2002 年 43 屆國際數學
奧林匹亞競賽試題與解答

郭滄海*　陳昭地**　林哲雄***　傅承德****　張幼賢**

*長庚大學　通識教育中心

**國立臺灣師範大學　數學系

***國立清華大學　數學系

****中央研究院　統計研究所

2002 年第 43 屆國際數學奧林匹亞競賽(IMO)是在英國的格絡哥舉行；本屆共有 84 個國家與會，合計 479 位學生代表參賽。競賽活動是由各國領隊組成的主試委員會(Jury Meeting)揭開序幕，除了確認各項議題外，主試委員會的一個主要工作是選拔本屆的競賽試題。國際數學奧林匹亞競賽試題是先由各參賽國(主辦國除外)於規定時間期限之內提交 0 ~ 6 道試題，再由主辦國的試題委員會(Problem Selection Committee)研究選出大約 30 題預選題，分屬代數、分析、數論、幾何及組合數學等不同領域和不同難度的試題；最後再經由主試委員會票選暨修訂出最後的 6 道 IMO 試題，再依主題內容及難易層次分配成兩份試題，分別在連續的兩天中舉行競試，每天三道題，考試時間都是 4.5 小時。本屆共有 51 個國家提供試題，經由主辦國的試題委員會選出他們認為較適當的 27 道題，再由各國領隊所組成的主試委員會經過三天的會議研究票選出二道幾何題、二道數論題、一道代數題和一道組合題，其中有第一題為組合題，是由哥倫比亞所提供；第二題為幾何題，是由南韓所提供；第三題為數論題，是由羅馬尼亞所提供；第四題為數論題，也是由羅馬尼亞所提供；第五題為代數(函數方程)題，是由印度所提供，第六題為幾何題，是由烏克蘭所提供。

今年我國六位學生：周建宇(建國中學)、朱浩瑋(建國中學)、黃紹倫(建國中學)、高奕豪(高雄中學)、李宗德(建國中學)、吳哲宇(高雄中學)，總成績共得161分，榮獲一面金牌、四面銀牌、一面銅牌，在84隊中名列第7名，成績平1999年於羅馬尼亞競賽時之記錄。總分前二十名的國家依次為：中國大陸、俄羅斯、美國、保加利亞、越南、南韓、台灣、羅馬尼亞、印度、德國、依朗、加拿大、匈牙利、白俄羅斯、土耳其、日本、哈薩克、以色列、法國、烏克蘭。本文將針對這次我國代表團所翻譯成中文版的六道IMO試題提供參考解答以供讀者參考。

一、第 43 屆國際數學奧林匹亞競賽試題

第一天　考試日期：2002 年 7 月 24 日

考試時間：$4\frac{1}{2}$ 小時　　　每題：7 分

【問題一】：設 n 為正整數。令 T 為平面上 x, y 都是非負整數且 $x+y<n$ 的所有點 (x,y) 所形成的集合。T 中的每一點都被著上紅色或藍色。若一點 (x,y) 被著上紅色，則 T 中所有滿足 $x'\le x$ 及 $y'\le y$ 的點 (x',y') 亦被著上紅色。如果 n 個藍色點的 x 坐標各不相同，則稱這 n 個點所成的集合為一個 X-集合；如果 n 個藍色點的 y 坐標各不相同，則稱這 n 個點所成的集合為一個 Y-集合。證明: X-集合的個數等於 Y-集合的個數。

【問題二】：設 $\overline{BC}$ 與 O 分別為圓 Γ 的直徑與圓心。設 A 為 Γ 上的一點且 $0^\circ<\angle AOB<120^\circ$。設 D 為不含點 C 之圓弧 AB 的中點。通過點 O 而與 $\overline{DA}$ 平行的直線交 $\overline{AC}$ 於 J。線段 $\overline{OA}$ 的垂直平分線交 Γ 於 E 與 F。證明： J 為三角形 CEF 的內心。

【問題三】：試求所有的正整數數對 $m,n\ge 3$，滿足下列條件: 存在無限多個正整數 a 使得

$\dfrac{a^m+a-1}{a^n+a^2-1}$ 為一整數。

第二天　考試日期：2002 年 7 月 25 日

考試時間：$4\frac{1}{2}$ 小時　　　每題：7 分

【問題四】：設 n 為大於 1 的整數，並設 $d_1, d_2, \cdots, d_k$ 為 n 的所有的正因數，其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$。令 $D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k$。

(a)證明: $D<n^2$。

(b)確定所有 n 使得 D 為 n^2 的因數。

【問題五】：試求所有從實數集合 R 映至 R 本身的函數 f 使得

$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)$

對於 R 中的所有 x，y，z，t 皆成立。

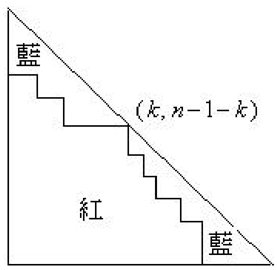
【問題六】：設 $n\ge 3$ 為正整數。設 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_n$ 為平面上半徑皆等於 1 的圓，它們的圓心分別記為 $O_1,O_2,\cdots,O_n$。假設任一直線與這些圓中至多只能跟兩個圓相交或相切。證明：

$$\sum_{1\le i<j\le n}\frac{1}{\overline{O_iO_j}}\le\frac{(n-1)p}{4}。$$

二、第 43 屆國際數學奧林匹亞競賽試題詳解

【問題一】【試題委員會公布的參考解答】:

【參考解答一】：設 x 坐標為 i 藍色點的個數為 a_i，y 坐標為 i 藍色點的個數為 b_i，則我們僅需證明 $a_0a_1\cdots a_{n-1}=b_0b_1\cdots b_{n-1}$。我們若能證明 a_0， a_1， $\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0， b_1， $\cdots, b_{n-1}$ 之一重排，則 $a_0a_1\cdots a_{n-1}=b_0b_1\cdots b_{n-1}$ 顯然成立；以下我們將數學歸納法證明 a_0， a_1， $\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0， b_1， $\cdots, b_{n-1}$ 之一重排。



首先考慮每一點 (x, y) 滿足 $x+y=n-1$

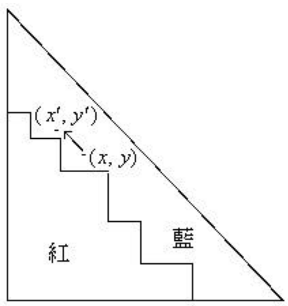
都是藍色點的情形。不看這些點，我們有一個形如 $n-1$ 結構的圖形，其中列(columns)含藍色點的個數為 a_0-1，a_1-1，$\cdots, a_{n-2}-1$，且行 (rows) 含藍色點的個數為 b_0-1，b_1-1，$\cdots, b_{n-2}-1$。由數學歸納法之假設可知 a_0-1，a_1-1，$\cdots, a_{n-2}-1$ 為 b_0-1，b_1-1，$\cdots, b_{n-2}-1$ 的一個重排，且 $a_{n-1}=b_{n-1}=1$，所以本命題在此情況成立。

其次，考慮在 $(k, n-1-k)$ 有一個紅色點(如上圖所示)，則對所有以 $(k, n-1-k)$ 為右上角頂點之矩形中的點都是紅色，即所有滿足 $x\le k$，$y\le n-1-k$ 的點 (x,y) 都是紅色的點。因此若考慮所有滿足 $x<k$ 的點 (x, y)，由數學歸納法之假設可知 a_0，a_1，$\cdots, a_{k-1}$ 是 b_{n-k}，b_{n-k+1}，$\cdots, b_{n-1}$ 的一個重排。同理，a_{k+1}，a_{k+2}，$\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0，b_1，$\cdots, n-2-k$ 的一個重排。因為 $a_k=b_{n-1-k}=0$，所以本命題在此情況也成立。

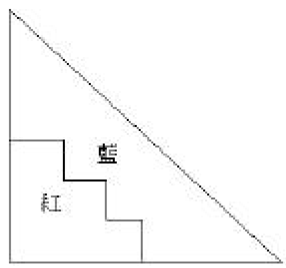
【參考解答二】：如參考解答一，我們對紅色點以數學歸納法證明 a_1，$\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0，b_1，$\cdots, b_{n-1}$ 之一重排。如果沒有任何紅點，此結論顯然成立。選取一個滿足 $x+y$ 之值最大的紅點 (x, y)，則 $a_x=b_y=n-1-x-y$。我們若將此紅點改變成藍色，則我們會有一個較少紅色點的圖形，其中所有藍色點的列及行均未改變，除了 a_x 及 b_y 均少 1。因此由數學歸納法之假設可知 a_1，$\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0，b_1，$\cdots, b_{n-1}$ 之一重排，其中只是 a_x 換為 a_x-1，b_y 換為 b_y-1。由於 $a_x=b_y$，所以 a_1，$\cdots, a_{n-1}$ 為 b_0，b_1，$\cdots, b_{n-1}$ 之一重排，因而本命題成立。

【參考解答三】：我們直接給予 a_1，$\cdots, a_{n-1}$ 與 b_0，b_1，$\cdots, b_{n-1}$ 之間的一對一映射。若 $a_x=0$，則 $b_x=0$；此時我們讓 a_x 對應於 b_x。若 $a_x>0$，設 (x, y) 為此行(x column)最下端的藍色點。在 (x,y)，$(x-1, y+1)$，$(x-2, y+2)$，$\cdots$ 這些點之中，至少有某一最左的點為藍色的點，設此點之坐標為 (x',y')，則讓 a_x 與 $b_{y'}$ 對應(如下圖所示)。

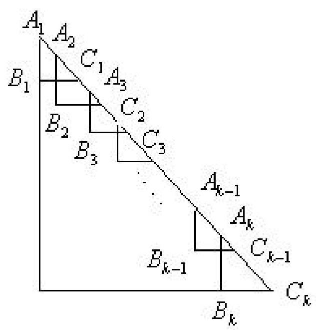
顯然這種對方式是可逆的：若 $b_y>0$，設 (x,y) 為此列(y row)最左端的藍色點在 (x,y)，$(x+1, y-1)$，$(x+2, y-2)$，$\cdots$ 這些點之中選取某列(row)中最下端的一個藍色點，設此點坐標為 (x',y')，則讓 b_y 與 $a_{x'}$ 對應。



【高奕豪同學的解法】：因為若 (x,y) 為紅色點，則 $x'\le x$ 及 $y'\le y$ 的點 (x', y') 亦為紅色點，所以 T 的圖形如右：



我們將建立一個由 $\{X\}\to\{Y\}$ 的可逆函數 f，如此即可說 X 集的個數等於 Y 集的個數。先將 T 劃分如右：



注意：任一具 X 性質的等腰直角三角形，沿 $45°$ 線翻轉過來後(我們稱此動作為翻:flip)變成 Y 性質，而任一具 Y 性質的等腰直角三角形，沿 $45°$ 線翻轉過來後變成 X 性質。

我們定義 f 的操作如下(依序)：

步驟一：翻 $\Delta A_kB_kC_k$，若

$\Delta A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}\bigcap\Delta A_kB_kC_k\neq f$，則再翻

$\Delta A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}\bigcap\Delta A_kB_kC_k$。

步驟二：翻 $\Delta A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}$，若

$\Delta A_{k-1}B_{k-1}C_{k-1}\bigcap\Delta A_{k-2}B_{k-2}C_{k-2}\neq f$，則再翻其交集。

⋮

步驟 $k-i+1$：翻 $\Delta A_iB_iC_i$，若

$\Delta A_iB_iC_i\bigcap\Delta A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}\neq f$，則再翻其交集。

⋮

步驟 k：翻 $\Delta A_1B_1C_1$。

如此我們可將一個具 X 性質的集合(令為 x_0)化為一個具 Y 性質的集合(令為 y_0)。因為上述操作可逆，所以 f^{-1} 存在；事實上，f^{-1} 的操作如下：

步驟一：翻 $\Delta A_1B_1C_1$，若

$\Delta A_1B_1C_1\bigcap\Delta A_2B_2C_2\neq f$，則再翻其交集。

⋮

步驟 i：翻 $\Delta A_iB_iC_i$，若

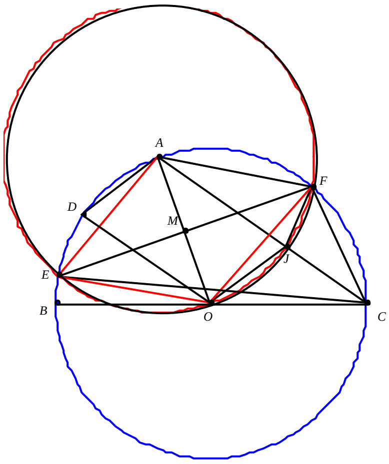
$\Delta A_iB_iC_i\bigcap\Delta A_{i+1}B_{i+1}C_{i+1}\neq f$，則再翻其交集。

⋮

步驟 k：翻 $\Delta A_kB_kC_k$。

如此可將 y_0 回復為 x_0。故 $f:\{X\}\to\{Y\}$，$f^{-1}:\{Y\}\to\{X\}$，即 X 集的個數等於 Y 集的個數。

【問題二】：【試題委員會公布的參考解答】：



【參考解答一】：A 為弧 EAF 的中點，所以 $\overline{CA}$ 為 $\angle ECF$ 的中點。因為 $\overline{OA}=\overline{OC}$，$\angle AOD=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle OAC$，所以 $\overline{OD}$ 平行於 $\overline{JA}$，因而 $ODAJ$ 為平形四邊形。由於 $OEAF$ 為菱形，對角線互相垂直平分，所以 $\overline{AJ}=\overline{OD}=\overline{OE}=\overline{AF}$。由此可知

$$\begin{aligned}\angle JFE &= \angle JFA-\angle EFA\\ &= \angle AJF-\angle ECA\\ &= \angle AJF-\angle JCF\\ &= \angle JFC.\end{aligned}$$

所以 $\overline{JF}$ 平分 $\angle EFC$，因而 J 為 ΔCEF 的內心。

【參考解答二】：如同參考解答一可先證明 $ODAJ$ 為平形四邊形。設 M 為 $\overline{EF}$ 的中點，Γ' 為圓 Γ 對於 M 的反演變換，則 O，J 都在圓 Γ' 上。設 J_0 為 ΔCEF 的內心，因為 A 為不含 C 點弧 EF 之中點，J 與 J_0 都在 $\overline{CA}$ 上，$\overline{CA}$ 是 $\angle ECF$ 的角平分線。注意：

$\overline{AO}=\overline{OE}=\overline{EA}=\overline{AF}=\overline{FO}$，所以 ΔAEO，ΔAFO 為二個共圓的正三角形。由此可知

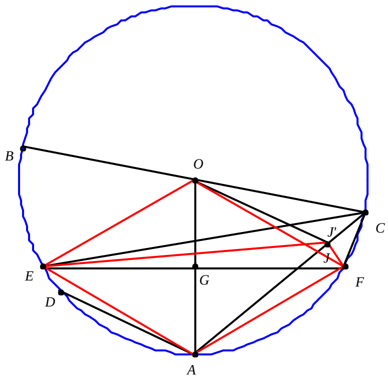
$\angle EOF = 120°$。因為 J_0 為 ΔCEF 的內心，O 為 ΔCEF 的外心，所以

$\angle EJ_0F = 90° + \frac{1}{2}\angle ECF = 90° + \frac{1}{4}\angle EOF = 120°$。

由此可知 J 與 J_0 都在圓 Γ' 上，因為圓 Γ' 與 $\overline{CA}$ 只有唯一的交點，所以 $J = J_0$。

【朱浩瑋同學的解法】：

因為 $\overline{EF}$ 為 $\overline{OA}$ 之垂直平分線，所以



$\overline{OE} = \overline{EA} = \overline{OF} = \overline{FA} = \overline{OA}$，因而

弧 ADE =弧 $AF = \dfrac{p}{3}$ (如上圖所示)。由此可得 $\angle ECJ = \angle FCJ = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{p}{3} = \dfrac{p}{6}$，所以 $\overline{JC}$ 平分 $\angle ECF$。因為 $\angle ECF = 60°$，若 J 為 ΔCEF 的內心，則

$$\begin{aligned}\angle EJF &= p - \angle JEF - \angle JFE \\ &= p - \frac{1}{2}\left(\angle CEF + \angle CFE\right) \\ &= p - \frac{1}{2}\left(p - \angle ECF\right) \\ &= 120°.\end{aligned}$$

因為 $\overline{JC}$ 平分 $\angle ECF$，若 $\angle EJF = 120°$，設 J' 為 ΔCEF 的內心，則 $\angle EJ'F = 120°$。如果 J，J' 相異，則 J' 在 $\overline{JC}$ 上或 J' 在 $\overline{JA}$ 上。

(1)若 J' 在 $\overline{JC}$ 上，則

$120° = \angle EJA + \angle AJF > \angle EJ'A + \angle AJ'F = 120°$，矛盾！

(2)若 J' 在 $\overline{JA}$ 上，則

$120° = \angle EJA + \angle AJF < \angle EJ'A + \angle AJ'F = 120°$，矛盾！

所以 J，J' 重合，因而 J 為 ΔCEF 的內心。因此，目前我們僅需證明 $\angle EJF = 120°$。

在 ΔEJF 中，

$\angle EJF = 120° \Leftrightarrow \overline{EF}^2 = \overline{EJ}^2 + \overline{JF}^2 - 2\cdot\overline{EJ}\cdot\overline{JF}\cdot\cos 120°$

$\Leftrightarrow \overline{EF}^2 = \overline{EJ}^2 + \overline{JF}^2 + \overline{EJ}\cdot\overline{JF}.$

所以我們僅需證明 $\overline{EF}^2 = \overline{EJ}^2 + \overline{JF}^2 + \overline{EJ}\cdot\overline{JF}$ 即可。

在不失一般性的原則下不妨設此圓為單位圓，A，O 兩點的坐標分別為 $(0,-1)$，$(0,0)$，$\angle AOB = q < 120°$。因為弧 ADE = 弧 $AF = 60°$，所以 E，F 兩點的坐標分別為

$(\cos(270° - 60°), \sin(270° - 60°)) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，

$(\cos(270° + 60°), \sin(270° + 60°)) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$，

因而 $\overline{EF}^2 = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$。又 C 點的坐標為

$\left(\cos(\frac{3p}{2} + p - q), \sin(\frac{3p}{2} + p - q)\right)$

$= \left(\cos(\frac{p}{2} - q), \sin(\frac{p}{2} - q)\right) = \left(\sin q, \cos q\right)$

且

$$\begin{aligned}\overline{AJ} : \overline{JC} &= \left|\Delta AOJ\right| : \left|\Delta JOC\right| \\ &= \overline{AO}\cdot\overline{OJ}\cdot\sin\angle AOJ : \overline{CO}\cdot\overline{OJ}\cdot\sin\angle JOC \\ &= \sin\angle AOJ : \sin\angle JOC.\end{aligned}$$

又因 $\overline{AD} // \overline{JD}$，所以

$\angle AOJ = \angle OAD = \frac{1}{2}(p - \angle AOD)$

$= \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\angle AOD = \frac{p}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\angle AOB = \frac{p}{2} - \frac{q}{4}$。

因為 $\angle AOJ + \angle JOC = \angle AOC = p - q$，所以 $\angle JOC = \frac{p}{2} - \frac{3q}{4}$。由此可知

$$\begin{aligned}\overline{AJ}:\overline{JC}&=\sin(\tfrac{p}{2}-\tfrac{q}{4}):\sin(\tfrac{p}{2}-\tfrac{3q}{4})\\&=\cos\tfrac{q}{4}:\cos\tfrac{3q}{4}\\&=\cos\tfrac{q}{4}:\left(4\cos^3\tfrac{q}{4}-3\cos\tfrac{q}{4}\right)\\&=1:\left(4\cos^2\tfrac{q}{4}-3\right)\\&=1:\left(2\cos\tfrac{q}{2}-1\right).\end{aligned}$$

由內分點公式可知 J 點之坐標為

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1\sin q+(2\cos\frac{q}{2}-1)\cdot 0}{2\cos\frac{q}{2}-1+1},\frac{1\cdot\cos q+(2\cos\frac{q}{2}-1)\cdot(-1)}{2\cos\frac{q}{2}-1+1}\right)\\&=\left(\frac{\sin q}{2\cos\frac{q}{2}},\frac{\cos q+1-2\cos\frac{q}{2}}{2\cos\frac{q}{2}}\right)\\&=\left(\frac{2\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}}{2\cos\frac{q}{2}},\frac{2\cos^2\frac{q}{2}-1+1-2\cos\frac{q}{2}}{2\cos\frac{q}{2}}\right)\\&=\left(\sin\tfrac{q}{2},\cos\tfrac{q}{2}-1\right).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\overline{EJ}^2&=\left(\sin\tfrac{q}{2}+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos\tfrac{q}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2\\&=2+\sqrt{3}\sin\tfrac{q}{2}-\cos\tfrac{q}{2}\\\overline{JF}^2&=\left(\sin\tfrac{q}{2}-\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(\cos\tfrac{q}{2}-\tfrac{1}{2}\right)^2\\&=2-\sqrt{3}\sin\tfrac{q}{2}-\cos\tfrac{q}{2}\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}\overline{EJ}^2\cdot\overline{JF}^2&=(2+\sqrt{3}\sin\tfrac{q}{2}-\cos\tfrac{q}{2})\cdot(2+\sqrt{3}\sin\tfrac{q}{2}-\cos\tfrac{q}{2})\\&=(2-\cos\tfrac{q}{2})^2-3\sin^2\tfrac{q}{2}\\&=(2\cos\tfrac{q}{2}-1)^2.\end{aligned}$$

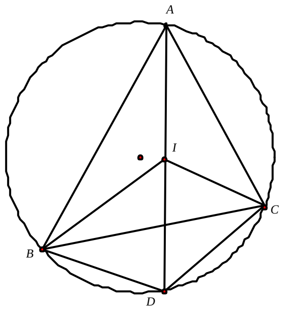
因為 $0<\frac{q}{2}<60°$，所以 $\cos\frac{q}{2}>\frac{1}{2}$，因而 $2\cos\frac{q}{2}-1>0.$ 由此可得 $\overline{EJ}\cdot\overline{JF}=2\cos\frac{q}{2}-1$；因此，

$$\overline{EJ}^2+\overline{JF}^2+\overline{EJ}\cdot\overline{JF}=4-2\cos\tfrac{q}{2}+2\cos\tfrac{q}{2}-1=3=\overline{EF}^2.$$

故，J 為 ΔCEF 的內心。

【黃紹倫同學的解法】：先證明一個引理：ΔABC 內接於圓 Γ'，$\angle BAC$ 之內角平分線交 Γ' 於 D，I 為 $\overline{AD}$ 上一點，I 在 A，D 之間。若 $\overline{DI}=\overline{DB}$，則 I 為 ΔABC 之內心。

【引理證明】：如下圖所示，因 $\overline{AD}$ 為 $\angle BAC$ 之內角平分線且 $\overline{DI}=\overline{DB}$，所以 $\angle BAD=\angle DAC$，因而 $\overline{DI}=\overline{DB}=\overline{DC}$。又因 D 在圓 Γ' 上，所以 $\angle ADB=\angle ACB$，



$\angle CBD=\angle CAD=\frac{1}{2}\angle BAC$。

$\angle ADB=\angle ACB$，所以

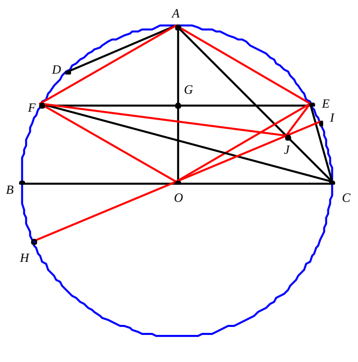
$\angle IBD=\frac{1}{2}(p-\angle BDI)$（因為 $\overline{DI}=\overline{DB}$）。由此可知，

$$\begin{aligned}\angle IBC&=\angle IBD-\angle CBD=\tfrac{1}{2}(p-\angle BDI)-\tfrac{1}{2}\angle BAC\\&=\tfrac{1}{2}(p-\angle BDI-\angle BAC)=\tfrac{1}{2}\angle ABC\end{aligned}$$

即 $\overline{BI}$ 為 $\angle ABC$ 的內角平分線，因而 I 為 ΔABC 之內心。

【原命題之證明】：

如圖所示，連結 $\overline{AF}$、$\overline{AE}$、$\overline{OD}$、$\overline{OE}$、$\overline{OF}$。設 $\overline{AO}$ 的中點為 G，過 O 與 $\overline{DA}$ 平行之直線與圓交於 H，I 兩點。因 $\overline{EF}$ 為 $\overline{AO}$ 之中垂線，$0°<\angle AOB<120°$，所以 I 在劣弧 AC 上，因而 J 在 A，C 之間，且 $\overline{AF}=\overline{OF}$，$\overline{AE}=\overline{OE}$。又 O 為圓心，所以 $\overline{OF}=\overline{OA}=\overline{OE}$，由此可得，$\overline{OF}=\overline{OA}=\overline{OE}=\overline{AF}=\overline{AE}$。從而



由 $\overline{AF}=\overline{EF}$ 可知 A 為劣弧 EF 的中點。故，$\overline{CA}$ 為 $\angle ECF$ 之平分線。又因 $\overline{HI}\,//\,\overline{DA}$，$D$ 為不包含 C 點弧 AB 之中點，所以 $\angle AOD=\angle DOB$。又 $\angle BOH=\angle IOH$，由 $\overline{HI}\,//\,\overline{DA}$，劣弧 DH 等於劣弧 AI，所以 $\angle DOH=\angle AOI$。然而，

$\angle AJO=\angle ACO+\angle IOC=\angle BOH+\angle ACO$，又 $\angle ACO=\angle OCA$，所以

$$\angle ACO=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle DOB。$$

故，

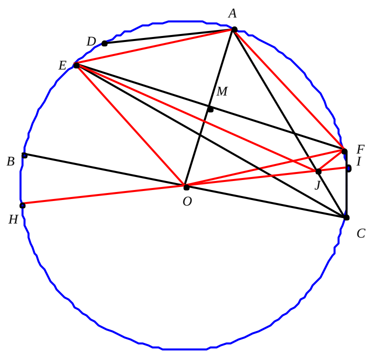
$\angle AJO=\angle BOH+\angle DOB=\angle DOH=\angle AOI$

$=\angle AOJ$。由此可知 $\overline{OA}=\overline{AJ}$。又因

$\overline{OA}=\overline{OF}=\overline{OE}$，所以

$\overline{AJ}=\overline{OE}=\overline{OF}=\overline{AE}=\overline{AF}$，因而由引理可知，$J$ 為 ΔCEF 的內心。

【吳哲宇同學的解法】：



(1) 我們先證明 J 在 $\overline{AC}$ 上。不妨設 E 在弧 AB 上，F 在弧 ACB 上(如圖所示)；因為 D 為弧 AB 的中點，所以 $\angle BOD=\angle AOD$。又 $\angle ACO=\frac{1}{2}\angle AOB=\angle AOD=\angle BOD$，所以 $\overline{AC}\,//\,\overline{OD}$。然而 $\overline{AD}$，平行 $\overline{OJ}$ 所以 $ADOJ$ 為平行四邊形。設圓 Γ 的半徑為 R，則 $\overline{AJ}=\overline{OD}=R$。因為 $\angle AOB<120°$，所以 $\angle AOC>60°$。又 $\overline{OA}=\overline{OC}$，所以 ΔAOC 為等腰三角形，且頂角大於 $60°$，因而底角小於 $60°$；由此可知在 ΔAOC 中，$\angle AOC>60°>\angle ACO$，因此 $\overline{AC}>\overline{AO}=R$。又 $\overline{AJ}=R$，所以 J 在 $\overline{AC}$ 上。

(2) 設 $\overline{AO}$ 的中點為 M。因為 $\overline{EF}$ 為 $\overline{AO}$ 的中垂線，所以 $\overline{AF}=\overline{OF}=R=\overline{OE}=\overline{AE}=\overline{AJ}$ (因而 F 在劣弧 AC 上)。由 $\overline{AE}=\overline{AF}$ 知弧 AE=弧 AF，所以 $\angle JCE=\angle JCF$。又由 $\overline{AF}=\overline{AJ}$ 可知 $\angle AFJ=\angle AJF$，因此

$\angle AFE+\angle EFJ=\angle JFC+\angle FCJ \Rightarrow$

$\frac{1}{2}$ 弧 $AE+\angle EFJ=\angle JFC+\frac{1}{2}$ 弧 $AF \Rightarrow$

$\angle EFJ=\angle JFC$。

由 $\overline{AJ}=\overline{AE}$ 可知 $\angle AEJ=\angle AJE$，因此

$\angle AEF+\angle FEJ=\angle CEJ+\angle JCE \Rightarrow$

$\frac{1}{2}$ 弧 $AF+\angle FEJ=\angle CEJ+\frac{1}{2}$ 弧 AE

$\Rightarrow \angle FEJ=\angle CEJ$。

所以 J 為 ΔCEF 的內心。

【問題三】：【試題委員會公布的參考解答】：

【參考解答一】：顯示若 m，n 滿足所求，則 $n<m$。

步驟一：我們證明 $f(x)=x^m+x-1$ 可被 $g(x)=x^n+x^2-1$ 在 $Z[x]$ 中整除。事實上因為 $g(x)$ 的領導係數為 1，所以 $f(x)/g(x)=q(x)+r(x)/g(x)$，其中 $\deg(r)<\deg(g)$。餘式 $r(x)/g(x)$ 在 $x\to\infty$ 時會驅近於 0。就另一觀點而言，存在無限多個整數 a 可使得 $f(a)/g(a)$ 為整數，所以存在無限多個整數 a 可使得 $r(a)/g(a)=0$，因而 $r(x)$ 為零函數。故，結論成立；特別，對所有的整數 a，$f(a)/g(a)$ 恆為整數。

步驟二：因為 $f(x)$ **與** $g(x)$ **在** $[0,1]$ **的值域均為** $[-1,1]$**，且在** $[0,1]$ **上為遞增，所以** $f(x)$ **與** $g(x)$ **在** $(0,1)$ **內都有唯一的根。因為** $g(x)$ **整除** $f(x)$**，所以** $f(x)$ **與** $g(x)$ **有相同的根，不妨設此根為** a。

步驟三：我們利用這個 a **證明** $m<2n$。**若** $h(f)=f^2+f-1=0$**，則** $f=0.618\cdots$**，因為** f **在** $(0,1)$ **上遞增且** $f(f)<h(f)=0=f(a)$**，所以** $a>f$。**就另一觀點而言，若** $m\ge 2n$**，則** $1-a=a^m\le(a^n)^2=(1-a^2)^2$**，因而可得** $a(a-1)(a^2+a-1)\ge 0$。**這必須是** $a\le f$**，矛盾！**

步驟四：我們現在證明在 $m<2n$ **的情形下，只有唯一的一組解** $(m,n)=(5,3)$。**假設原問題有解，考慮** $a=2$**，並設** $d=g(2)=2^n+3$**，則** $-2^m\equiv 1 \pmod d$。**令** $m=n+k$**，其中** $1\le k<n$**，則** $-2^m\equiv(d-2^n)\times 2^k\equiv 3\times 2^k \pmod d$。

由此可知當 $1\le k<n-2$ **時，** $-2^m\not\equiv 1 \pmod d$**，所以無解。當** $k=n-1$**時，** $m=2n-1$**，** -2^m **模** d **最小的正餘數為** $3\times 2^{n-1}-d=2^{n-1}-3$**；由此可得當** $2^{n-1}-3=1$**時，** $n=3$**，因而** $m=5$。

等式 $a^5+a-1=(a^3+a^2-1)(a^2-a+1)$ **證明了** $(m,n)=(5,3)$ **確實為一組解。**

【參考解答二】：令 $m=n+k$。**可將** x^m+x-1 **表示為**

$$x^m+x-1=x^k(x^n+x^2-1)+x^k-x^{k+2}+x-1$$

$$=x^k(x^n+x^2-1)+(1-x)(x^{k+1}+x^k-1)。$$

故 x^n+x^2-1 **整除** x^m+x-1 **之充要條件為** x^n+x^2-1 **整除** $x^{k+1}+x^k-1$。**由勘根定理知** x^n+x^2-1 **有一實根** $a\in(0,1)$**，此亦為** $x^{k+1}+x^k-1$ **的根。因此得** $a^n+a^2-1=0$ **及** $a^{k+1}+a^k-1=0$。**但** $k+1\ge n$ **且** $k\ge 2$**，（若** $k=1$**，則** x^n+x^2-1 **整除** x^2+x-1**，不可能）。因此** $1=a^n+a^2\ge a^{k+1}+a^k=1$。**由於上式等號成立，而得** $n=k+1$**，且** $k=2$。**故** $n=3$。**又** $m=n+k$**，得** $m=5$。

【問題四】：【試題委員會公布的參考解答】：

(a) **注意若** d **是** n **的因數則** $\frac{n}{d}$ **亦是，因此**

$$D=\sum_{1\le i<k} d_i d_{i+1}=n^2\sum_{1\le i<k}\frac{1}{d_i d_{i+1}}\le n^2$$

$$\sum_{1\le i<k}\left(\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_{i+1}}\right)<\frac{n^2}{d_1}=n^2.$$

(b) **注意** $d_2=p, d_{k-1}=\frac{n}{p}, d_k=n$**，其中** p **表** n **的最小質因數。若** $n=p$ **則** $k=2$ **且** $D=p$ **為** n^2 **的因數。若** n **不是質數則** $k>2$**，且** $D>d_{k-1}d_k=\frac{n^2}{p}$。**這時若** D **為** n^2 **的因數，則** $\frac{n^2}{D}$ **亦是** n **的因數。但** $1<\frac{n^2}{D}<p$**，而與** p **是** n **的最小質因數矛盾。因此** D **為** n^2 **的因數之充要條件為** n **是質數。**

【周建宇同學的解法】：

(a) **因為** $d_1,d_2,\cdots,d_k$ **是正整數且** $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$**，所以** $d_2\ge 2$**，** $d_3\ge 3$**，** $\cdots$**，** $d_k\ge k$。**另一方面，因為** $d_1d_k=d_2d_{k-1}=\cdots=d_id_{k-i+1}=n$ **，** $\forall\ 1\le i\le k$**，所以**

$$d_i=\frac{n}{d_{k-i+1}}\le\frac{n}{k-i+1}，\ \forall\ 1\le i\le k。$$

因此，

$$
\begin{aligned}
D&=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k\\
&\le 1\cdot\tfrac{n}{k-1}+\tfrac{n}{k-1}\cdot\tfrac{n}{k-2}+\cdots+\tfrac{n}{2}\cdot n\\
&<n^2\left(\tfrac{1}{k-1}+\tfrac{1}{(k-1)(k-2)}+\cdots+\tfrac{1}{2}\right)\\
&=n^2\left(\tfrac{1}{k-1}+\left(\tfrac{-1}{k-1}+\tfrac{1}{k-2}\right)+\left(\tfrac{-1}{k-2}+\tfrac{1}{k-3}\right)+\cdots+\left(\tfrac{-1}{3}+\tfrac{1}{2}\right)+\left(\tfrac{-1}{2}+1\right)\right)\\
&=n^2
\end{aligned}
$$

故，$D<n^2$。

(b) **我們證明 D 為 n^2 的因數若且唯若 n 是質數。**

當 n 是質數，$k=2$，$d_1=1$，$d_2=n$，$D=d_1d_2=n$，所以 $D\mid n^2$。

當 n 不是質數，假設 p 是 n 最小的質因數，則 p 是 n 除了 1 以外最小的因數，即 $d_2=p$。令 $q=n/p$，則 $d_{k-1}=q$。因為 $p\ne n$，所以 n 至少有 1, p, n 三個因數，即 $k\ge 3$。因此，

$D\ge d_1d_2+d_{k-1}d_k=p+qn>qn$。另一方面，設 n^2 的正因數為 d_1'，d_2'，$\cdots$，d_m'，其中 $1=d_1'<d_2'<\cdots<d_m'=n^2$。因為 n 與 n^2 的質因數相同，所以 $d_2'=p$，因而 $d'_{m-1}=\frac{n^2}{d_2'}=\frac{n^2}{p}=qn$。由此可知 $D>qn=d'_{m-1}>d'_{m-2}>\cdots>d_2'>d_1'$ 且 $D<n^2=d_m'$。故，D 不是 n^2 的因數。

【<u>黃紹倫</u>同學的解法】：因為 $n>1$，$n\in N$；d_1，d_2，$\cdots,d_k$ 為 n 所有的正因數，其中 $1=d_1<d_2<\cdots<d_k=n$。又因 $n>1$，所以 $k>1$。又

$d_i\ge d_{i-1}+1\ge d_{i-2}+2\ge\cdots\ge d_1+i-1=i$，$\forall\ i=1,2,\cdots,k$；

而 $d_id_{k-i+1}=n$，$\forall\ i=1,2,\cdots,k$；**故，** $d_i=n/d_{k-i+1}\le n/k-i+1$，$\forall\ i=1,2,\cdots,k$。

(a)

$$
\begin{aligned}
D&=d_kd_{k-1}+\cdots+d_3d_2+d_2d_1\\
&\le\tfrac{n}{1}\cdot\tfrac{n}{2}+\cdots+\tfrac{n}{k-2}\cdot\tfrac{n}{k-1}+\tfrac{n}{k-1}\cdot\tfrac{n}{k}\\
&=n^2\left(\tfrac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\tfrac{1}{(k-1)(k-2)}+\tfrac{1}{(k-1)(k-2)}\right)\\
&=n^2\left(\left(\tfrac{1}{1}-\tfrac{1}{2}\right)+\cdots+\left(\tfrac{1}{k-2}-\tfrac{1}{k-1}\right)+\left(\tfrac{1}{k-1}-\tfrac{1}{k}\right)\right)\\
&=n^2\left(1-\tfrac{1}{k}\right)<n^2
\end{aligned}
$$

(b) **若 $D\mid n^2$，設 $D=\frac{n^2}{d}$，其中 $d>1$（因為 $D<n^2$），且 $d\mid n^2$。設 p 是 n 最小的質因數 則 $d\ge p$。因為 p 是 n 最小的質因數，所以 $d_{k-1}=n/p$。由此可得**

$$D=d_1d_2+d_2d_3+\cdots+d_{k-1}d_k\ge d_{k-1}d_k=\tfrac{n^2}{p}\ge\tfrac{n^2}{d}=D$$

。

上式等號成立若且唯若 $k=2$ 且 $p=d$。又 p 是 n 的質因數，所以 n 只有 1，p 兩個因數，即 $n=p$ 為質數。反之，若 $n=p$ 為質數，則 $d_1=1$，$d_2=p$，因而 $D=d_1d_2=p$。因此，$D\mid n^2$。故，所有使得 $D\mid n^2$ 之整數 n 為質數。

【問題五】：【試題委員會公布的參考解答】：

以 $x=y=z=0$ 代入

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t))=f(xy-zt)+f(xt+yz)\qquad\cdots\cdots(*)$$

得 $2f(0)(f(0)+f(t))=2f(0)$。**解得** $f(0)=0$ **或** $f(t)=1-f(0)$。**若** $f(0)\ne 0$，**則** $f(0)=1-f(0)$，**即** $f(0)=\dfrac{1}{2}$，**故得** $f(t)=\dfrac{1}{2}$。

以下假設 $f(0)=0$。**以** $z=t=0$ **代入**(*)**中，得** $f(xy)=f(x)f(y)$　　$\cdots\cdots(**)$

故 $f(1)=f(1)^2$，**因此** $f(1)=0$ **或** 1。**若** $f(1)=0$，**則由**(**)**可得** $f(x)=f(1)f(x)=0$。

以下假設 $f(1)=1$。**以** $x=0,y=t=1$ **代入**(*) **中，得** $2f(z)=f(-z)+f(z)$，**故**

$f(-z)=f(z)$，即 f 為偶函數。其次，若 $u\ge 0$，表 $u=v^2$，其中 v 為非負整數，由(**)得 $f(u)=f(v^2)=f(v)^2\ge 0$。因 f 為偶函數，$f(x)\ge 0$ 對任意實數 x 都成立。以 $t=x, z=y$ 代入(*)中，得 $(f(x)+f(y))^2=f(x^2+y^2)$。假設 $a\ge b\ge 0$，表 $a-b=s^2, b=r^2$，則 $f(a)=f(r^2+s^2)\ge f(r)^2=f(r^2)=f(b)$，即 $f(a)\ge f(b)$。

以 $y=z=t=1$ 代入(*)中，得 $2(f(x)+1)=f(x-1)+f(x+1)$。由上述遞迴關係可得 $f(n)=n^2$ 對所有非負整數 n 成立。由(**)，$1=f(1)=f(m\cdot\frac{1}{m})=f(m)f(\frac{1}{m})=m^2f(\frac{1}{m})$，得。$f(\frac{1}{m})=\frac{1}{m^2}$。據此易證得 $f(\frac{n}{m})=(\frac{n}{m})^2$，即 $f(r)=r^2$ 對所有正有理數皆成立。最後證明 $f(x)=x^2$。假設存在正實數 c 使得 $f(c)>c^2$，選取正有理數 d 使得 $f(c)>d^2>c^2$，則 $f(c)>f(d)>c^2$，由於 f 是遞增函數，$c\ge d$，此與 $d^2>c^2$ 矛盾；同理 $f(c)<c^2$ 的情形亦不可能。因 f 為偶函數，故 $f(x)=x^2$ 對所有實數 x 皆成立。

由以上的討論 f 有三類，$f(x)=\frac{1}{2}$，$f(x)=0$，以及 $f(x)=x^2$。這三類顯然滿足所給的函數方程。

【周建宇同學的解法】：已知

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t)) = f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

$\forall\ x,y,z,t\in R$ 皆成立。 (A)

以 $y=t=0$ 代入(A)式，可得

$2f(0)\big(f(x)+f(z)\big)=2f(0)$。

若 $f(0)\ne 0$，則 $f(x)+f(z)=1$，$\forall\ x,z\in R$。代入 $z=x$，則可得 $f(x)=\frac{1}{2}$，$\forall\ x\in R$。

代回驗算得 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，合。

若 $f(0)=0$，代 $z=t=0$ 到(A)式，得

$f(x)f(y)=f(xy)$，$\forall\ x,y\in R$。 (B)

代 $y=1$ 到(B)式可得 $f(x)f(1)=f(x)$，$\forall\ x\in R$。若 $f(1)\ne 1$，則 $f(x)=0$，$\forall\ x\in R$。代回驗算得 $0\cdot 0=0+0=0$，合。

以下設 $f(1)=1$。以 $x=y=0$，$t=1$ 代入(A)式可得

$f(z)=f(-z)$，$\forall\ z\in R$， (C)

即 f 是偶函數。代 $y=x$ 到(B)式得 $f(x^2)=(f(x))^2$，$\forall\ x\in R$。故，$f(x)\ge 0$，$\forall\ x\ge 0$，又因 f 是偶函數，所以 $f(x)\ge 0$，$\forall\ x\in R$。由(B)式又可得 $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right)=f(1)=1$，$\forall\ x\ne 0$，所以

$f(x)>0$，$\forall\ x>0$。 (D)

以下先考慮 $x,y,z,t>0$ 時的情形。先用數學歸納法證明 $f(x^n)=(f(x))^n$，$\forall\ n\in N$。

當 $n=1$ 時，$f(x)=f(x)$ 顯然成立。設當 $n=k$ 時，$f(x^k)=(f(x))^k$；當 $n=k+1$ 時，由(B)式可知 $f(x^{k+1})=f(x^k\cdot x)=f(x^k)\cdot f(x)=(f(x))^k\cdot f(x)=(f(x))^{k+1}$；故，$f(x^n)=\big(f(x)\big)^n$，$\forall\ n\in N$。

又 $\left(f(x^{\frac{n}{m}})\right)^m=f\left((x^{\frac{n}{m}})^m\right)=f(x^n)=(f(x))^n$，即 $f(x^r)=(f(x))^r$，$\forall\ r\in Q$，$r>0$。又由(B)式 $f(x^r)f(x^{-r})=1$，所以 $f(x^{-r})=(f(x^r))^{-1}=(f(x))^{-r}$ 且 $f(x^0)=f(1)=1=(f(x))^0$；故，

$f(x^r)=(f(x))^r$，$\forall\ r\in Q$。 (E)

以 $x=y=z=t=1$ 代入(A)式可得

$(1+1)(1+1)=0+f(2)$，即 $f(2)=4$。將此代入(E)式得

$$f(2^r)=4^r=2^{2r}，\ \forall\ r\in Q。 \qquad (F)$$

以 $z=y$， $t=x$ 代入(A)式可得，

$\left(f(x)+f(y)\right)^2=f(xy-xy)+f(x^2+y^2)=f(x^2+y^2)$，又 $\left(f(x)+f(y)\right)^2=(f(x))^2+2f(x)f(y)+(f(y))^2$，則由(D)式可知

$f(x^2+y^2)=\left(f(x)+f(y)\right)^2>(f(x))^2=f(x^2)$，$\forall\ x,y\neq 0$。

由此可知當 $x>y>0$ 時，

$$f(x)>f(y)>0。 \qquad (G)$$

現在用反證法證明 $f(x)=x^2$，$\forall\ x>0$。若存在一個 $w>0$，使得 $f(w)=w'\neq w^2$；設 $w'>w^2$，則 $\log_2 w'>\log_2 w^2$。存在足夠大的 n，使得 $n(\log_2 w'-\log_2 w^2)>2$，

即 $n\log_2 w'-n\log_2 w^2>2$。所以存整數 m，使得 $n\log_2 w'>2m>n\log_2 w^2$。由此可得

$\log_2 w'>\frac{2m}{n}>\log_2 w^2$，因而 $w'>2^{\frac{2m}{n}}>w^2$。由(F)式知 $2^{\frac{2m}{n}}=f(2^{\frac{m}{n}})$，又 $w'=f(w)$ 且 $w'>2^{\frac{2m}{n}}$，即 $f(w)>f(2^{\frac{m}{n}})$。由(G)式知 $w>2^{\frac{m}{n}}$，此與 $2^{\frac{2m}{n}}>w^2$ 矛盾！同理，若 $w'<w^2$，可找到 $m\in Z$，$n\in N$ 使得 $w^2>2^{\frac{2m}{n}}>w'$，由此可得 $f(2^{\frac{m}{n}})>f(w)$，因而 $2^{\frac{m}{n}}>w$，此又與 $w^2>2^{\frac{2m}{n}}$ 矛盾！故，$f(x)=x^2$，$\forall\ x>0$。因為 f 是偶函數且 $f(0)=0$，故 $f(x)=x^2$，$\forall\ x\in R$。代回驗算 $(x^2+z^2)(y^2+t^2)=(xy-zt)^2+(xt+yz)^2$，合。所以本題有三個解:

$f(x)=\frac{1}{2}$，$\forall\ x\in R$，或 $f(x)=0$，$\forall\ x\in R$，或 $f(x)=x^2$，$\forall\ x\in R$。

【高奕豪同學的解法】：原題設為

$$(f(x)+f(z))(f(y)+f(t)) = f(xy-zt)+f(xt+yz)$$

，$\forall\ x,y,z,t\in R$ 皆成立。 (A)

以 $x=y=z=t=0$ 代入(A)式可得，

$2f(0)\cdot 2f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$ 或

$f(0)=\frac{1}{2}$。

情況一：$f(0)=\frac{1}{2}$。以 $x=z=0$ 代入(A)式可得，$\left(f(0)+f(0)\right)\cdot\left(f(y)+f(t)\right)=f(0)+f(0)$，因而 $f(y)+f(t)=1$，$\forall\ y,t\in R$。再以 $y=t$ 代入可得 $f(t)=\frac{1}{2}$，$\forall\ t\in R$。代回驗算 $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$，合。所以 $f(x)=\frac{1}{2}$，$\forall\ x\in R$ 為一解。

情況二：考慮 $f(0)=0$。

以 $x=y=0$ 代入(A)式可得，

$$f(z)\cdot f(t)=f(-zt)。 \qquad (1)$$

以 $x=t=0$ 代入(A)式可得，

$$f(z)\cdot f(y)=f(yz)。 \qquad (2)$$

在(1)中代 $t=y$ 可得 $f(z)\cdot f(y)=f(-zy)$，將此與(2)聯立可得 $f(x)=f(-x)$，$\forall\ x\in R$，即 f 為偶函數；因此，以下我們僅需考慮 $x\geq 0$ 之情形。

由(2)可知 $f(a)f(b)=f(ab)$，$\forall\ a,b\in R$。因此，$f(1)f(x)=f(x)$，$\forall\ x\in R$；此時有以下兩種情形：$f(1)\neq 1$ 或 $f(1)=1$。

(i) $f(1)\neq 1$。由此可得 $f(x)=0$，$\forall\ x\in R$。回驗算 $0\cdot 0=0+0=0$，合。所以 $f(x)=0$，$\forall\ x\in R$ 為一解。

(ii) $f(1)=1$。以 $x=y=z=t=1$ 代入(A)式可得，$2f(1)\cdot 2f(1)=f(0)+f(2)$；所以 $f(2)=4$。以 $y=z=t=1$ 代入(A)式可得，$\left(f(x)+1\right)\cdot 2f(1)=f(x-1)+f(x+1)$，所以

$f(x+1)=2f(x)+2-f(x-1)$，$\forall\ x\in R$。現在我們以數學歸納法證明：$f(n)=n^2$，$\forall\ n\in N$。由前知 $n=1,2$ 時成立；設 $n=k-1,k$ 時成立，則當 $n=k+1$ 時，

$f(k+1)=2f(k)+2-f(k-1)=2k^2+2-(k-1)^2=(k+1)^2$。

所以由數學歸納法知 $f(n)=n^2$，$\forall\ n\in N$。

令 $x=\frac{q}{p}\in R^+$，其中 $p,q\in N$，則 $f(x)\cdot f(p)=f\left(\frac{q}{p}\cdot p\right)=f(q)$；所以

$$f(x)=\frac{f(q)}{f(p)}=\frac{q^2}{p^2}=x^2。$$

故，$f(x)=x^2$，$\forall\ x\in R^+$ 成立。以 $z=y$，$t=x$ 代入(A)式可得，

$\left(f(x)+f(y)\right)^2=f(0)+f(x^2+y^2)=f(x^2+y^2)$，然而 $(f(x))^2=f(x^2)$，所以可取 $x,y\in R^+$，$f(x)=\left(f(\sqrt{x})\right)^2>0$，$f(y)=\left(f(\sqrt{y})\right)^2>0$（因為若存在 $x\in R^+$，使得 $f(x)=0$，則 $f(1)=f(x)f(\frac{1}{x})=0$，不合）。所以 $f(x^2+y^2)>f(x^2)$，$\forall\ x,y\in R^+$，因而 f 在 $x\geq 0$ 是嚴格遞增函數。

假設存在無理數 $r\in R^+$，使得 $f(r)\neq r^2$，則 $f(r)>r^2$ 或 $f(r)<r^2$。

(a)若 $f(r)>r^2$，令 $\sqrt{f(r)}=d$，則 $f(r)=d^2$，因而 $d>r$。存在 $q\in Q^+$，使得 $r<q<d$；所以 $f(r)<f(q)=q^2<d^2$。由此可得 $f(r)<d^2$，不合。

(b)若 $f(r)<r^2$,令 $\sqrt{f(r)}=d'$，則 $f(r)=d'^2$，因而 $d'<r$。存在 $q'\in Q^+$,使得 $d'<q'<r$；所以 $f(q')<f(r)$。由此可得 $q'^2<d^2$，$q'<d$，不合。

綜以上可得 $f(r)=r^2$，$\forall\ r\in R^+$；再由 f 為偶函數，可得 $f(x)=x^2$，$\forall\ x\in R$。代回驗算

$\left(f(x)+f(z)\right)\left(f(y)+f(t)\right)=\left(x^2+z^2\right)\left(y^2+t^2\right)$

$=x^2y^2+x^2t^2+z^2y^2+z^2t^2$，

$f(xy-zt)+f(xt+yz)=\left(xy-zt\right)^2+\left(xt+yz\right)^2$

$=x^2y^2+z^2t^2+x^2t^2+y^2z^2$。

所以本題有三個解：

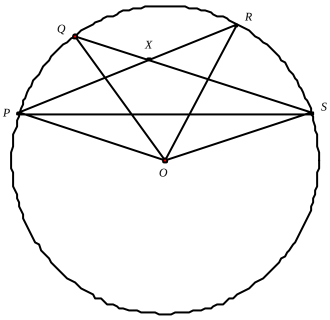
$f(x)=\frac{1}{2}$，$\forall\ x\in R$，或 $f(x)=0$，$\forall\ x\in R$，或 $f(x)=x^2$，$\forall\ x\in R$。

【問題六】:【試題委員會公布的參考解答】:

我們利用下列引理證明本命題：設 Ω 是一個半徑為 r 圓，弦 $\overline{PR}$，$\overline{QS}$ 交於 X 點，使得 $\angle PXQ=\angle RXS=2a$，則

弧長 $PQ+$ 弧長 $RS=4ar$。

【引理證明】: 如圖一所示，設 O 為圓 Ω 的圓心；$\angle POQ=2l$，$\angle ROS=2m$；則由圓周角與圓心角的關係可知 $\angle QSP=l$，$\angle RPS=m$。所以 $\angle RXS=2a=l+m$，因而弧長 $PQ+$ 弧長 $RS=4ar$。



(圖一)

【原命題之證明】: 以某一個半徑為 r 的大圓 Ω，將所有給定的圓 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdots,\Gamma_n$ 包含在其內部。考慮兩個圓 Γ_i，Γ_j，其圓心分別為 O_i，O_j。由給定的條件知 Γ_i，Γ_j 不相交，並設 $\overline{PR}$ 與 $\overline{QS}$ 為此二圓內公切線的夾角為 $2a$ (如圖二所示)。由此可得 $\overline{O_iO_j}=2\csc a$，因而 $a\geq\sin a=\frac{2}{O_iO_j}$。由引理可得

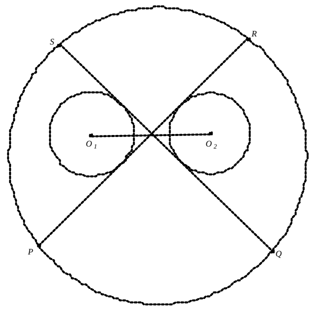
弧長 PQ+ 弧長 RS $=4ar\ \geq \dfrac{8r}{O_iO_j}$

因此，$\dfrac{1}{O_iO_j}\leq \dfrac{\text{弧長 } PQ+\text{弧長 } RS}{8r}$。

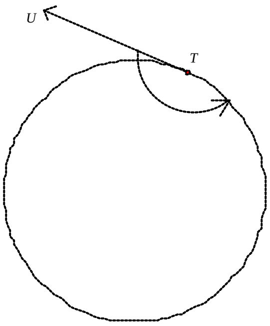
我們現在考慮所有這種序對 i，j 之弧長的和。我們宣稱圓 Ω 的每一點至多被這種弧覆蓋 $n-1$ 次。令 T 為圓 Ω 上的任一點，TU 為一半線切圓 Ω 於 T(如圖三所示)。

考慮此半線繞著 T 旋轉，如圖所示。在轉到某階段會首次交到某一對圓，重新定義這二圓為 Γ_1，Γ_2。因為此半線絕不會同時交三個圓，所以此半線轉到某一階段時將會與某個圓不再相交，不妨設與 Γ_1 不相交，且在其後的旋轉過程中將不會再與 Γ_1 相交。繼續這者旋轉，並重新定義所交到的圓之名稱為 Γ_3，$\Gamma_4,\cdots$ 等等。此半線至多只能交到 $(n-1)$ 對圓，Γ_1 與 Γ_2，Γ_2 與 Γ_3，$\cdots,\Gamma_{n-1}$ 與 Γ_n。因為 T 為圓 Ω 上的任意的一點，所以所有弧長的和不大於 $2(n-1)pr$，因而

$$\sum_{1\leq i<j\leq n}\frac{1}{O_iO_j}\leq \frac{(n-1)p}{4}。$$



（圖二）



（圖三）