，這種教師過度滿足「自我價值」的互動環境，一則可能在不知不覺中，使學生討厭甚至害怕學習；二則也會或多或少抹殺一些學生的創造思考。如今整個社會與教育環境已相當開放和多元，教師若能以更「尊重思考」的胸襟看數學解題，相信無論是教與學都會同感有智有愛、與時俱進的學習樂趣，國家更得以展望更有名有實的大眾教育成果。