

中學生通訊解題第二十期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
912001

下圖一為一個七面體的展開圖：含一個正方形（邊長 1），4 個等腰三角形（斜邊 $\sqrt{2}$ ）與 2 個正三角形（邊長 $\sqrt{2}$ ），試求此七面體之體積？



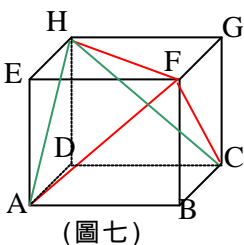
參考解答一：

此七面體的體積為正方體 ABCDEFGH (圖七)的體積扣掉 E-AFH 及 G-CFH 的體積

$$1 \times 1 \times 1 - (1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3} + 1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3})$$

$$= 1 - (\frac{1}{6} + \frac{1}{6})$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \text{ 體積為 } \frac{2}{3} \text{ 立方單位。}$$



參考解答二：

依題意可得如圖八的七面體：

(1) 考慮正三角錐 A-CFH 的體積(如圖九)

$$\text{CFH 的高為 } \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

$$\text{且重心到邊的距離為 } \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\sqrt{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{6}}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{6}{4} - \frac{6}{36}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (此為正三角錐 A-CFH 的高)}$$

=>正三角錐 A-CFH 的

$$\text{體積：} \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6}}{2} \times \frac{1}{2}$$

$$\times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

(2) 考慮 F-ABC 及 H-ADC 兩直角三角錐的體積

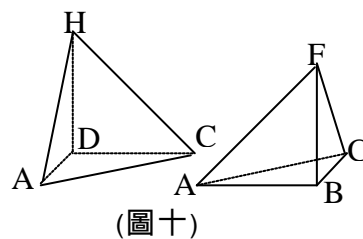
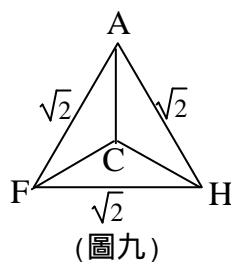
(如圖十)

其體積為：

$$2 \times (1 \times 1 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$$

將正三角

錐 A-CFH 的體積及 F-ABC 及 H-ADC 兩直角三角錐的體積加起來 => $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ ，所以此七面體的體積為 $\frac{2}{3}$ 立方單位。



評析：

本題徵答人數共有 20 人，其中全對者共 19 人，包含建國高中黃彥豪；中山國中許朝雄；金華國中張皓鈞；江翠國中林鈺傑、侯天崎、莊智涵、許碩彥、陳建宏、黃俊嘉、簡農軒；福和國中李志軒、李冠霆、沈彥汝、周志遠、周育正、林昇誼、梁守辰、梅振群、黃彥銘等同學。本題平均得分為 6.65 分。其中，答題優良、解法富參考價值者有建國高中黃彥豪同學、福和國中林昇誼同學、福和國中黃彥銘同學等。

問題編號

912002

凡是表示成 $\frac{q}{p}$ 形式的數，稱為有理數(p, q 是整數, $p \neq 0$), 凡是不能表示成 $\frac{q}{p}$ 形式的數，稱為無理數。設 $a < b$, 且 a, b 均為無理數，請問 a, b 之間是否存在著無理數？若有，請找出一個介於 a, b 之間的無理數。

參考解答：

$$a < \frac{a+b}{2} < b$$

⇒(1)若 $\frac{a+b}{2}$ 為無理數，則 $\frac{a+b}{2}$ 即為所求。

⇒(2)若 $\frac{a+b}{2}$ 為有理數，則繼續取 $\frac{a+b}{2}$ 與 a

的中間數，即 $\frac{3a+b}{4}$

又 $a < \frac{3a+b}{4} < \frac{a+b}{2} < b$, 且 $\frac{3a+b}{4}$ 為一有理數與無理數之和，

$\frac{3a+b}{4}$ 為無理數，即為所求。

評析：

本題徵答人數共有 19 人，其中全對者共 6 人，包含福和國中吳靈庭、李志軒、周志遠、林佑蓉、林佑蒔、梁守辰等同學。本題平均得分為 3.21 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有福和國中周育正同學。

問題編號

912003

CK 先生到處做生意，因此為了方便，他便在常做生意的地方買了房子，現在知道他在台北、台中、高雄、香港、上海、北京皆有房子，而且目前他住在台北，有一天他跟秘書說，他準備做一次五天的生意旅行，

每天要到另一處據點，且住宿該處，但第二天一定要前進到別處，問：

(1)若每天住的地方都不重複，有_____種行程安排。

(2)若只規定隔天要去另一據點，則又有幾種行程可安排？

(注意：第五天他要回到台北)

參考解答一：

(1)共有 5 天的行程要安排：題目明示第 5 天要在台北 只有 1 種選擇

第 1 天可去除了台北之外的其他 5 個地方有 5 種選擇

第 2 天除了台北之外，且不可與第 1 天重複 有 4 種選擇

依此類推 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ，共有 120 種安排。

(2)A.將台北除去：

第 1 天可去 5 地 5 種

第 2 天可去 4 地(不與前 1 天重複) 4 種

第 3 天可去 4 地(不與前 1 天，即第 2 天重複) 4 種

依此類推 $\Rightarrow 5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 1 = 320$

B.考慮台北：

由於相鄰兩天不可在同一地方 台北可出現在旅行中的第 2 天與第 3 天

台北若排在第 2 天 $5 \times 1 \times 5 \times 4 \times 1 = 100$

台北若排在第 3 天 $5 \times 4 \times 1 \times 5 \times 1 = 100$

$\Rightarrow 320 + 100 + 100 = 520$ ，共有 520 種安排。

參考解答二：

(1)共有 5 天， $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ ，共有 120 種安排。

(2)台北不可排在第 4 天 所有情形扣去第 4 天在台北的安排

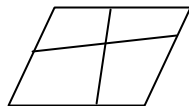
$$5^4 - 5 \times 1 \times 5 \times 1 - 5 \times 4 \times 4 \times 1 = 625 - 25 - 80 = 520$$
，共有 520 種安排。

評析：

本題徵答人數共有 25 人，其中全對者共 18 人，包含江翠國中林鈺傑、侯天崎、莊智涵、許碩彥、黃俊嘉、簡農軒；福和國中田雅汶、李志軒、李冠霆、沈彥汝、周志遠、周育正、林佑蓉、林佑蒔、林瑋詩、梁守辰、梅振群、黃彥銘等同學。本題平均得分為 5.64 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有江翠國中許碩彥同學、福和國中梁守辰同學等。

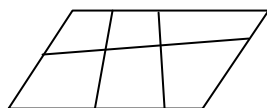
問題編號
912004

小華喜歡畫畫，常常把哥哥的作業亂塗顏色，哥哥心生一計，便畫了圖形（如下圖二），告訴小華說“如果有紅綠黃藍黑五色讓你去著色，但規定任二格擁有相同線段的不可著同一種顏色，則可以怎麼著色？”小華很快的塗了一種方式，但哥哥又說



(圖二)

“你必須把所有可能的圖案都畫出來，以後才可以亂塗我的東西”，試



(圖三)

問：小華應該畫出多少種？又若改成如下圖三所示，則有多少種著色方法？

參考解答：

(1)設左上為 A、右上為 B、

左下為 C、右下為 D，如圖十一依題意，A 與 D 可

A	B
C	D

(圖十一)

同色，也可不同色

$$\Rightarrow A=D, ADBC \quad 5 \times 1 \times 4 \times 4 = 80$$

$$\Rightarrow A \neq D, ADBC \quad 5 \times 4 \times 3 \times 3 = 180$$

$$80 + 180 = 260$$
，所以小華應畫出 260 種。

(2)設左上為 A、中上為 B、右上為 C、左下為 D、中下為 E、右下為 F，如圖十二

(先考慮 ABED 的塗色方法，再加進 C 與 F)

由(1)可知 ABED 的塗色方法共有 260 種，

依題意，B 與 F 可同色，也可不同色

(或也可考慮 C 與 E 之間同色與不同色的情形)

A	B	C
D	E	F

(圖十二)

$$\Rightarrow B=F, FC \quad 1 \times 4 = 4$$

$$\Rightarrow B \neq F, FC \quad 3 \times 3 = 9$$

$$260 \times (4 + 9) = 3380$$
，所以

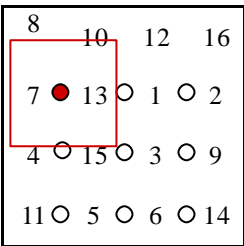
小華應畫出 3380 種。

評析：

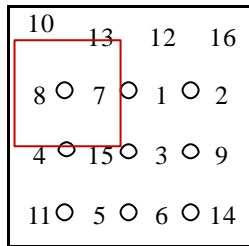
本題徵答人數共有 22 人，其中全對者共 12 人，包含建國高中黃彥豪；江翠國中李育丞、莊智涵；福和國中吳霽庭、李志軒、沈彥汝、周志遠、周育正、林佑蒔、林瑋詩、梁守辰、梅振群等同學。本題平均得分為 4.68 分。其中，答題優良或解法富參考價值者有建國高中黃彥豪同學、福和國中李志軒同學、福和國中沈彥汝同學等。

問題編號
912005

這是一個數字盤，現有紅白兩個神奇按鈕，每按一次，可令其周圍的四個數字逆時針旋轉一格，(如圖四，按下紅色鈕，四周的四個數字 8,10,13,7 逆時針轉一格，將數字的排列方式變為圖五所示)

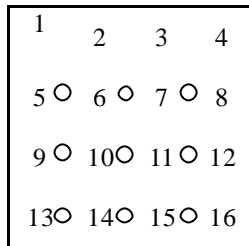


(圖四)



(圖五)

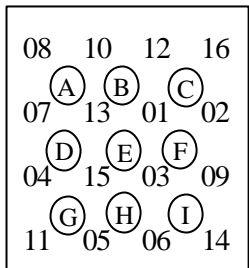
依照上述的遊戲規則，是否可經過若干次操作，將圖四中的數字盤變成下圖六之數字排列？如果可以，請告訴我，你是怎麼做到的？如果不行，請說明原因。



(圖六)

參考解答：

先將按鈕做編號，上至下、左至右從 A 編號到 I，一次步驟是按一次按鈕(即周圍四個數字旋轉一格)



可採取下列步驟：

方式 1 是將數字較小的往上放、大的往下擺，然後調整位置

1.AAACCFFHDDAAHHHHIIIIEECBFFFABC
DDDCCEEECCHEEEGGGDEHGHGGHHH
EEEEFFBFBBBGHEEEGGGFFFBFBBB
done

方式 2 是先固定出第 1 行、再固定第 2 行，最後調整 3、4 行

2.BBCCABDECCFFC
GDHDEEGHGIHIFFIFFF
IGIHIIIHGIHHGGGIHIIHHGGG done

方式 3 是先選定一些數字(如 1、2)將其轉至欲放的位置，再調整其他

3.BBACCB FFCDEFFC GDHHDGHIIF
HHGHGIHHIIIHHIHH done

評析：

本題徵答人數共有 5 人，其中全對者共 3 人，包含福和國中李志軒、周志遠、林昇誼等同學。本題平均得分為 4.2 分。

中學生通訊解題第二十期徵答情形

台北市立建國高級中學 數學科

區域	學校	姓名	指導老師	912001	912002	912003	912004	912005	總分	
台北市	建國高中	黃彥豪		7	X	3	7	0	17	
	中山國中	許朝雄	許文安	7	0	0	3	X	10	
	天母國中	朱聖恩	江昭潔	X	0	3	4	X	7	
	金華國中	周熙凱	孫文先	X	X	X	X	0	0	
	金華國中	張皓鈞	蔡璧璘	7	0	3	0	X	10	
台北縣	江翠國中	李育丞	吳明標	X	X	3	7	X	10	
	江翠國中	林鈺傑	吳明標	7	0	7	3	X	17	
	江翠國中	侯天崎	吳明標	7	0	7	0	X	14	
	江翠國中	莊智涵	吳明標	7	X	7	7	X	21	
	江翠國中	許碩彥	吳明標	7	0	7	X	X	14	
	江翠國中	陳建宏	陳彩鳳	7	2	3	X	X	12	
	江翠國中	黃俊嘉	吳明標	7	0	7	0	X	14	
	江翠國中	簡農軒	詹玉貞	7	0	7	0	X	14	
	福和國中	史美圻	鄭鈞鋒	0	X	X	X	X	0	
	福和國中	田雅汶	鄭鈞鋒、蕭素鈴	X	0	7	3	X	10	
	福和國中	吳霽庭	鄭鈞鋒	X	7	0	7	X	14	
	福和國中	李志軒	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	7	7	7	7	35	
	福和國中	李冠霆		7	X	7	X	X	14	
	福和國中	沈彥汝	鄭鈞鋒、陳明貴	7	X	7	7	X	21	
	福和國中	周志遠	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	7	7	7	7	35	
	福和國中	周育正	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	6	7	7	X	27	
	福和國中	林佑蓉	鄭鈞鋒、蕭素鈴	X	7	7	3	X	17	
	福和國中	林佑蒔	鄭鈞鋒、蕭素鈴	X	7	7	7	X	21	
	福和國中	林昇誼	陳明貴、鄭鈞鋒	7	X	X	X	7	14	
	福和國中	林瑋詩	鄭鈞鋒、蕭素鈴	X	5	7	7	X	19	
	福和國中	梁守辰	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	7	7	7	X	28	
	福和國中	梅振群	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	X	7	7	X	21	
	福和國中	黃彥銘	鄭鈞鋒、蕭素鈴	7	6	7	3	X	23	
	答題人數				20	19	25	22	5	
	全對人數				19	6	18	12	3	
	平均得分				6.65	3.21	5.64	4.68	4.20	

提醒徵答同學們：務必以一題一張(或多張)來作答，切勿多題一張，以便使我們作業能夠更加順暢，謝謝！