淺談解題教學

徐正梅
臺北市立建國高級中學

壹、數學教學的基本目標

數學教學因人而異，所謂「教無定法」它是一個很複雜的問題。儘管如此，但教學的基本目標卻是一致的。

數學教學的基本目標有三個要項

1. 讓學生掌握必要的數學理論、知識及學會表達方式。
2. 讓學生熟悉重要的數學方法。
3. 發展學生的思維能力。

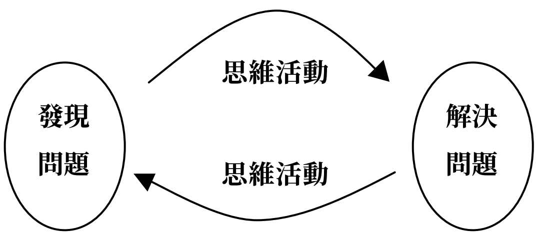
其中「如何發展學生的思維能力」是教學改革中最主要的課題。

傳統的教學認為：	現代的教學認為：
數學教學主要是數學理論、知識的傳授和數學技能、技巧的培養，而發展學生的思維便會在教學中自然地實現。	數學教學主要是思維活動的教學，數學知識祇是進行思維訓練的結構材料，力求控制教學過程，促進學生思維的發展。

貳、解題教學的內涵

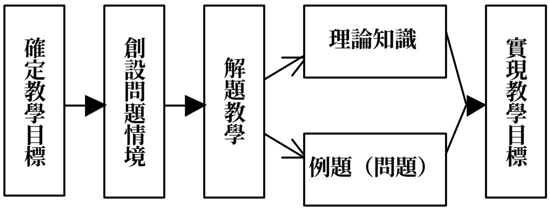
一、何謂解題教學

數學的教學活動中，透過”解題的形式”來實現某種教學目標者我們稱之為解題教學。它把整個教學過程控制成：不斷地發現問題、解決問題的創造性思維的活動。



二、解題教學的系統

解題教學是數學教學中最主要的部分，其系統如下：



解題教學要達到教學目標教師必須履行下列四點：

1. 提出問題　依照各單元的教學目標，事先去精心設計、安排一連串的問題。
2. 解決問題　要求學生弄清題設條件和結論的聯繫，並鼓勵學生去分析、探索。將題目的條件一系列的轉化成等價條件（或逆向將“結論”一系列的轉化成其他形式），進而發現解答的線索。
3. 發現問題　善於引導學生從問題中發現新的問題，或從轉化過程中發現新問題。
4. 回顧問題　當問題徹底解決後，必須回頭來討論解題的過程，提示學生從以下數點進行討論。
   (1) 題目中包含哪些基本概念？（這些概念是弄清題意所必需）
   (2) 解題時引用了哪些定理、公式？不用它們而用別的行不行？
   (3) 解題時運用了哪些數學方法？
   (4) 這個問題有沒有更簡明的解法？（一題多解）
   (5) 這個問題與過去解過的哪類問題相

似？能不能對這類問題加以推廣、導出一般性結論？

上面第 2 點的“探索”與“轉化”特別重要，說明如下：

探索：

著名的美國心理學家布魯納（J. S. Bruner）指出：探索是教學的生命線。

教育心理研究報告中明示：學生需要掌握的數學理論、知識、方法，最好是讓學生自己去“探索”（教師給予必要的引導、協助），這樣學生在探索中獲得的不僅僅是鞏固深化固有的知識，而且可以無拘無束地發展思維能力。因此教師在解題教學時必須創設問題的情境，讓學生自己在發現問題、解決問題的探索活動中，滿載而歸。

解題教學的“探索性原則”要求教師不把解法直接告訴學生，而是依次提示問題，引導學生主動地、積極地、目標明確地進行思維活動，學生一步一步地進行探索，直至自己發現解答。

轉化：

轉化就是將題目的“已知條件和結論”進行適當的轉換，以期找到解題的線索。教學中可以啟發學生進行如下的轉化

（A）將題設條件（或結論）化成熟悉的等價條件。

（B）將抽象條件化成具體條件。

（C）將一般性化成特殊性（或特殊性化成一般性）

（D）將整體問題化成幾個簡單的子題。

（E）數（代數）與形（幾何）結合。

參、解題教學實例

一、理論、知識的解題教學　餘弦定理

1.創設問題的情境

●提出問題

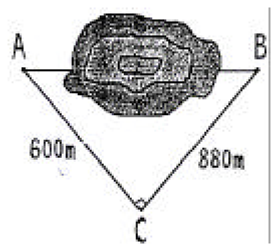
建造一條公路，要穿過一座高山，準備從山北的 A 點開一條隧道通達山南的 B 點

(1) 如何測出兩點 A 與 B 的距離

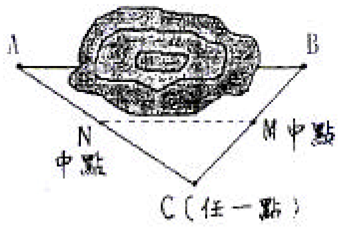
(2) 兩端同時施工，“方向”如何掌握？

學生經過小組討論後，提出解決問題的三種策略：

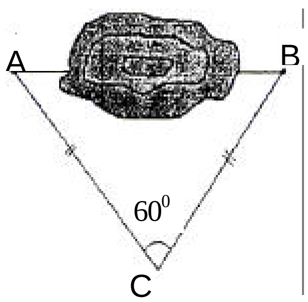
《策略一》作直角三角形



《策略二》利用三角形的中點連線



《策略三》作正三角形



《策略四》

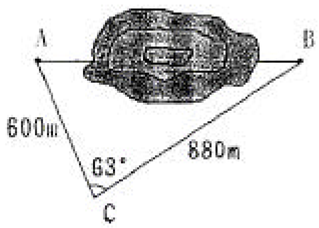
教師提出：

任意找一點 C，並且量得

AC=600m，BC=880m

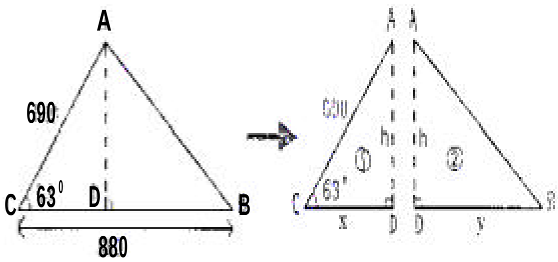
∠ACB=63°，

如何求 $\overline{AB}$？



●解決問題：

（1）$\overline{AB}$=？



在第①個三角形中：

$h = 600\times\sin 63^0$，　$x = 600\times\cos 63^0$

在第②個三角形中：引用畢氏定理可得

$\overline{AB}^2 = h^2 + y^2$

$= (600\times\sin 63^0)^2 + (880 - x)^2$

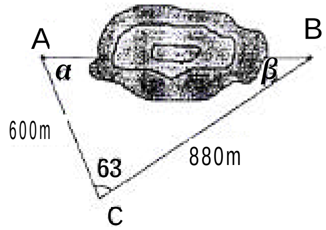
$= (600\times\sin 63^0)^2 + (880 - 600\times\cos 63^0)^2$

$= 600^2 + 880^2 - 2\times 880\times 600\times\cos 63^0$

（2）當兩端同時施工，“方向”如何掌握？

a =？，　b =？

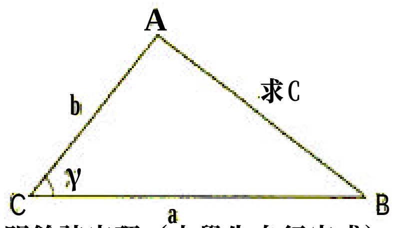
這就涉及正弦定理。



2.什麼是「餘弦定理」？如何證明？

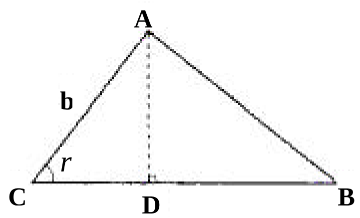
●敘述餘弦定理：__________________

在 ΔABC 中，給定兩邊長 a，b 及夾角 g，如何求第三邊長 c？



●證明餘弦定理（由學生自行完成）

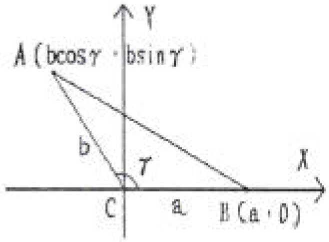
《證明一》學生甲：仿前面的實例證明



《證明二》學生乙：建立坐標系，利用距離公式（如圖）

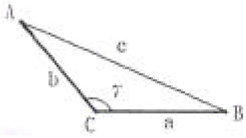
$\overline{AB}^2 = (a - b\cos g)^2 + (-b\sin g)^2$

$= a^2 + b^2 - 2ab\cos g$



●討論（教師引導、提問）

1. 當$g \geq 90^0$時，$c = a^2 + b^2 - 2ab\cos g$ 是否成立？



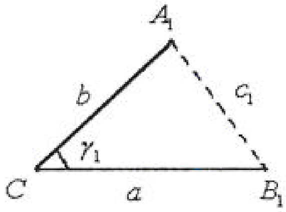
2. 餘弦定理另一種形式與意義

$$\cos g = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

給定三邊長 a.b.c 可求三個內角。

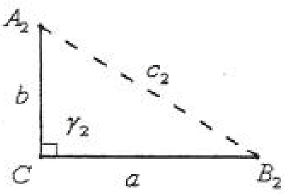
3. 與“ 樞紐定理 ”的連結

(1)



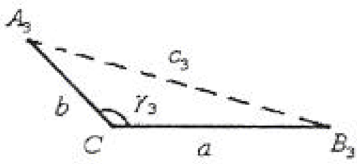
$c_1^2 < a^2 + b^2$

(2)



$c_2^2 = a^2 + b^2$

(3)



$c_3^2 > a^2 + b^2$

4. 與“ 畢氏定理 ”的關係

餘弦定理是畢氏定理的推廣。

二、例題的解題教學：

《例題 1》

有甲、乙、丙三種貨物，若購甲 7 件、乙 13 件、丙 4 件，共需 70 元。若購甲 5 件、乙 9 件、丙 3 件，共需 50 元。試問購買甲、乙、丙各 1 件共需多少元？

《分析》

設甲、乙、丙各購1件分別需要 x、y、z 元。

依題意得

$$\begin{cases} 7x + 13y + 4z = 70 & \cdots\cdots① \\ 5x + \ \ 9y + 3z = 50 & \cdots\cdots② \end{cases}$$

如何解出 $x + y + z$ 的值？（這是一個不定方程組，求兩平面的交線，其解有無窮多組）

《解一》

令 $y = t$，解得 $x = 10 - 3t$，$z = 2t$，即

$$\begin{cases} x = 10 - 3t \\ y = t \\ z = 2t \end{cases} \quad (0<t<\frac{10}{3})$$

故 $x+y+z=10$ (元)

《解二》原式化成

$$\begin{cases} 4(x + y + z) + 3x + 9y = 70 \\ 3(x + y + z) + 2x + 6y = 50 \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} 4(x + y + z) + 3(x + 3y) = 70 \\ 3(x + y + z) + 2(x + 3y) = 50 \end{cases}$$

《解三》①×a ②×b 得：

$(7a+5b)x+(13a+9b)y+(4a+3b)z$

$=70a+50b$

令 $7a+5b=1, 13a+9b=1, 4a+3b=1$

解出 $a=-2, b=-3 \therefore x+y+z=10$

《評析》由教師去評論三種解法的特色及用到哪些方法、理論等。

《例題 2》設二次方程式 $x^2+(a-2)x+(5-a)=0$ 的兩根都是正實根，求實數 a 取值的範圍。

《解》設兩個正實根為 x_1, x_2

$$\begin{cases} x_1>0 \\ x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{判別式}\Delta\ge 0 \\ x_1+x_2>0 \\ x_1\times x_2>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\le -4$$

《評析》

教師必須將〝充要條件〞說清楚。

《問題》

若方程式 $x^2+(a-2)x+(5-a)=0$ 之兩根都大於 2，求實數 a 的範圍。

《學生的錯解》

設兩根為 x_1, x_2，則

「$\Delta\ge 0, x_1+x_2>4, x_1\times x_2>4$」 ……（A）

由（A）導出

「$(a-2)^2-4(5-a)\ge 0$

$2-a>4$

$5-a>4$」 ……………（B）

由此解出「$a\le -4$」……………（C）

“錯”在哪裡？（正確的答案是：$-5<a\le -4$）

《評析》

教師必須指出：(A)式是〝兩根大於 2〞的〝必要條件〞而不是〝充要條件〞。

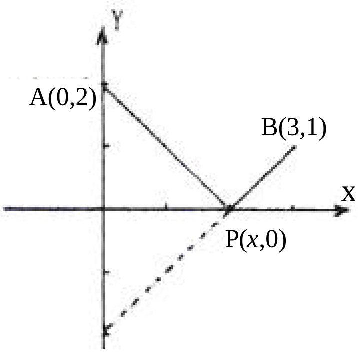
《例題 3》

求函數 $f(x)=\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2-6x+10}$ 的最小值

《解》 $f(x)=\sqrt{(x-0)^2+2^2}+\sqrt{(x-3)^2+1}$

再用幾何方式解釋（如下圖）：

$f(x)=\overline{PA}+\overline{PB}$



《評析》

數形結合

《問題》

求函數

$f(x)=\sqrt{x^4-3x^2+4}+\sqrt{x^4-3x^2-8x+20}$ 的最小值。

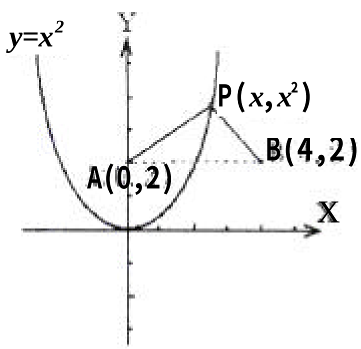
《提示》

1. $f(x)=\sqrt{(x^2-2)^2+x^2}+\sqrt{(x^2-2)^2+(x-4)^2}$

2.點 $p(x,x^2)$ 在拋物線 $y=x^2$ 上。

3.設 $A=(0,2)$，$B=(4,2)$，

則 $f(x)=\overline{PA}+\overline{PB}$



《評析》

數形結合