商高定理簡史及證明方法

楊惠后

臺中市曉明女子中學

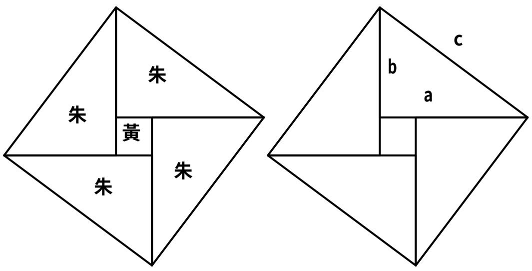
一、前言

刻卜勒曾說過:「畢氏定理與黃金分割是幾何學的兩大寶藏」, 有關畢氏定理(又稱商高定理)的證明方法目前已知有人收集到 250 種 (注 1), 有些是嚴密的證明；有些是「拼補相等」的證明。基於教學的需要, 除了介紹給學生知道有關商高定理的一些簡單歷史背景, 同時也企望能讓學生體悟到商高定理多解證明的美妙之處, 藉此或多或少引起學生學習數學的樂趣與動機,故而著手整理商高定理的一些相關資料；文末並錦上添花地附上自己研究出來的證明方法。

二、列舉如下:

(1)趙爽(趙君卿)的證法:

有關商高定理的記載, 最早出現在周髀算經(注 2)的趙君卿注中。文中敘述商高(西周大夫, B.C.1100 年)曾提過「勾廣三、股脩四、徑偶五」, 而且商高認為早在禹治水時即利用了這個性質。然而有關一般性的商高定理最早記載在周髀算經對於陳子的敘述:「若求邪至日者, 以日下為勾, 日高為股, 勾股各自乘, 并而開方除之, 得邪至日」並指出測日的方法。直至魏晉數學家趙君卿(A.D.300 400 年左右)在注中所提到的「弦圖」(原圖已失, 後人根據所述補繪), 才正式給出商高定理的證明:「勾股各自乘併之為弦實, 開方除之即弦, 案弦圖又可以勾股相乘為朱實二, 倍之為朱實四, 以勾股之差自相乘為中黃實, 加差實, 亦成弦實。」這個證明是所有商高定理的證明中最簡單和最巧妙的;外國人用同樣方法來證明的是印度數學家 Bhaskara-Acharya (A.D.1114~1185 年), 比趙君卿晚了數百年。緣於此歷史的淵源, 所以「商高定理」又可稱為「陳子定理」、「勾股定理」、「勾股弦定理」。



「弦圖」

說明：

$$\because c^2=4\times\frac{1}{2}ab+(a-b)^2$$
$$\therefore c^2=2ab+a^2-2ab+b^2$$
$$\Rightarrow c^2=a^2+b^2$$

(2)畢氏學派的證法：

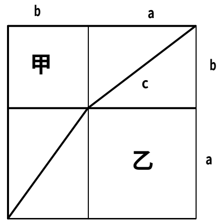
西方國家普遍相信此定理是畢達哥拉斯(B.C.560~480 年)發現的, 或者至少是由他證明的;所以商高定理又稱「畢達哥拉斯定理」, 簡稱「畢氏定理」。然而 1945 年 Neugebauer 等人詮釋一塊巴比倫泥板, 發現

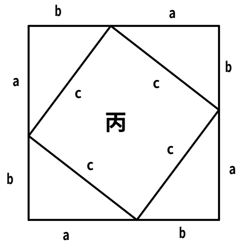
巴比倫人在約 B.C.1900~1600 年已經知道至少 15 組的畢氏三元數(滿足 $a^2+b^2=c^2$ 的正整數解)，所以畢達哥拉斯是否發現此定理，目前並無定論。

說明:

比較左右兩個邊長均為 $a+b$ 的正方形面積，即可得

正方形丙面積=正方形甲面積+正方形乙面積 $\Rightarrow c^2=a^2+b^2$

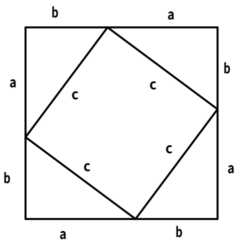




(3)利用乘法公式及簡單的面積公式：

說明:

$$\because (a+b)^2=4\times\frac{1}{2}ab+c^2$$
$$\therefore a^2+2ab+b^2=2ab+c^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2=c^2$$



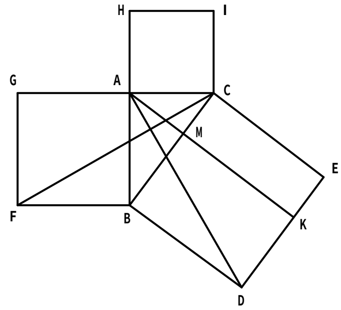
(4)歐幾里得的證法：

在幾何原本 (注 3)第一卷命題 47 中記載著歐幾里得(B.C.300 年)的證法，後人認為歐幾里得是第一個證明此定理的人；下圖是歐幾里得所畫的圖也從此名聞遐邇，更由於它與風車相像，因此俗稱為「風車」。

說明:

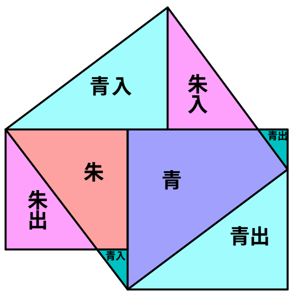
1. $\because$ 矩形 $BDKM$ 面積= $2\Delta ABD$ 面積
   $=2\Delta BCF$ 面積 ($\because \Delta ABD\cong\Delta BCF$)
   =正方形 $ABFG$ 面積
2. 同理可得矩形 $CEKM$ 面積=正方形 $ACIH$ 面積
3. 由 1.2.可知

正方形 $BCED$ 面積=正方形 $ABFG$ 面積+正方形 $ACIH$ 面積 $\Rightarrow \overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$



(5) 九章算術的證法：

九章算術(注 4) <卷九>勾股章的內容都是講商高定理在日常生活上的應用。魏晉時期平民數學家劉徽在<<九章算術注>>(A.D.263 年)提及:「勾自乘為朱方，股自乘為青方，令出入相輔，各從其類，因就其餘不移動也，合成弦方之冪，開方除之，及弦也」。因原圖已經失傳，後人依劉徽注繪圖(注 5)。



(6)Thabit ibn Qurra 的證法：

阿拉伯數學家 Thabit ibn Qurra (A.D.826 901 年)提出的證法是:對於任意給定的直

角三角形，以它的兩股長為邊長的正方形，可被切割後重新拼湊成以斜邊為邊長的正方形。

說明：

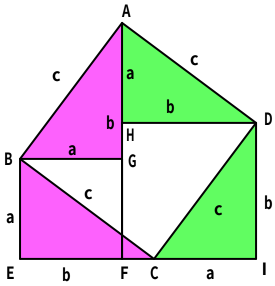
如圖所示，很清楚地可以看出：

邊長為 c 的正方形 $ABCD$ 的面積等於

邊長為 a 的正方形 $BEFG$ 的面積與

邊長為 b 的正方形 $DIFH$ 的面積和

所以 $c^2 = a^2 + b^2$

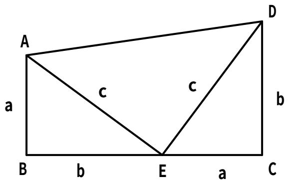


(7)1876 年美國總統 Garfield 的證法：

說明：

$\because$ 梯形 $ABCD$ 面積 $= \Delta ABE + \Delta CDE + \Delta AED$ 面積

$$\therefore \frac{(a+b)^2}{2} = 2\times\frac{1}{2}ab + \frac{1}{2}c^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$$



(8)數學老師<u>陳國裕</u>的證法：(注 6)

說明：

1. $\because \Delta ABC \cong \Delta CDE \quad \therefore \angle 1 = \angle 2$

且 $\because \angle 2 + \angle 3 = 90° \quad \Rightarrow \angle 1 + \angle 3 = 90°$

$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{CE}$

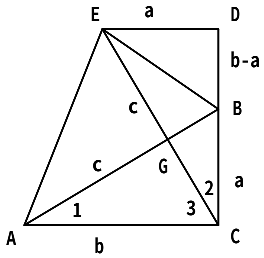
$\therefore ACBE$ 面積 $= \frac{1}{2}\overline{AB}\times\overline{CE}$

2. $\because$ 梯形 $ACDE$ 面積 $= ACBE$ 面積 $+ \Delta BDE$ 面積

$\therefore \frac{1}{2}b(a+b)$

$= \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{2}a(b-a)$

$\Rightarrow a^2 + b^2 = c^2$

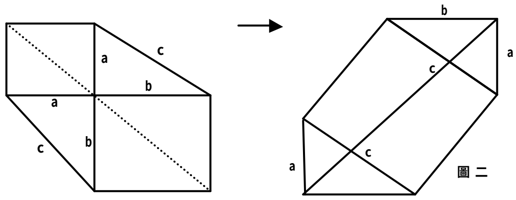


(9)義大利文藝復興時代畫家<u>達文西</u>的證法：

說明：

圖一沿虛線剪開，取一片上下顛倒與另一片沿虛線拼貼成圖二；比較兩圖，可知圖一的兩個小正方形面積和等於圖二的大正方形面積。

即可得 $c^2 = a^2 + b^2$



圖一　圖二

(10)利用相似性質證明的方法：

已知 $\angle ACB = 90°$，$\overline{CD} \perp \overline{AB}$，則

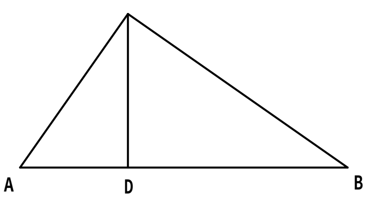
$\because \overline{AC}^2 = \overline{AD}\times\overline{AB}$

$\overline{BC}^2 = \overline{BD}\times\overline{AB}$

$\therefore \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AD}\times\overline{AB} + \overline{BD}\times\overline{AB}$

$= (\overline{AD} + \overline{BD})\times\overline{AB}$

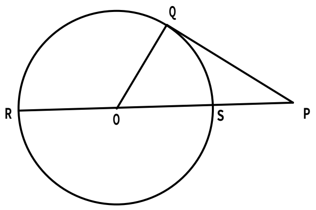
$= \overline{AB}^2$



(11)利用切割線段性質來證明：

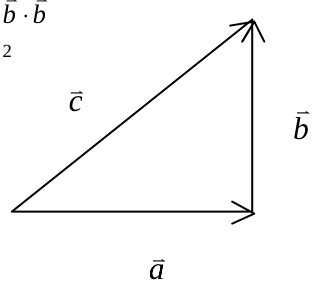
$\overline{PQ}$ 切圓 O 於 Q 點，$\overline{PR}$ 為通過圓心 O 的割線，利用

$$
\begin{aligned}
\overline{PQ}^2 &= \overline{PS}\times\overline{PR} \\
&= (\overline{PO}-\overline{OS})\times(\overline{PO}+\overline{OR}) \\
&= (\overline{PO}-\overline{OQ})\times(\overline{PO}+\overline{OQ}) \\
&= \overline{PO}^2-\overline{OQ}^2
\end{aligned}
$$

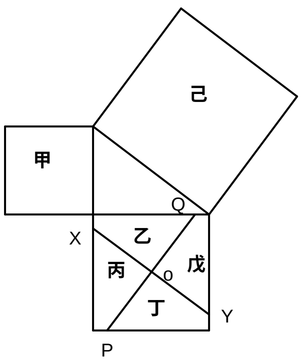


(12)利用向量來證明：

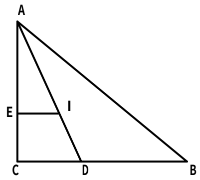
$$
\begin{aligned}
c^2 &= \vec{c}\cdot\vec{c} \\
&= (\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{b} \quad (\because \vec{a}\perp\vec{b}, \therefore \vec{a}\cdot\vec{b}=0) \\
&= \vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b} \\
&= a^2+b^2
\end{aligned}
$$



(13)下面的拼圖遊戲為伯里加(Perigal)所提出的，令 O 為兩對角線的交點，$\overline{XY}$ 通過 O 且平行斜邊，$\overline{PQ}\perp\overline{XY}$ 於 O，今將甲、乙、丙、丁、戊五塊圖形剪下，可拼成圖形己，藉此來證明商高定理。



(14)自己的研究心得：



已知 $\angle C=90°$，$\overline{IE}\perp\overline{AC}$，$I$ 為內心，$\overline{IE}$ 為內切圓半徑，

$\overline{AD}$ 為 $\angle CAB$ 的角平分線，$\overline{AB}=c$，$\overline{AC}=b$，$\overline{BC}=a$

1.利用內分比性質，可得 $\overline{CD}=\dfrac{ab}{b+c}$

2.利用兩股和等於內切圓直徑與斜邊和的性質，可得 $\overline{IE}=\dfrac{a+b-c}{2}$

3.利用比例線段 $\overline{AE}:\overline{AC}=\overline{IE}:\overline{CD}$，可得

$$\frac{b+c-a}{2}:b=\frac{a+b-c}{2}:\frac{ab}{b+c}$$

化簡即可推出 $a^2+b^2=c^2$

注 1：盧米斯(Elisha Scott Loomis)所著的畢氏定理證明(The Pythagorean Proposition)一書已在 1927 年出版，書中共提出 250 個證明方法，由英國國立教師協會於 1968 年再版。另數學家傳奇一書中提到約 400 多種。

注 2：周髀算經是中國最古老的數學書，同時也是一部天文學的著作；是西漢末東漢初（B.C.100　A.D.100 年）結集周秦以來適應天文學上的需要逐漸積累起來的科學研究成果，採用對話一問一答的型式寫成的。

注 3：幾何原本由歐幾里得撰寫，共 13 卷 465 個命題，這些命題是建立在簡單的公設化基礎上。

(下轉第 25 頁)

注 4：九章算術是東漢中期(A.D.100 年左右)的人根據西漢及其以前的數學知識積累而編纂的，是中國最早的一部數學專門著作，完全用問題集的形式編寫的；共有 246 個問題，分為九章。

注 5：梅文鼎(A.D.1633~1721 年)是在趙爽和劉徽之後第一個對商高定理留下證明的中國數學家，其人生前未曾讀到完整的九章算術及劉徽的注釋，然而他證明商高定理的方式與劉徽的思路頗相契合；後人設想的各式「青朱出入圖」都可以追溯到梅文鼎。

注 6：陳國裕老師於數學傳播季刊 (民 87 年 12 月 第 22 卷第 4 期)發表 12 種商高定理的證法。

參考資料：

1. 國立編譯館 （民 88） 國民中學數學教師手冊第三冊 臺北國立編譯館 p.18~p.23
2. 國立編譯館 （民 88） 國民中學選修數學第五冊臺北國立編譯館 p.104~p.110
3. 國立編譯館 （民 88） 國民中學選修數學教師手冊第五冊 臺北國立編譯館 p.75~p.76
4. 數學傳播季刊（民 87）第 22 卷第 4 期 臺北中央研究院數學研究所 p.73~p.79
5. 李儼著 中國古代數學簡史 臺北九章出版社 p.29~p.43
6. 梅榮照主編 （民 79） 明清數學史論文集 江蘇教育出版社 p.188~p.193
7. 李繼閔著 （民 81） <<九章算術>>及其劉徽注研究 臺北九章出版社 p.2、p.22
8. Willian Dunham 著 林傑斌譯（民 84）天才之旅 臺北牛頓出版社 p.54~p.58
9. 九章編輯部編 （民 76） 數學家傳奇 臺北九章出版社 p.40~p.49
10. Brian Bolt 著 林傑斌譯 （民 84） 數學遊樂園之茅塞頓開 臺北牛頓出版社 p.59
11. Brian Bolt 著 林傑斌譯 （民 85） 數學遊樂園之趣味盎然 臺北牛頓出版社 p.50~p.54、p.161