中學生通訊解題第廿一期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
912101

對於自然數 n，令 $f(n)$ 表示 n 的數碼和。例如 $f(2307)=2+3+0+7=12$。

(1) 若 n 是二位數，問 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最大值是多少？最小值是多少？

(2) 若 n 是四位數，問 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最大值是多少？最小值是多少？

參考解答：

(1) 令此二位數為 n=10x+y，且 $x\neq 0$，x 為 1~9 的任意正整數、y 為 0~9 的任意正整數，

則 $\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{10x+y}{x+y}=10-\dfrac{9y}{x+y}$

欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最大值，即求 $\dfrac{9y}{x+y}$ 的最小值

⇨ y = 0、x 為 1~9 的任意正整數，$\dfrac{9y}{x+y}=0$

⇨此時 $\dfrac{n}{f(n)}=10-0=10$ 為最大值

同理，欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最小值，即求 $\dfrac{9y}{x+y}$ 的最大值 ⇨ x = 1、y = 9，$\dfrac{9y}{x+y}=\dfrac{81}{10}$

⇨此時 $\dfrac{n}{f(n)}=10-\dfrac{81}{10}=\dfrac{19}{10}$ 為最小值

(2) 令此四位數為 n=1000x + 100y + 10z + w，且 $x\neq 0$，x 為 1~9 的任意正整數，y、z、w 為 0~9 的任意正整數，

則 $\dfrac{n}{f(n)}=\dfrac{1000x+100y+10z+w}{x+y+z+w}$

$=1000-\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$

欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最大值，即求 $\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$ 的最小值

⇨ y = z = w = 0、x 為 1~9 的任意正整數，$\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}=0$

⇨此時 $\dfrac{n}{f(n)}=1000-0=1000$ 為最大值

同理，欲求 $\dfrac{n}{f(n)}$ 的最小值，即求 $\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$ 的最大值

⇨ $\dfrac{900y+990z+999w}{x+y+z+w}$

$=900+\dfrac{90z+99w-900x}{x+y+z+w}$，所以取 x = 1，y = 0

$=900+\dfrac{90z+99w-900}{1+z+w}$

$=900+90+\dfrac{9w-990}{1+z+w}$，所以取 z = 9

$=900+90+9-\dfrac{1080}{10+w}$，所以取 w = 9

$=999-\dfrac{1080}{19}=\dfrac{17901}{19}$

⇨此時 $\dfrac{n}{f(n)}=1000-\dfrac{17901}{19}=\dfrac{1099}{19}$ 為最小值

解題重點：

先將式子列出可觀察出變化的部分再予以討論，在多變數的情形下，以依序提出倍數的方法逐次減少變數個數來決定該變數適當的值。

評析：

本題徵答人數共有 26 人，其中全對者共 4 人，包含江翠國中林志嘉；永和國中吳建澄；福和國中林昇誼；銘傳國中楊昀琪等同

學。本題平均得分為 3.31 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中林志嘉同學、永和國中吳建澄同學、福和國中林昇誼同學、銘傳國中楊昀琪同學等。

問題編號
912102

分子為 1 的真分數稱為單位分數或埃及分數。試將 $\frac{1}{6}$ 寫成兩個埃及分數的和。(請證明你已經列出所有可能的答案)。

參考解答：

令 a、b 為兩非零整數，且 $\frac{1}{6} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

⇨ $ab = 6a+6b$ ⇨ $(a-6)\times(b-6)=36$

因此考慮 36 的所有因數情形可得出以下幾種 ab 的組合方式(正配正，負配負)

a.$(\pm1)\times(\pm36)$ ⇨ $(6\pm1,\ 6\pm36)$

⇨ (7 , 42) 、 (5 , -30)

b.$(\pm2)\times(\pm18)$ ⇨ $(6\pm2,\ 6\pm18)$

⇨ (8 , 24) 、 (4 , -12)

c.$(\pm3)\times(\pm12)$ ⇨ $(6\pm3,\ 6\pm12)$

⇨ (9 , 18) 、 (3 , -6)

d.$(\pm4)\times(\pm9)$ ⇨ $(6\pm4,\ 6\pm9)$

⇨ (10 , 15) 、 (2 , -3)

e.$(\pm6)\times(\pm6)$ ⇨ $(6\pm6,\ 6\pm6)$

⇨ (12,12) ⇨因為 a、b 為兩非零整數，所以 (0,0)不可取⇨共有 9 組解

討論 ab 之間的關係看看是否還有其他的可能組合：

$a = \frac{6b}{b-6}$ ，$b = \frac{6a}{a-6}$ 因為 ab 兩者情形相同，所以只要討論其中之一即可。

取 $a = \frac{6b}{b-6}$ 討論 ⇨ $a = \frac{6b}{b-6} = \frac{6b-36}{b-6} + \frac{36}{b-6} = 6 + \frac{36}{b-6}$

❶當 $b > 6$ 時，$a > 6$ 且 若 b 愈大，則 $\frac{36}{b-6}$ 會愈小

由前面得到的 9 組解之中，b 的最大值為 42 ⇨ $b > 42$，則 $6 < a < 7$ ⇨此時 a 無整數解

❷當 $1 < b < 6$ 時，由前面得到的 9 組解中可知有解

❸當 $b < 0$ 時，$a < 6$ 且 若 b 愈小，則 $\frac{36}{b-6}$ 會愈大

由前面得到的 9 組解之中，b 的最小值為 -30 ⇨ $b < -30$，則 $5 < a < 6$ ⇨此時 a 無整數解

由❶❷❸可知，前面得到的 9 組解為所有的情形。

解題重點：

找出 a、b 與 6 之間的關係後討論之(運用因倍數概念，並注意可以有負的情形)，對照討論出的結果再去擴大 a、b 的範圍嘗試還有無其他可能的組合。

評析：

本題徵答人數共有 47 人，其中全對者共 42 人，包含民權國中練彥呈；民生國中曾懷德；介壽國中陳慧穎；興雅國中林昭平；敦化國中張雅棠；南門國中高嘉甫、張祺沅、蔡明茜、張鈞傑、林彥羽；蘭雅國中林婉茹、王筑萱、游捷名、傅偉哲；景興國中顏友信；中正國中周允中、潘柏翰；江翠國中林謙盈、李威霆、陳建宏、陳建彰、林易徵、簡志達、丁羚、李宛軒、林怡嫺、呂亞軒、李侑桂、黃子誠、林志嘉；海山國中江俊緯；永和國

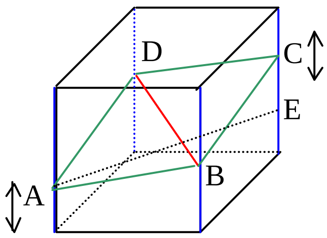
中吳建澄、吳俊論；時雨國中吳俊廷；福和國中林昇誼、周志遠、沈彥汝；漳和國中陳信儒；銘傳國中楊昀達、鄭宇宏；光華國中范祐維；鳳西國中葉仲恆等同學。本題平均得分為 6.45 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有銘傳國中楊昀達同學、鳳西國中葉仲恆同學、永和國中吳建澄同學、永和國中吳俊論同學、福和國中沈彥汝同學、福和國中周志遠同學、銘傳國中鄭宇宏同學、光華國中范祐維同學等。

問題編號
912103

用一個平面去截邊長為 1 的正立方體，結果得到截面是一個菱形。問這個菱形的面積是多少？

參考解答：

令所得的菱形截面為 ABCD，如圖一，AC 落在此正方體的一組平行對邊上，BD 則落在此正方體的另一組同向平行對邊上，且 B、C 為中點，以 $\overline{BD}$ 為固定不動的軸去作轉動，使 A、C 上下滑動，所出現的截面皆為菱形，設 C 與 A 高度差 x，$0 \leqq x \leqq 1$，



(圖一)

且 $\overline{BD} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ 由直角△ACE 可得到 $\overline{AC} = \sqrt{(\sqrt{2})^2+x^2} = \sqrt{2+x^2}$ ⇨菱形 ABCD 面積 $= \dfrac{\sqrt{2} \times \sqrt{2+x^2}}{2}$，$0 \leqq x \leqq 1$

⇨因此可得 $1 \leqq$ 菱形 ABCD 面積 $\leqq \dfrac{\sqrt{6}}{2}$

解題重點：

觀察平面如何在正立方體中截出菱形，可發現在正立方體中互相平行的邊可分為四邊一組，共三組相異的平行線，若選擇一組去截便可得出菱形，且所截出的高度會影響其面積，再嘗試菱形面積何時最大或最小得出所求範圍。多數同學僅看出面積最大與最小的菱形，無發現其動態的變化。

評析：

本題徵答人數共有 27 人，其中全對者共 3 人，包含江翠國中陳建宏、陳建彰；蘭雅國中蔡明亨等同學。本題平均得分為 2.07 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建宏同學、江翠國中陳建彰同學、蘭雅國中蔡明亨同學等。

問題編號
912104

已知三角形中有一角為 $180° - n°$，而且這個三角形最大角和最小角的角度差為 24°。試求出 n 的範圍。

參考解答：

令此三角形中的最大角為 x^o，則最小角為 x^o-24^o，

①$180^o-x^o-(x^o-24^o) \leqq x^o$ ⇨ $68^o \leqq x^o$

⇨ $44^o \leqq x^o-24^o$

②$180^o-x^o-(x^o-24^o) \geqq x^o-24^o$ ⇨ $52^o \geqq x^o-24^o$

⇨ $76^o \geqq x^o$

⇨ $68^o \leqq x^o \leqq 76^o$，$44^o \leqq x^o-24^o \leqq 52^o$

所以此三角形的任一內角 A 皆為 $44^o \leqq A \leqq 76^o$，即 $44^o \leqq 180° - n° \leqq 76^o$

⇨$104^{o} \leqq n^{o} \leqq 136^{o}$

解題重點：

運用角度“最大”與“最小”來取得 x 的範圍，然後用此範圍來找出 n。等號成立是多數同學疏忽的地方。

評析：

本題徵答人數共有 26 人，其中全對者共 9 人，包含江翠國中陳建彰、李宛軒、黃子誠、林志嘉；海山國中江俊緯；福和國中沈彥汝；積穗國中蕭屹宏；銘傳國中楊昀達；興雅國中林昭平等同學。本題平均得分為 3.96 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中陳建彰同學、江翠國中林志嘉同學等。

問題編號
912105

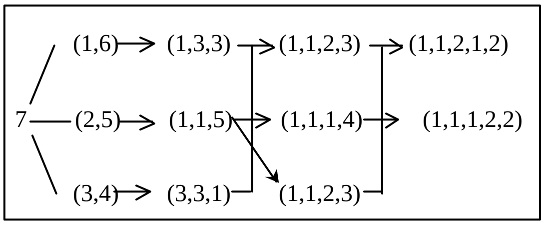
今有 n 個一元硬幣疊成一疊，我們稱這疊硬幣高度為 n。小明和小華玩以下的遊戲：小明先將這疊硬幣分成高度較小的兩疊(兩疊高度可以不相同)；小華接著任選一疊高度 ≥ 2 個硬幣，再將之分為兩疊(兩疊高度可以不相同)。如此兩人輪流下去，每一次都是選一疊高度 ≥ 2 的硬幣，將之分成兩疊(分成的兩疊高度可以不相同)。第一個將所有硬幣分成高度只有 1 或 2 的人獲勝。

(1)當 $n = 7$ 時，誰有必勝策略？為什麼？

(2)當 $n = 2002$ 時，誰有必勝策略？為什麼？

參考解答：

(1)後手(小華)勝：



(2)先手(小明)勝：

共有 2002 個硬幣，先手只要將其硬幣平分成(1001,1001)，接著後手怎麼分，先手就模仿其分法一直進行。

推廣：

若將硬幣個數考慮成 n 個，此時我們可以將 n 分成奇偶兩種情形

① n 為偶數→先手必勝：

先手可將 n 分為相同的兩份(平分)，接著後手怎麼分，先手就模仿其分法一直進行。

② n 為奇數→後手必勝：

❶先手將 n 分為一堆奇(稱 O_1)一堆偶(稱 E_1)，其中 $O_1>3$，則後手將 E_1 平分成兩份 E_2、E_3

→若先手分 E_2(或 E_3)，則後手模仿先手去分另一偶數堆 E_3(或 E_2)。

→若先手分 O_1 成一堆奇(稱 O_2)一堆偶(稱 E_2’)，其中 $O_2>3$，則回到 O_1、E_1 的情形；其中 $O_2=3$，則可參照❷的方法進行。

❷先手將 n 分為一堆奇(稱 O_1)一堆偶(稱 E_1)，其中 $O_1=3$，則後手將 E_1 分為 $3+O_2$(O_2 為奇數)，維持 O_2 為奇數的狀況，即維持偶數堆 3 及一堆奇數。

解題重點：

考慮硬幣個數為奇或偶的情形予以討論，注意出現 3 的情形。

評析：

本題徵答人數共有 15 人，其中全對者共 3 人，包含江翠國中陳建宏；光華國中范祐維；南門國中高嘉甫等同學。本題平均得分為 3.20 分。

中學生通訊解題第二十一期徵答情形

臺北市立建國高級中學　數學科

區　域	學　校	姓　名	指導老師	912101	912102	912103	912104	912105	總　分
台北市	民權國中	練彥呈	陳建州	3	7	1	0	0	11
	民生國中	曾懷德	王士美	X	7	3	2	X	12
	忠孝國中	陳婉容	何崑德、李明欽	4	4	1	1	5	15
	介壽國中	陳慧穎	張靜華	5	7	3	5	X	20
	興雅國中	林昭平	董增萊	X	7	X	7	X	14
	敦化國中	張雅棠	童睦甯	X	7	X	X	X	7
	敦化國中	葉明仁		X	X	X	0	X	0
	南門國中	高嘉甫	陳婉穎	X	7	X	X	7	14
	南門國中	張祺沅	陳婉穎	X	7	X	X	X	7
	南門國中	蔡明茜	陳婉穎	X	7	X	X	X	7
	南門國中	張鈞傑	陳婉穎	X	7	2	6	X	15
	南門國中	林彥羽	陳婉穎	X	7	X	X	X	7
	蘭雅國中	林婉茹	李信仲	X	7	X	X	X	7
	蘭雅國中	王筑萱	李信仲	X	7	X	X	X	7
	蘭雅國中	游捷名	李信仲	X	7	X	X	X	7
	蘭雅國中	蔡博仰	李信仲	X	X	1	X	X	1
	蘭雅國中	蔡明亨	李信仲	X	X	7	X	X	7
	蘭雅國中	傅偉哲	洪明瞭	X	7	X	X	X	7
	蘭雅國中	楊斯涵	洪明瞭	X	4	X	X	X	4
	蘭雅國中	張顥璇	洪明瞭	X	X	X	2	X	2
	蘭雅國中	周思宇	章念慈	X	X	X	X	0	0
	景興國中	顏友信	黃瓊誼	X	7	X	X	X	7
	中正國中	李忠儒	宋玉如	X	0	X	X	X	0
	中正國中	周允中	宋玉如	2	7	1	X	X	10
	中正國中	李隆盛		X	0	1	X	5	6
	中正國中	潘柏翰		3	7	X	X	X	10

台北縣	江翠國中	黃豪平	陳彩鳳	2	X	1	X	X	3
	江翠國中	李孟翰	陳彩鳳	3	X	X	6	X	9
	江翠國中	林謙盈	陳彩鳳	2	7	2	1	6	18
	江翠國中	李威霆	陳彩鳳	3	7	X	X	X	10
	江翠國中	陳建宏	陳彩鳳	3	7	7	0	7	24
	江翠國中	陳建彰	陳彩鳳	3	7	7	7	X	24
	江翠國中	林易徵	陳彩鳳	X	7	X	X	X	7
	江翠國中	簡志達	陳彩鳳	X	7	X	X	X	7
	江翠國中	丁　羚	陳彩鳳	X	7	0	X	X	7
台北縣	江翠國中	李宛軒	陳彩鳳	X	7	X	7	X	14
	江翠國中	林怡嫺	陳彩鳳	X	7	X	X	X	7
	江翠國中	呂亞軒	陳彩鳳	X	7	X	X	X	7
	江翠國中	李侑桂	陳彩鳳	X	7	X	X	X	7
	江翠國中	黃詩純	陳彩鳳	X	X	1	X	X	1
	江翠國中	陳昱璇	陳彩鳳	X	X	0	X	X	0
	江翠國中	黃子誠	陳彩鳳	X	7	2	7	0	16
	江翠國中	劉彥麟	高麗華	1	X	X	X	3	4
	江翠國中	林志嘉	高麗華	7	7	5	7	X	26
	江翠國中	黃俊嘉	吳明標	X	X	1	X	X	1
	江翠國中	李育丞	吳明標	X	1	X	X	X	1
	江翠國中	李治揚	林正吉	3	X	X	X	X	3
	海山國中	江俊緯	唐家琴	3	7	1	7	0	18
	永和國中	吳建澄	陳永福	7	7	1	X	X	15
	永和國中	吳俊諭	王亮穎	X	7	1	X	X	8
	時雨國中	吳俊廷	許元利	3	7	X	1	X	11
	時雨國中	王思皓	許元利	X	X	2	X	5	7
	時雨國中	簡孝竑		0	X	X	X	X	0
	福和國中	林昇誼	鄭釧鋒、陳明貴	7	7	X	X	X	14
	福和國中	周志遠	鄭釧鋒、蕭素玲	X	7	1	X	X	8
	福和國中	沈彥汝	鄭釧鋒	X	7	X	7	X	14
	新莊國中	劉彥伶	林振吉	X	X	X	6	X	6
	漳和國中	陳信儒	吳秉鋒	1	7	1	0	X	9
	積穗國中	蕭屹宏	林秀美	X	X	X	7	X	7
基隆市	銘傳國中	蔡秉杰	張麗珠	0	X	X	0	X	0
	銘傳國中	楊昀達	張麗珠	X	7	X	7	X	14
	銘傳國中	楊瑩綺	宋佩玉	5	X	2	3	0	10
	銘傳國中	鄭宇宏	劉鄭文德	2	7	X	0	1	10
	銘傳國中	楊昀琪	劉鄭文德	7	X	X	X	X	7
新竹市	光華國中	范祐維	高東獻	3	7	1	3	7	21

高雄縣	鳳西國中	葉仲恆	林世榮	4	7	X	X	2	13
	答　題　人　數			**26**	**47**	**27**	**26**	**15**	
	全　對　人　數			**4**	**42**	**3**	**9**	**3**	
	平　均　得　分			**3.31**	**6.45**	**2.07**	**3.96**	**3.20**	

提醒徵答同學們：務必以一題一張(或多張)來作答，切勿多題一張，以便使我們作業能夠更加順暢，謝謝！

(**上承第** 73 **頁**)

◎線性代數測驗成績優異學生名單

姓名	性別	總分	百分等第	獎項	就讀學校	就讀系所
黃志強	男	100	100	成績優異證明	臺灣師範大學	數學
郝家駿	男	100	100	成績優異證明	明志技術學院	機械
紀昀廷	男	100	100	成績優異證明	輔仁大學	數學
林銘寬	男	100	100	成績優異證明	臺灣師範大學	數學
林浩楓	男	100	100	成績優異證明	臺灣科技大學	電機工程
王中和	男	100	100	成績優異證明	臺灣科技大學	電機工程
王嘉慶	男	100	100	成績優異證明	臺灣大學	數學
蔡志陽	男	100	100	成績優異證明	臺灣師範大學	數學
魏福村	男	100	100	成績優異證明	臺灣師範大學	數學
廖健溢	男	100	100	成績優異證明	臺灣大學	電機工程
劉育佑	男	100	100	成績優異證明	臺灣大學	數學
盧子敏	男	100	100	成績優異證明	臺灣大學	電機工程
黃德彥	男	100	100	成績優異證明	中興大學	應用數學
鍾淑麗	女	100	100	成績優異證明	彰化師範大學	數學
辜俊庭	男	100	100	成績優異證明	高雄師範大學	數學
蔡宜伶	女	100	100	成績優異證明	高雄師範大學	數學
潘恬恬	女	100	100	成績優異證明	高雄師範大學	數學
吳恭儉	男	100	100	成績優異證明	高雄師範大學	數學