# 翻 棋 分 類 問 題

葉均承

臺北市立第一女子高級中學

## 一、研究動機

有一個常常可以看到的“翻棋”問題：

*在 $3\times3$ 方格中有九顆棋子（棋子的正面是黑色，反面是白色)，每次把某一行或某一列的棋子全部翻面叫作一次 A 操作，請問可否經過有限次的 A 操作，將某個圖形中的棋子都變成黑色?*

一般討論數學遊戲的書中把上述的問題從 $3\times3$ 方格推廣到 $n\times n$ 方格。另外每次把某一行或某一列或某一個對角線的棋子全部翻面叫作一次 B 操作，也有不少的書把上述的問題中 A 操作改為 B 操作來討論。

如果經過有限次 A 操作(或 B 操作)可以把圖 X 變成圖 Y，則我們稱圖 X 與圖 Y 為相同 A-類（或相同 B-類)，否則圖 X 與圖 Y 屬於不同的 A-類。沒有書籍討論到一般 $n\times n$ 方格翻棋分類的問題，所謂“$n\times n$ 方格翻棋分類問題”是問：

*所有的 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形到底可以分成多少個不同的 A-(或 B-)類?*

在本篇論文裡，除了能仔細研究這個問題，將所有的 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形分類(A-類或 B-類)之外，我還把研究翻棋分類問題由平面 $n\times n$ 方格推廣到立體 $n\times n\times n$ 方格。在討論立體 $n\times n\times n$ 方格翻棋分類問題時，我們需要考慮到 C 操作。所謂一次 C 操作是指每次把某個平面上的某一行或某一列或某一個對角線的棋子全部翻面。將所有 $3\times3\times3$ 方格和所有 $4\times4\times4$ 方格的棋子圖形分類(C-類)。

## 二、研究過程

### 1. 將所有的 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形分成不同的 A-類

為了方便起見，我們把 $n\times n$ 方格中格子的位子編號為（$i, j$) 其中 $1\le i, j\le n$。(見圖一)。把第 i 列的棋子全部翻面叫作 $x_i$ 操作；把 j 行的棋子全部翻面叫作 $y_j$ 操作。A 操作是指 $x_i$ 操作或 $y_j$ 操作。令圖 X 為一個 $n\times n$ 方格棋子圖形，如果圖 X 的最上一列及最左邊的一行的棋子都是白色，則我們稱圖 X 為標準 A 圖形（見圖二)。圖二中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色，標準 A 圖形共有 $2^{(n-1)^2}$ 種。

| | $y_1$ 操作 ↓ | $y_2$ 操作 ↓ | … | $y_n$ 操作 ↓ |
|---|---|---|---|---|
| $x_1$ 操作 → | (1,1) | (1,2) | … | (1,n) |
| $x_2$ 操作 → | (2,1) | (2,2) | … | (2,n) |
| … | … | … | … | … |
| $x_n$ 操作 → | (n,1) | (n,2) | … | (n,n) |

圖一

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | (2,2) | … | (2,n) |
| … | … | … | … |
| w | (n,2) | … | (n,n) |

圖二 標準 A 圖形(w 代表白色)

**引理一：**

**令圖 X 為一個 $n \times n$ 方格棋子圖形，經過有限次 A 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 A 圖形。**

**證明：**

如果圖 X 中方格(i,1) 的棋子顏色是黑色，則我們利用 $x_i$ 操作 (“列翻面”)來把最左邊一行的方格(i,1) 的棋子變成白色，但是圖形的最左邊一行其餘方格的棋子都是不變。再來若圖 X 中方格(1,j) 的棋子顏色是黑色，其中 j > 1，則我們利用 $y_j$ 操作 (“行翻面”) 來把最上一列的方格(1,j) 的棋子變成白色，但是圖形的最上一列其餘方格的棋子及最左邊一行其餘方格的棋子都是不變。這樣我們把圖 X 變成標準 A 圖形。

由引理一，我們可以把問題從所有 $2^{n^2}$ 的圖形分類縮減到 $2^{(n-1)^2}$ 個標準 A 圖形分類。

**引理二：**

**令 $M(i,j;k,l)$ 為 $n \times n$ 方格中四個方格 $(i,l),(i,k),(j,l),(j,k)$ 的棋子所成的集合，其中 $i \neq j, k \neq l$ （見圖三黑色部份），則圖 X 經過有限次 A 操作後，圖 X 中任何一個 $M(i,j;k,l)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不變。**

| (1,1) | (1,2) | … | (1,k) | … | (1,l) | … | (1,n) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (2,1) | (2,2) | … | (2,k) | … | (2,l) | … | (2,n) |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| (i,1) | (i,2) | … | (i,k) | … | (i,l) | … | (i,n) |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| (j,1) | (j,2) | … | (j,k) | … | (j,l) | … | (j,n) |
| … | … | … | … | … | … | … | … |
| (n,1) | (n,2) | … | (n,k) | … | (n,l) | … | (n,n) |

**圖三．黑色的方格所成的集合 $M(i,j;k,l)$**

**證明：**

由於經過一次 $x_i$ 操作， $x_j$ 操作， $y_k$ 操作或 $y_l$ 操作後，結果是把圖 X 中 $M(i,j;k,l)$ 裡的兩個棋子翻面;經過一次 $x_s$ 操作或 $y_t$ 操作 $s \neq i,j, t \neq k,l$ 後，結果是把圖 X 中 $M(i,j;k,l)$ 裡零個棋子翻面。所以經過有限次 A 操作後，圖 X 中任何一個 $M(i,j;k,l)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性保持不變。

**定理一：**

**所有的 $2^{n^2}$ 個 $n \times n$ 方格棋子圖形恰好可以分成 $2^{(n-1)^2}$ 不同的 A-類。**

**證明：**

令圖 X 與圖 Y 為兩個不同的標準 A 圖形，其中圖 X 與圖 Y 中 $(i,j)$ 棋子的顏色不同。則圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理二，經過有限次 A 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 A-類。所以我們證明 $2^{(n-1)^2}$ 種不同的標準 A 圖形都屬於不相同的 A-類。由引理一，我們證明所有的 $2^{n^2}$ 個 $n \times n$ 方格棋子圖形恰好可以分成 $2^{(n-1)^2}$ 不同的 A-類。

## 2.將所有的 $2^{n^2}$ 個 $n \times n$ 方格棋子圖形分成不同的 B-類

把 $n \times n$ 方格棋子圖形中從左上角(1,1)到右下角(n,n)對角線的棋子全部翻面叫作 $d_1$ 操作;把從右上角(1,n)到左下角(n,1)對角線的棋子全部翻面叫作 $d_2$ 操作。B 操作是指 $x_i$ 操作或 $y_j$ 操作或 $d_1$ 操作或 $d_2$ 操作。顯然由定義可以知道 A 操作也是 B 操作。令圖 X 為一個 3×3 方格的棋子圖形，如果圖 X 中除

了(3,2)和(3,3)之外的棋子都是白色，則我們稱圖 X 為標準 $B_3$ 圖形（見圖四），圖四中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色。標準 $B_3$ 圖形共有四種。

| | | |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | w | w |
| w | | |

圖四 標準 $B_3$ 圖形
（w 代表白色）

引理三：

令圖 X 為一個 3×3 方格的棋子圖形，我們可以把圖 X 中

(i)(2,2)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。

(ii)(2,3)及(3,2) 的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。

證明：

(i) 經過 $y_1, y_3, x_2, d_1, d_2$ 操作後，結果只是圖 X 中(2,2)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。(ii) 經過 $y_1, x_2, x_3, d_1$ 操作後，結果剛好是圖 X 中(2,3)及(3,2)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。

引理四：

令圖 X 為一個 3×3 方格的棋子圖形，經過有限次 B 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 $B_3$ 圖形。

證明：

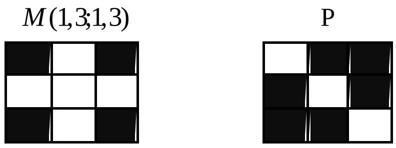
由引理一，我們可以把圖 X 變成同類的標準 A 圖形。由引理三，我們可以把圖 X 中(2,2) 和(2,3)的棋子變成白色，但是圖形的最上一列及最左邊一行的棋子都是不變。這樣我們把圖 X 中除了(3,2)和(3,3)之外的棋子都是白色。也就是標準 $B_3$ 圖形。

定理二：

所有的 $2^9$ 個 3×3 方格的棋子圖形恰好可以分成四種不同的 B-類。

證明：

令圖 X 為一個標準 $B_3$ 圖形，令 P 為 3×3 方格中(1,2),(1,3), (2,1),(2,3),(3,1),(3,2)的棋子所成的集合。由於經過一次 B 操作後，結果只是把圖 X 中 P 與 $M(1,3;1,3)$ 裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，P 與 $M(1,3;1,3)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性保持不變（見圖五黑色部份）。所以我們證明四種標準 $B_3$ 圖形都屬於不相同的 B-類。由引理四，我們證明所有的 $2^9$ 個 3×3 方格棋子圖形恰好可以分成四不同的 B-類。



圖五

令圖 X 為一個 4×4 方格的棋子圖形，如果圖 X 中的最上一列，最左邊的一行及(2,4)的棋子都是白色，則我們稱圖 X 為標準 $B_4$ 圖形。圖六中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色（見圖六）。標準 $B_4$ 圖形共有 $2^8$ 種。

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | W |
| w | 1 | 2 | w |
| w | 3 | 4 | 5 |
| w | 6 | 7 | 8 |

圖六 標準 $B_4$ 圖形
（w 代表白色）

引理五：

令圖 X 為一個 4×4 方格的棋子圖形，我們可以把圖 X 中(2,3), (2,4), (3,2),(3,4),(4,2)和(4,3)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色都是不變。

證明：

經過 $y_1, x_2, x_3, x_4, d_1$ 操作後，結果只是

圖 X 中(2,3),(2,4),(3,2),(3,4), (4,2)和(4,3)的棋子全部翻面，但是其餘方格的棋子顏色都是不變。

引理六：

令圖 X 為一個 $4\times4$ 方格的棋子圖形，經過有限次 B 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 $B_4$ 圖形。

證明：

由引理一，我們可以把圖 X 變成同類的標準 A 圖形，也就是指圖形的最上一列及最左邊的一行的棋子都是白色。由引理五，我們可以把圖 X 中(2,3)的棋子變成白色。但是圖形的最上一列、最左邊一行方格內棋子的顏色都是不變這樣我們把圖 X 變成標準 $B_4$ 圖形。

引理七：

令圖 X 為一個 $4\times4$ 方格的棋子圖形，經過有限次 B 操作後，圖 X 中任何一個 $M(1,i;1,i)$ 或 $M(1,i;j,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不變，其中 i+j = n +1。

證明：

由引理二，經過一次 $x_s$ 操作或 $y_t$ 操作後，1≦s,t≦n，，結果是圖 X 中任何一個 $M(1,i;1,i)$ 或 $M(1,i;j,n)$，其中 i+j = n +1，裡的黑色棋子個數的奇偶性不變。經過一次 $d_1$ 操作後，結果是把圖 X 中 $M(1,i;1,i)$ 的兩個棋子和 $M(1,i;j,n)$ 零個棋子翻面。經過一次 $d_2$ 操作後，結果是把圖 X 中 $M(1,i;1,i)$ 的零個棋子和 $M(1,i;j,n)$ 兩個棋子翻面。所以經過一次 B 操作後，$M(1,i;1,i)$ 或 $M(1,i;j,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不變。因此經過有限次 B 操作後，圖 X 中任何一個 $M(1,i;1,i)$ 或 $M(1,i;j,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不變，其中 i+j = n +1。

定理三：

所有的 $2^{16}$ 個 $4\times4$ 方格的棋子圖形恰好可以分成 $2^8$ 不同的 B-類。

證明：

令圖 X 與圖 Y 為兩個不同標準 $B_4$ 圖形，其中圖 X 與圖 Y 中 $(i,j)$ 棋子的顏色不同。

(1)當 $(i,j)=(2,2),(3,3)$ 或 $(4,4)$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,i)$ $(n=4)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理七，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,i)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(2) 當 $(i,j)=(2,3)$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;j,n)$ $(n=4)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理七，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;j,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(3)當 $(i,j)=(3,4)$，則圖X與圖Y中 $M(2,3;1,4)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。經過一次B操作後，結果只是把圖X中 $M(2,3;1,4)$ 的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $M(2,3;1,4)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(4)當 $(i,j)=(4,2)$ 或 $(4,3)$ 或 $(3,2)$，令 $P(i,j)$ 為 $4\times4$ 方格中 $(i,j),(1,j),(1,4),(2,4),(2,1),(i,1)$ 的棋子所成的集合( $(i,j)=(4,2)$ 或 $(4,3)$ 或 $(3,2)$ )，則圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ 裡

的黑色棋子個數的奇偶性不同。經過一次 B 操作後，結果只是把圖 X 中 $P(i,j)$ 的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。所以我們證明 $2^8$ 個標準 B $_4$ 圖形都屬於不相同的 B-類。由引理六，我們證明所有的 $2^{16}$ 個 $4\times 4$ 方格棋子圖形恰好可以分成 $2^8$ 不同的 B-類。

令圖 X 為一個 $n\times n$ $(n\geq 5)$ 方格棋子圖形，如果圖 X 的最上一列,最左邊的一行，(2,3) 及(2,n)的棋子都是白色，則我們稱圖 X 為標準 B $_n$ 圖形（見圖七），

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| w | w | w | …w | w |
| w | (2,2) | w | … | w |
| w | … | … | … | … |
| w | … | … | … | … |
| w | (n,2) | (n,3) | … | (n,n) |

**圖七 B $_n$ 圖形(w 代表白色)**

圖七中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色，標準B $_n$ 圖形共有 $2^{(n-1)^2-2}$ 種。這樣我們可以把問題從所有 $2^{n^2}$ 的圖形分類縮減到 $2^{(n-1)^2-2}$ 個標準 B 圖形分類。

**引理八：**

令圖 X 為一個 $n\times n$ $(n\geq 5)$ 方格的棋子圖形，經過有限次 B 操作後，我們可以保持圖 X 中恰好滿足下列條件之一的 $(x,y)$ 方格棋子顏色不變，但是其餘方格的棋子全部翻面。其中

(i) $(x=1)$ 或 $(y=1)$ 或 $(x=y)$;

(ii)(a)當 n 為偶數，$(x=1$ 或 $n)$ 或 $(y=1$ 或 $n)$ 或 $(x=y)$ 或 $(x+y=n+1)$;

(b)當 n 為奇數 $(x=1$ 或 $n)$ 或 $(y=1$ 或 $n)$ 或 ($x=y$ 但是 $x=y\neq\frac{n+1}{2}$), 或 ($x+y=n+1$ 但是 x≠y)。

**證明：**

(i)經過 $y_1,x_2,x_3,\ldots,x_n,d_1$ 操作後，結果只是圖 X 中 $(x=1)$ 或 $(y=1)$ 或( $x=y$ )的 $(x,y)$ 方格內棋子被翻面二次或沒翻面過，所以顏色不變，但是其餘方格內的棋子全部只被翻面一次，所以顏色改變。

(ii)經過 $y_1,y_n,x_2,x_3,\ldots,x_{n-1},d_1,d_2$ 操作後，結果只是

(a)當 n 為偶數，圖 X 中 $(x=1$ 或 $n)$ 或 $(y=1$ 或 $n)$ 或 $(x=y)$ 或 $(x+y=n+1)$ 的 $(x,y)$ 方格內棋子被翻面二次或沒翻面過，所以顏色不變，但是其餘方格內的棋子全部只被翻面一次，所以顏色改變;

(b)當 n 為奇數 ，圖 X 中 $(x=1$ 或 $n)$ 或 $(y=1$ 或 $n)$ 或 ($x=y$ 但是 $x=y\neq\frac{n+1}{2}$), 或 ($x+y=n+1$ 但是 x≠y) 的 $(x,y)$ 方格內棋子被翻面二次或沒翻面過，所以顏色不變，但是其餘方格內的棋子全部只被翻面一次，所以顏色改變。

**引理九：**

令圖 X 為 $n\times n$ ( $n\geq 5$ )方格的棋子圖形，經過有限次 B 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 B $_n$ 圖形。

**證明：**

由引理一，我們可以把圖 X 變成同類的標準 A 圖形。由引理八(i)，我們可以把圖 X 中 (2,n)的棋子變成白色，但是圖形的最上一

列 $(y=1)$及最左邊一行 $(x=1)$方格內棋子的顏色都是不變。由引理八(ii)，我們可以把圖 X 中方格 (2,3) 內的棋子變成白色，但是圖形的最上一列 $(y=1)$，最左邊一行 $(x=1)$及 (2,n) 方格內棋子的顏色都是不變。這樣我們把圖 X 變成標準 $B_n$ 圖形。

為了證明兩個不同標準 $B_n$ 圖形圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。我們會在棋子圖形中找到一些方格(恰好只包含標準 $B_n$ 圖形中一個灰色方格 $(i,j)$)。圖 X 與圖 Y 在這些方格裡的黑色棋子個數的奇偶性不同，而且經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 在這些方格裡的黑色棋子個數的奇偶性保持不變。我們將按照灰色方格 $(i,j)$ 的位置討論四類不同圖形 X。

**引理十：**

令$n\geq 5$為整數。當 n=2k+1 為奇數 且 i=j=k+1 時，令$C(n,n)$為$n\times n$方格的棋子圖形中八個方格(1,1),(1,3),(1,i),(1,n),(2,3),(2,n),(i,1),(i,i)所成的集合;當(i,j)不是上述情形時(即當 n 為偶數或當 n=2k+1 為偶奇數 且(i,j)≠(k+1, k+1))，令$P(i,j)$為$n\times n$方格的棋子圖形中六個方格(1,j),(1,n),(2,1), (2,n),(i,1),(i,j)所成的集合，$Q(i,j)$為六個方格(1,j),(1,3),(2,1),(2,3), (i,1),(i,j)所成的集合。$M(1,i;1,i)$ 為四個方格(1,1),(1,i),(i,1),(i,i)所成的集合，則經過有限次 B 操作後，圖 X 中任何一個$P(i,j)$，$Q(i,j)$，$C(n,n)$和$M(1,i;1,i)$裡的黑色棋子個數的奇偶性不變。

**證明：**

經過一次 B 操作後，結果只是把圖 X 中 $P(i,j)$，$Q(i,j)$，$C(n,n)$和$M(1,i;1,i)$裡的零個、兩個或肆個棋子顏色改變。所以經過有限次 B 操作後，$P(i,j)$，$Q(i,j)$，$C(n,n)$和$M(1,i;1,i)$裡的黑色棋子個數的奇偶性不變（見圖八，九，十）。

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | … | (1,i) | | | … | (1,2k+1) |
| (2,1) | | (2,3) | | | | | | (2,2k+1) |
| | | | | | | | | |
| … | | | … | … | | | … | … |
| (i,1) | | | … | (i,i) | | | … | (i,2k+1) |
| … | … | | … | … | | | … | … |
| … | … | | … | … | | | … | … |
| (2k+1,1) | | | … | (2k+1,i) | | | … | (2k+1,2k+1) |

**圖八　黑色方格所成的集合是**$C(n,n)$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | … | (1,j) | … | (1,n) |
| (2,1) | | | | | (2,n) |
| … | | … | … | … | … |
| (i,1) | | … | (i,j) | … | (i,n) |
| … | | … | … | … | … |
| (n,1) | | … | (n,j) | … | (n,n) |

**圖九．黑色方格所成的集合是**$P(i,j)$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| (1,1) | (1,2) | (1,3) | … | (1,j) | … | (1,n) |
| (2,1) | | (2,3) | | | | (2,n) |
| … | | … | … | … | … | … |
| (i,1) | | | … | (i,j) | … | (i,n) |
| … | | … | … | … | … | … |
| (n,1) | | | … | (n,j) | … | (n,n) |

**圖十．黑色方格所成的集合是**$Q(i,j)$

**定理四：**

當 $n\geq 5$，所有的 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格的棋子圖形恰好可以分成 $2^{(n-1)^2-2}$ 不同的 B-類。

**證明：**

令圖 X 與圖 Y 為兩個不同標準 $B_n$ 圖形，其中圖 X 與圖 Y 中 $(i,j)$ 棋子的顏色不同，其中方格 $(i,j)$ 是標準 $B_n$ 圖形中灰色方格。我們將按照灰色方格 $(i,j)$ 棋子的位置分成八種情形（見圖十一，十二），每一種情

形我們會在圖 X 與圖 Y 中找到一些相同位置的方格(恰好只包含標準 $B_n$ 圖形中一個灰色方格 $(i, j)$)。圖 X 與圖 Y 在這些方格裡的黑色棋子個數的奇偶性不同，而且經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中在這些方格裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w | w |
| w | 2 | w | 3 | 3 | 3 | 7 | w |
| w | 8 | 2 | 8 | 8 | 7 | 8 | 5 |
| w | 8 | 4 | 2 | 7 | 8 | 8 | 5 |
| w | 8 | 4 | 7 | 2 | 8 | 8 | 5 |
| w | 8 | 7 | 8 | 8 | 2 | 8 | 5 |
| w | 7 | 4 | 8 | 8 | 8 | 2 | 5 |
| w | 6 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 |

**圖十一 8x8 方格表的八種棋子位置**

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| w | w | w | w | w | w | w | | w |
| w | 2 | w | 3 | 3 | 3 | 3 | 7 | w |
| w | 8 | 2 | 8 | 8 | 8 | 7 | 8 | 5 |
| w | 8 | 4 | 2 | 8 | 7 | 8 | 8 | 5 |
| w | 8 | 4 | 8 | 1 | 8 | 8 | 8 | 5 |
| w | 8 | 4 | 7 | 8 | 2 | 8 | 8 | 5 |
| w | 8 | 7 | 8 | 8 | 8 | 2 | 8 | 5 |
| w | 7 | 4 | 8 | 8 | 8 | 2 | 2 | 5 |
| w | 6 | 4 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 2 |

**圖十二 9x9 方格表的八種棋子位置**

(1)當 n 為奇數 而且 $i = j = \frac{n+1}{2}$，則圖 X 與圖 Y 中 $C(n,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理十，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $C(n,n)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十二中(i,j)=(5,5) ,n=9，則 $M(2,4;1,3)$ 包含八個方格(1,1),(1,3),(1,5),(1,9),(2,3),(2,9),(5,1), (5,5))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(2)當 n 為偶數而 且 $i = j, i = 2,3,\ldots,n$ 或 當 n 為奇數 而 且 $i = j, i = 2,3,\ldots, \frac{n-1}{2}, \frac{n+3}{2}\ldots,n$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,i)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理十，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;1,i)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(3,3)，則 $M(1,3;1,3)$ 包含四個方格(1,1),(1,3),(3,1),(3,3))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(3)當 $i = 2, j = 4,5,\ldots,n-2$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(1,i;3,j)$ (即 $M(1,2;3,j)$)裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。經過一次 B 操作後，圖 X 中 $M(1,i;3,j)$ 裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，$M(1,i;3,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(2,4)，則 $M(1,2;3,4)$ 包含四個方格(1,3),(1,4),(2,3),(2,4))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(4)當 $j = 3, i = 4,5,\ldots,n-3$ 和 $n-1,n$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(2,i;1,j)$ (即 $M(2,i;1,3)$)裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。經過一次 B 操作後，圖 X 中 $M(2,i;1,j)$ 裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，$M(2,i;1,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(4,3)，則 $M(2,4;1,3)$ 包含四個方格(2,1),(2,3),(4,1),(4,3))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(5)當 $j = n, i = 3,4,\ldots,n-1$，則圖 X 與圖 Y 中 $M(2,i;1,j)$ (即 $M(2,i;1,n)$)裡的黑色棋子個

數的奇偶性不同。經過一次 B 操作後，圖 X 中 $M(2,i;1,j)$ 裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 B 操作後，$M(2,i;1,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(3,n) 則 $M(2,3;1,n)$ 包含四個方格(2,1),(2,n),(3,1),(3,n))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(6)當 $i=n, j=2$和$4,5,...,n-1$，則圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ （即 $P(n,j)$）裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理十，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(n,2)，則 $P(n,2)$ 包含六個方格(1,2),(1,n),(2,1), (2,n),(n,1),(n,2))所成的集合。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(7)當 $i+j=n+1$且$i\neq j, i=2,3,...,n-1$則圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理十，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $P(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(n-2,3)，則 $P(n-2,3)$ 包含六個方格(1,3),(1,n),(2,1), (2,n),(n-2,1),(n-2,3))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

(8)當 $(i,j)$ 是標準 $B_n$ 圖形中(圖七)灰色部份)，但不屬於(1)~(7)的方格。則圖 X 與圖 Y 中 $Q(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性不同。由引理十，經過有限次 B 操作後，圖 X 與圖 Y 中 $Q(i,j)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同(例如圖十一，十二中(i,j)=(3,2)，則 $Q(3,2)$ 包含六個方格(1,2),(1,3),(2,1),(2,3), (3,1),(3,2))。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 B-類。

所以我們證明 $2^{n^2}$ 個標準 $B_n$ 圖形都屬於不相同的 B-類。由引理九，我們證明所有的 $2^{n^2}$ 個 $4\times4$ 方格棋子圖形恰好可以分成 $2^{(n-1)^2-2}$ 不同的 B-類。

## 3.將所有的 $3\times3\times3$ 方格和所有 $4\times4\times4$ 方格的棋子圖形分成不同 C-類

在討論三維翻棋分類問題時，為了方便起見，我們把 $n\times n\times n$ 方格中格子的位子編號為（$i,j,k$)其中 $1\le i,j\le n$。（見圖十三）

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,1,1) | (1,2,1) | … | (1,n,1) |
| (2,1,1) | (2,2,1) | … | (2,n,1) |
| … | … | … | … |
| (n,1,1) | (n,2,1) | … | (n,n,1) |

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,1,2) | (1,2,2) | … | (1,n,2) |
| (2,1,2) | (2,2,2) | … | (2,n,2) |
| … | … | … | … |
| (n,1,2) | (n,2,2) | … | (n,n,2) |

…

| | | | |
|---|---|---|---|
| (1,1,n) | (1,2,n) | … | (1,n,n) |
| (2,1,n) | (2,2,n) | … | (2,n,n) |
| … | … | … | … |
| (n,1,n) | (n,2,n) | … | (n,n,n) |

圖十三

所謂一次 C 操作是指每次把某個平面上的某一行或某一列或某一個對角線的棋子全部翻面( $X=i$ 平面, $Y=j$ 平面, $Z=k$ 平面($1\le i,j,k\le n$) 或 $X=Y$ 平面，$X=Z$ 平面，$Y=Z$ 平面，或 $X+Y=n+1$ 平面，$X+Z=n+1$ 平面，或 $Y+Z=n+1$ 平面)。由定義顯然可以知道 C 操作是某個平面上的 B 操作。令 $R(i,j;k,l;s,t)$ 為 $n\times n\times n$ 方格中八個方格 $(i,k,s),(i,k,t),(i,l,s),(i,l,t),(j,k,s),(j,k,t),(j,l,s),(j,l,t)$，其中$i\neq j,k\neq l,s\neq t$。

| | | |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | w | w |
| w | w | w |

| | | |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | w | w |
| w | w | w |

| | | |
|---|---|---|
| w | w | w |
| w | w | w |
| w | w | |

圖十四　標準 $C_3$ 圖形(w 代表白色)

令圖 X 為一個 $3\times3\times3$ 方格的圖形，如果

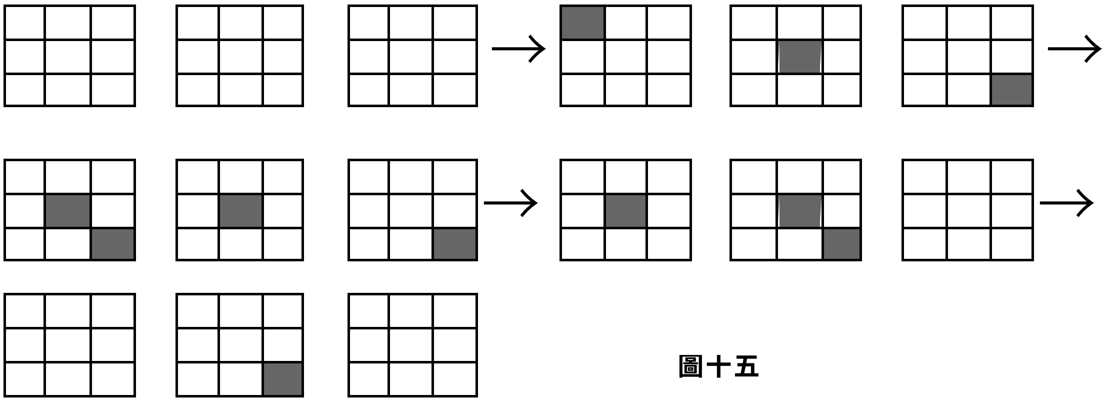
圖 X 中除了(3,3,3)之外的棋子都是白色，則我們稱圖 X 為標準 $C_3$ 圖形（見圖十四），圖九中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色。標準 $C_3$ 圖形共有 2 種。

**引理十一:**

令圖 X 為 3×3×3方格的棋子圖形，經過有限次 C 操作後，我們可以只把圖 X 中(3,3,2)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。

**證明：**

由下列的 C 操作 (黑色方格部份是指方格的棋子翻面)。



圖十五

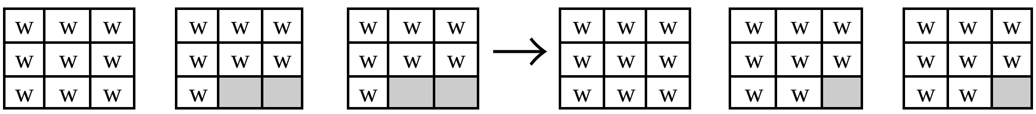
第一個操作是在 $X=Y$ 平面上之 $X=Y=Z$ 直線上方格的棋子全部翻面，第二個操作是在 $X=2$ 平面上之 $Y=2$ 直線上方格的棋子全部翻面，第三個操作是在 $X=3$ 平面上之 $Y=3$ 直線上方格的棋子全部翻面，由引理三，第四個操作是把 $Z=1$ 和 $Z=2$ 平面上之方格(2,2)的棋子全部翻面（見圖十五）。

**引理十二：**

令圖 X 為 3×3×3方格的棋子圖形，經過有限次 C 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 $C_3$ 圖形。

**證明：**

把圖 X 中線 $X=i,Y=j$ 的棋子全部翻面，我們可以把圖 X 中 $Z=1$ 平面的棋子都變成白色。由引理四，我們可以把圖 X 中 $Z=2$ 平面 $Z=3$ 平面的棋子圖形都變成標準 $B_3$ 圖形。由引理四，我們可以把圖 X 中 $X=3$ 平面的棋子圖形都變成標準 $B_3$ 圖形(見圖十六)。



圖十六(w 代表白色)

由引理十一，我們可以把圖形中(3,3,2)的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。這樣我們把圖 X 變成標準 $C_3$ 圖形。

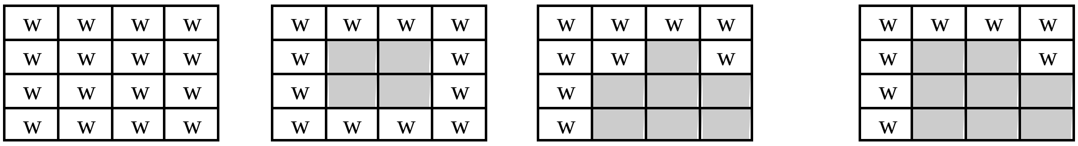
**定理五：**

所有的 $2^{27}$ 個 3×3×3 方格的棋子圖形恰好可以分成兩種不同的 C-類。

**證明：**

令圖 X 與圖 Y 為兩個不同標準 $C_3$ 圖形，其中圖 X 與圖 Y 中(3,3,3)棋子的顏色不同。經過一次 C 操作後，結果只是把圖 X 中 $R(1,3;1,3;1,3)$ 的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 C 操作後，圖 X 中 $R(1,3;1,3;1,3)$ 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。所以圖 X 與圖 Y 屬於不同的 C-類。所以我們證明 $2^{n^2}$ 個標準 $C_3$ 圖形都屬於不相同的 C-類。由引理十一，我們證明所有的 $2^{27}$ 個 $3\times3\times3$ 方格棋子圖形恰好可以分成兩種不同的 C-類。

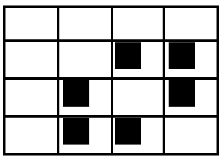
圖十二中灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色，其餘方格的棋子的顏色是白色，則我們稱這種圖形為標準 $C_4$ 圖形(見圖十七)。標準 $C_4$ 圖形共有 $2^{19}$ 種。




**圖十七　標準 $C_4$ 圖形(W 代表白色)**

**引理十三:**

令圖 X 為 $4\times4$ 方格的棋子圖形，經過有限次 C 操作後，我們可以只把圖 X 中六個方格(2,3)，(2,4)，(3,2)，(3,4)，(4,2)，(4,3)內的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。



**圖十八**

**證明：**

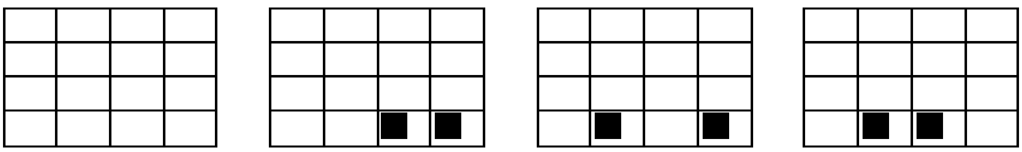
經過 $x_4, y_4, d_2$ 操作，我們只把圖 X 中六個方格(2,3)，(2,4)，(3,2)，(3,4)，(4,2)，(4,3)內的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變(見圖十八)。我們證明本引理。

**引理十四：**

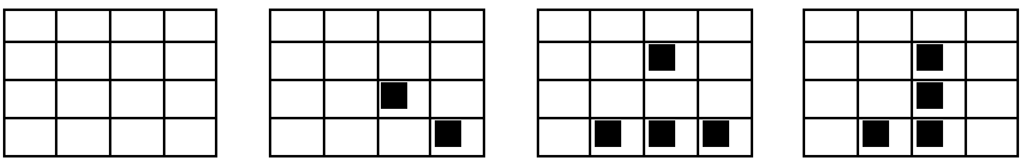
令圖 X 為 $4\times4\times4$ 方格的棋子圖形，經過有限次 C 操作後，我們可以只把圖 X 中 $R(2,3;2,4;3,4)$ 裡的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。

**證明：**

由引理下列的 C 操作(見圖十九，二十，二十一，黑色方格部份是指方格的棋子翻面)，我們證明本引理。



**圖十九**



**圖二十**

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | ■ | ■ | |
| | | | |
| | ■ | ■ | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | ■ | ■ | |
| | | | |
| | ■ | ■ | |

**圖二十一**

第一個操作是在 $X=4$ 平面上作引理十三之操作，第二個操作是在 $Y=3$ 平面上作引理十三之操作，第三個操作是在 $X=Y$ 平面上作引理十三之操作。

**引理十五：**

令圖 X 為 $4\times4\times4$ 方格的棋子圖形，經過有限次 C 操作後，我們可以把圖 X 變成標準 $C_4$ 圖形。

**證明：**

把圖 X 中線 $X=i,Y=j$ 中方格內的棋子全部翻面我們可以把圖 X 中 $Z=1$ 平面中方格內的棋子都變成白色（見圖二十二）。

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | |
| | | | |
| | | | |
| | | | |

**圖二十二 w 代表白色.**

由引理六，我們可以把圖 X 中 $Z=2$ 平面，$Z=3$ 平面和 $Z=4$ 平面的棋子圖形都變成標準 $B_4$ 圖形（見圖二十三）。

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | |
| w | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | |
| w | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | |
| w | | | |

**圖二十三 w 代表白色.**

由引理六，我們可以把圖 X 中 $X=3$ 平面，$X=4$ 平面，$Y=2$ 平面和 $Y=3$ 平面的棋子圖形都變成標準 $B_4$ 圖形（見圖二十四）。

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |
| w | w | w | w |

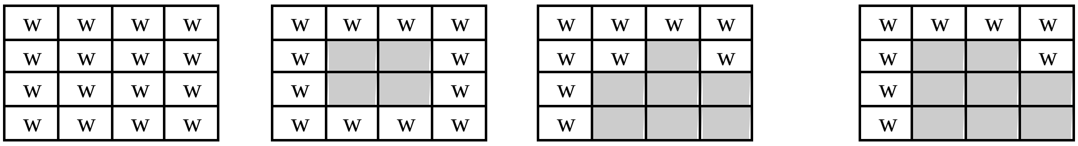
| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | w |
| w | w | w | w |

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | |
| w | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| w | w | w | w |
| w | | | w |
| w | | | |
| w | | | |

**圖二十四 w 代表白色.**

再作引理十四之操作，我們可以只把圖 X 中 $Z=3$ 平面上的 (2,2,3),(2,3,3),(4,2,3),(4,3,3) 及 $Z=4$ 平面上的四個方格 (2,2,4),(2,3,4),(4,2,4),(4,3,4)內的棋子翻面，但是其餘方格的棋子顏色不變。所以我們可以把圖 X 中 $Z=3$ 平面上之方格(2,2,3)的棋子翻面，但是圖二十四中方格內的白色棋子(方格內標號為 w 的部份)不變。這樣我們把圖 X 變成標準 $C_4$ 圖形(見圖二十五)。



**圖二十五　w 代表白色，灰色部份是指棋子的顏色可能是黑色也可能是白色**

**定理六：**

**所有的 $2^{64}$ 個 $4\times4\times4$ 方格棋子圖形可以分成 $2^{19}$ 個不同的 C-類。**

**證明：**

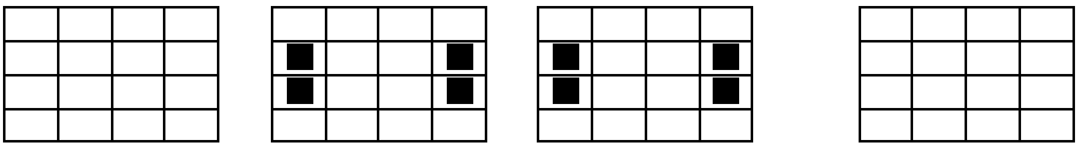
**令圖 X 與圖 Y 為 $4\times4\times4$ 方格的標準 $C_4$ 圖形，其中圖 X 與圖 Y 中 $(i,j,k)$ 棋子的顏色不同。**

(i) **當** $(i,j,k)=(2,2,2),(3,3,2)$，**則圖 X 與圖 Y 中** $R(1,i;1,j;1,k)$ **裡的黑色棋子個數的奇偶性不同，而且經過一次 C 操作後，只有把圖 X 中** $R(1,i;1,j;1,k)$ **裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 C 操作後，**$R(1,i;1,j;1,k)$ **裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。因此圖 X 與圖 Y 屬於不同的 C-類。**

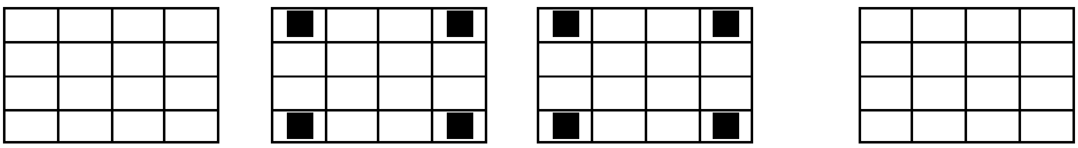
(ii) **當** $(i,j,k)=(2,3,2),(3,2,2)$，**則圖 X 與圖 Y 中** $R(i,4;j,4;1,2)$ **裡的黑色棋子個數的奇偶性不同，而且經過一次 C 操作後，只有把圖 X 中** $R(i,4;j,4;1,2)$ **裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 C 操作後，**$R(i,4;j,4;1,2)$ **裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。因此圖 X 與圖 Y 屬於不同的 C-類。**

(iii) **當** $(i,j,k)$ **為標準** $C_4$ **圖形之灰色部份標號為 5~19 時，我們找出 $4\times4\times4$ 方格棋子圖形中某些方格所成的集合 T(i)（下列圖形的黑色部份），其中 i=5,6,…,19，使得圖 X 與圖 Y 中 T(i)裡的黑色棋子個數的奇偶性不同，而且經過一次 C 操作後，只有把圖 X 中 T(i)裡的兩個或零個棋子翻面。所以經過有限次 C 操作後，圖 X 與圖 T(i)中 T 裡的黑色棋子個數的奇偶性永遠不同。因此圖 X 與圖 Y 屬於不同的 C-類。**

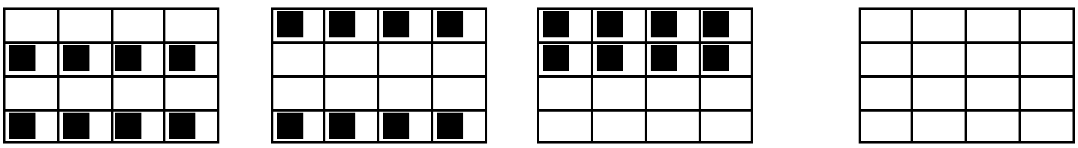
T(5).



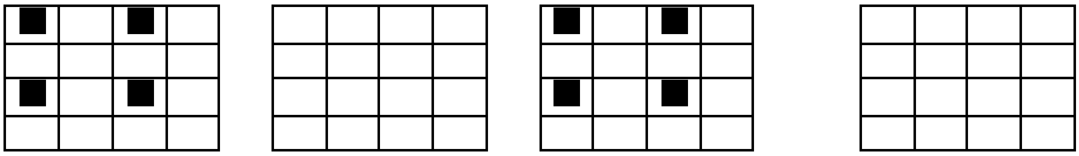
T(6).



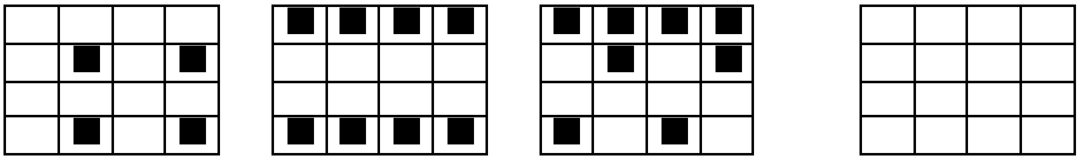
T(7).



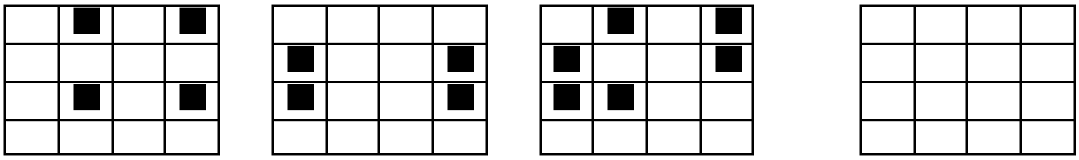
T(8).



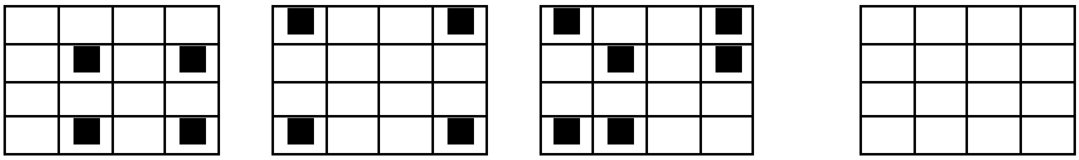
T(9)



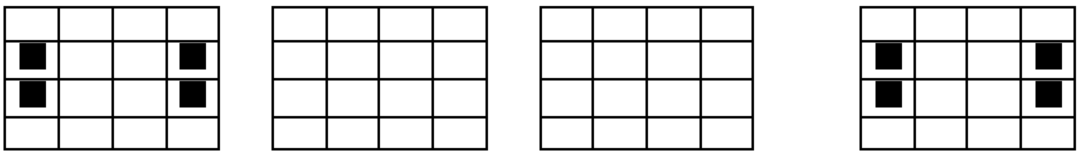
T(10).



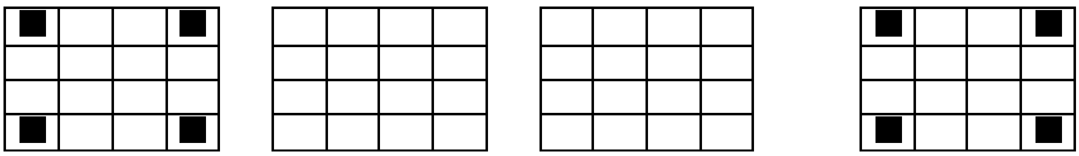
T(11).



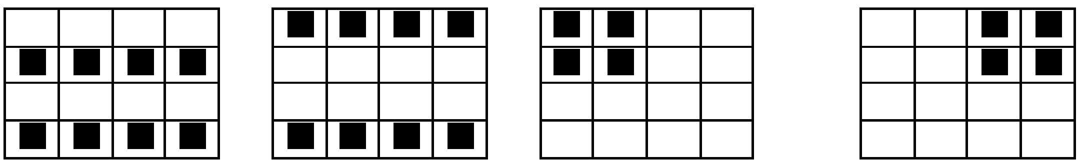
T(12).



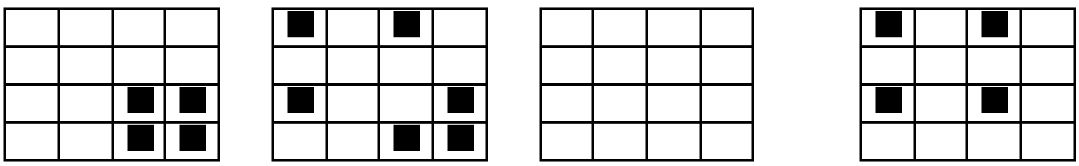
T(13).



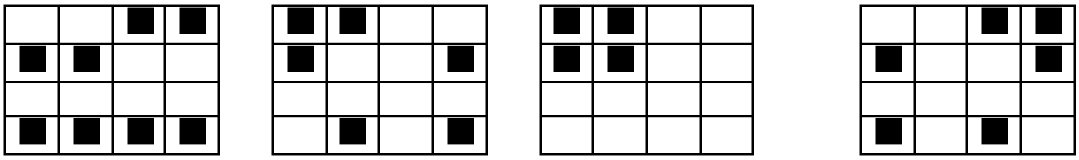
T(14).



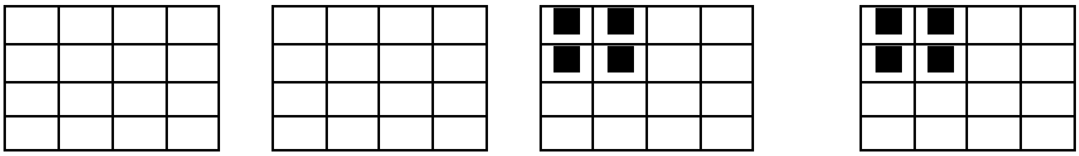
T(15).



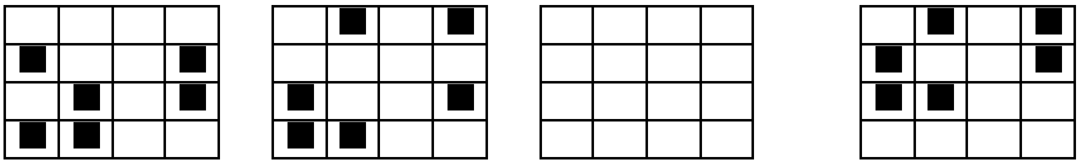
T(16).



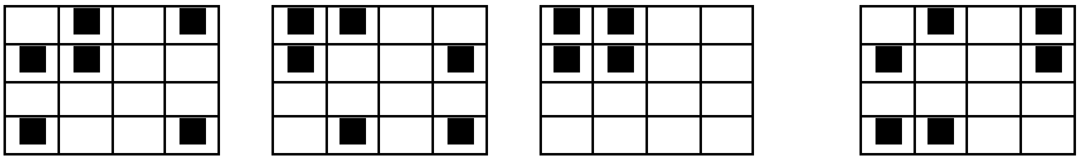
T(17).



T(18).



T(19).



## 三、討論

如果只要計算 *"所有的 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形到底可以分成多少個不同的 A-(或 B-)類?"* 我們可以用令另一種簡單方法來計算:

(一)*A-類*.由於只有 2n 種不同的一次 A 操作，所以我們共有 $2^{2n}$ 個不同的 A 操作，其中任意圖 X 都恰好有兩個不同的 A 操作使得圖 X 保持不變，所以任意圖 X 都有 $2^{2n-1}$ 個同 A-類但不同的影像，因此所有 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形有 $2^{n^2-2n+1}=2^{(n-1)^2}$ 個不同類圖形。

(二) *B-類*.由於只有 2n+2 種不同的一次 B 操作，所以我們共有 $2^{2n+2}$ 個不同的 B 操作，當 n=4 時，任意圖 X 都恰好有四個不同的 B 操作使得圖 X 保持不變，的 A 操作，其中任意圖 X 都恰好有兩個不同的 A 操作使得圖 X 保持不變，所以任意圖 X 都有 $2^{2n+2-2}$ 個同 B-類但不同的影像，因此所有 $2^{16}$ 個 $4\times4$ 方格棋子圖形有 $2^{8}$ 個不同類圖形；當 n $\neq$ 4 時，任意圖 X 都恰好有二個不同的 B 操作使得圖 X 保持不變，所以任意圖 X 都有 $2^{2n+2-1}$ 個同 B-類但不同的影像，因此所有 $2^{n^2}$ 個 $n\times n$ 方格棋子圖形有 $2^{n^2-2n-1}=2^{(n-1)^2-2}$ 個不同類圖形。

## 四、結論

在中華民國八十八年參加國際科學展覽活動作品:"翻排問題之探討" 一篇中:"若

$n \times n$ 方格的棋的每個 $M(i,j;k,l)$ 子圖形中滿足黑色棋子的個數是偶數，就可以經過有限次的 A 操作，翻成都是黑色; 如果有任何一個 $M(i,j;k,l)$ 不成立，則不可以翻成都是黑色"。我們可以把這個概念應用在判斷兩個 $n \times n$ 方格的棋子圖形是否為 A-同類: 若兩個 $n \times n$ 方格的棋子圖形的每個 $M(i,j;k,l)$ 子圖形中不同顏色棋子的個數是偶數，則這兩個 $n \times n$ 方格的棋子圖形是 A-同類; 如果任何一個不成立，則這兩個 $n \times n$ 方格的棋子圖形不是 A-同類。

在這篇文章中，我們定義標準 A-圖形，可以提供一個更簡單的方法來判斷兩個 $n \times n$ 方格的棋子圖形是否為 A-同類。我們又把上述的問題中 A 操作改為 B 操作或 C 操作來討論。我們找出並定義標準 B-圖形、C-圖形，同時證明兩個不同標準 A-圖形(或 B-圖形、C-圖形)都屬於不相同的 A-類(或 B-類、C-類)。

在找標準 B 圖形、C 圖形時，我們碰到了相當多的困擾，尤其是引理八、引理十、引理十一、引理十四。但這些困難都被我們一一克服了。可是在找一般 n 值的標準 C 圖形時，困難度相當高，我們找不到方法來克服，留待將來再努力。

註: 作者在研究本篇論文時，曾經參加九十年度台北市中等學校學生科學研究獎助研究計劃，並得到特優獎。

## 致謝

作者感謝柳賢教授、陳昭地教授、傅承德教授、劉樹忠教授、游森棚老師對本文提供寶貴的意見，作者也非常謝謝審查人細心的審查及提供很好的建議，使本篇文章表達更加清楚。

## 五、參考資料

1.中華民國第三十六屆中小學科學展覽 “優勝作品專輯”，國立台灣科學館彙編出版。

2.杜錫錄，嚴鎮軍、余紅兵三人合著:初中數學競賽教程。*凡異出版社*出版。書中習題 17。

3.張遠南:使人聰明的智力遊戲。*九章出版社*出版，書中“ 翻幣 ” 中的科學一章。

4 孫君儀、葉均承、陳天任(1999):土撥鼠遊戲研究。中央研究院數學傳播，第 23 卷. 第四期，p.32-38。

5.葉均承:Apex遊戲的推廣(2000)。中央研究院數學傳播，第 24 卷， 第三期，p.66-83。

6.葉洹君（2002）:拼圖的遊戲。中央研究院數學傳播，第 26 卷，第三期，p.68-82。

7.葉洹君、顏德琮、連信欽 (2001) :所羅門寶藏。科學教育月刊，第 245 期，p.10-17。

8.Brian Bolt 著:黃啟明 譯，數學遊樂園。書中 “老謀深算”。