

一個關於距離和速度的問題

蘇國樑
國立空中大學 商學系

摘要

本文透過研究和思考一個問題的兩種不同的解法和其具體形象的操作過程，並對照數概念發展和認知發展的不同階段的概念分析，得出兩種具體形象思維的共同性和差異性；從而可以檢視佈題和其解題紀錄之過程對學生的合適性；同時亦得出思維系統的發展過程是呈現螺旋式的上升狀態。

關鍵詞：形象思維、可逆運思、部分全體運思、第一次相會、第二次相會。

讀過書的人都可能體會到一個事實，那就是，教學活動是由成人負起教育兒童的責任，或是由學者和專家負起教育學生的責任。具體的說，就是懂得知識的人負起教育不懂得知識的人。而對了解或掌握成人或專家學者的思維模式或概念發展模式，是對了解和研究兒童或學生的思維模式或概念發展模式，有著輔助的作用。又，研究專家、學者對知識傳承之思維模式的方法之一，就是直接研究專家、學者所做出的解題活動或其紀錄。這樣的作法對整個教學活動或學習活動都是有幫助的和需要的。

有些學者、專家或成人們可能以自身的經驗所歸納出的思維模式 (pattern) 為唯一的、可行的 (feasible) 模式，企圖套用到學生身上，也就是說，可能以其自身的思維模式等同於學生的思維模式。因為這種自身所經驗而結論出的思維模式對他們而言在數學學習的過程是有效的和可行的，所以，學生在數學學習的成功思維模式也應該和專家學者的思維模式是一樣的。這樣的作法如同將美

國華爾街股市交易活動和其紀錄為基礎所求出的統計模型，套用和解釋世界其他國家的股市交易活動。因此，其合理性和科學性都是值得探討的。但從另一個角度來看，能夠分析或辨識出專家或學者的思維模式，並參照兒童或學生的思維模式或概念發展模式，不僅可以得知兩種不同層次之思維的差異性，而且可以找出關鍵性的共同點，從而有助於思考有效的教學方法。

一般而言，學者或專家在設計課程或教材時，為了達到數學教學的目標，在過渡期之“準形式運思期” (皮亞杰, 1989) 中，會安排了一些需要利用到“可逆運思”活動和“部分全體運思” (甯自強, 1993a) 活動的問題，然後透過解題活動來達到提升或強化學習主體的思維模式或概念發展模式中的關鍵性概念。因此，對課程設計者或教材設計者在進行佈題或解題活動時，不僅要考慮到提升和強化主體之階段性概念的功能，而且需要考慮到概念的階段性和佈題的合適性。本文就是希望找出和具體化這些在解題活動的過程

中可能需要的所謂關鍵性的概念和其合適性。

1. 對相關問題的思考

在一個計算面積的問題一文中，筆者曾提到「藉著探討兩種不同解法的差異而得出，不同的解題方式可能來自不同數學思維模式(patterns)的結果，更可能是相同概念發展模式或是認知發展模式中的不同發展階段所表現出的結果。」(蘇國樑, 2000) 因此，可以透過對解題活動或相關的概念運思活動所涉及的形象思維活動的過程和其結果進行分析，找出過渡的“準形式運思期”中不同思維模式或概念發展模式之間，是否存在一些其他的顯著的關聯性。其原因有，一是、數字和符號所組合而成的運算式和其紀錄常常是更為抽象，二是、抽象的運算也經常是建立在具體化形象思維的基礎上。

其次，從許多解題的過程和其紀錄，可以明顯地看出課程設計者、佈題者或解題者都是已經達到“形式運思期”和“測量運思期”(甯自強, 1993a)，並可以從事邏輯數學運思，即進行假設演繹的推理思維和其活動(皮亞杰, 1989)。然而，這並不表示兒童或學生也會同時地、自發地達到“形式運思期”和“測量運思期”，從而發展出佈題者或解題者所擁有的邏輯數學運思和活動。那麼，這樣的課程安排和佈題方式，顯然就是課程設計者或解題者主觀地認為兒童或學生可以透過解題活動或閱讀解題過程的結果，而達到課程設計者的預期效果。因此，這種預期效果的合適性和合理性是值得探討的。

從觀察和分析兒童或學生的解題活動，可以做為研究兒童或學生的思維模式或概念發展模式。因此，從課程設計者所設計的教材或佈題和其解題紀錄，亦可以做為研究或探討高水平的思維模式或概念思維活動。第 2 節就是透過觀察和分析課程設計者或佈題者所佈的題目和兩種可能的解題活動的過程和其紀錄；並將相應的解題過程和其紀錄具體化成為具體的形象紀錄；從而提煉出在具體形象操作活動中所涉及的運思活動或概念發展活動。這裡所說的解題活動顯然地是包含了對題意的解釋活動。第 3 節的比較作法不僅一方面能夠掌握在所謂的“可能建構區”(甯自強, 1993b) 內的佈題的合適性，另一方面掌握兒童或學生可能需要具備的概念化的思維活動；而且可以說明不同思維模式或概念發展模式之間存在的關聯性。

2. 問題和其情境的具體形象化

先將問題略述如下：某甲 4 分走 340 公尺，某乙 5 分走 360 公尺，兩人同時同地反向繞半徑 150 公尺的圓形跑道而行，求第二次相會是在出發後幾分鐘？

首先，將抽象的題意或問題情境具體化成為右邊的圖式，其中表示兩人共同的起點，並以箭頭表示反向的繞

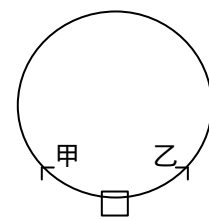


圖 1.1

行方向。其次，思考為什麼不是求第一次相會的時間？太簡單抑或是無法求得？但不論是太簡單抑或是無法求得都有必要了解一下其中的簡易性和不可得性。第三，或者可以

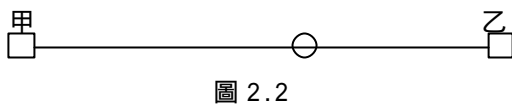
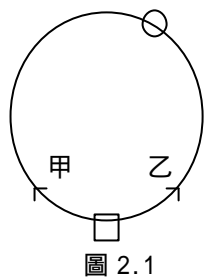
以思考第一次相會之問題的活動和其過程的結果為基礎，從而思考第二次相會的時間問題，也就是說，對第一次相會問題的思考活動可能會具有某種關鍵性質。

這裡需要一提的是，本文重點不在解題技巧，而是在對於抽象化、文字化和數字化的問題和其情境的思維活動的具體形象化，從而使問題的對象和計算的目標明顯化。因而，下面所列出的一些計算式會比較簡化，但這並不表示計算式的過程是不重要的。

2.1 第一次相會的情境

根據問題敘述的情境和圖 1.1，可以重造、建構或虛擬出一個抽象的“實景”，並具體化其抽象的形象思維和其結果，如圖 2.1。在考慮第一次相會的時間問題時，第一次相會的地點一定是在圓形跑道的右上方(記成

)，因為某甲的速度比某乙的速度快。又，若是只求第一次碰面的地點，則可以以圓形跑道的起點進行截斷，而將問題情境轉化成：“甲乙



兩人由兩地同向而行，求兩人碰面的時間和地點。”那麼，將進一步轉化後的問題情境如圖 2.2。

現在，若令乙至 所行的距離為“ ”，則甲至 所行的距離為“全長(圓周長) - ”。由於甲的速度為 340/4(公尺/分)、乙的

速度為 360/5(公尺/分)，且兩人所花的時間相同，故可以得出下列等式

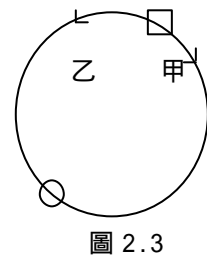
$$(\text{圓周長} - \quad) \div (340/4) = \quad \div (360/5)$$

求解上面方程式可得 $\quad = \text{圓周長} \times (72/157)$ ，所花的時間為： $\text{圓周長} \div 157$ (分)，其中圓周長 = $2 \times 150 \times 3.14$ 公尺。

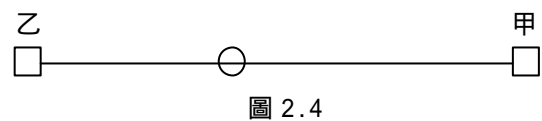
2.2 第二次相會的情境和可能的思維模式

接著，是要考慮第二次相會的時間，則以圓形跑道為形象思維的基礎可以有種思考方式，這裡只舉出兩個可能的思維模式。

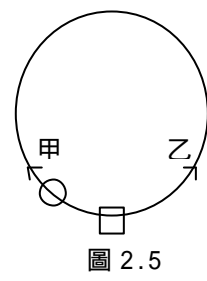
第一種模式(或稱解法一)，是可以將第二次相會的活動分解成兩個第一次相會活動。也就是說，將圖 2.1 中的第一次



相會的地點視為“下一個”第一次相會(即第二次相會)的起點，見圖 2.3，因此，將“下一個”第一次相會的地點也定為 。同理，可將圖 2.3 轉換成類似於圖 2.2，如下圖 2.4。



所不同的是甲乙的起始點對換而已，但這並不會影響到甲乙兩人做“下一次”的第一次相會所需的時間。由圖 2.2 和其所得的結果可以得到“下一次”的第一次相會所需的時間為： $\text{圓周長} \div 157$ (分)，而某乙從“新起點”到“下一次”的



一次相會地點的距離 = 圓周長 \times (72/157) 公尺。因此，可以得出“第二次相會”的時間為： $2 \times [\text{圓周長} \div 157]$ (分) = 兩倍的“第一次相會的時間”。

第二種模式(或稱解法二)，是考慮兩人在同一時間和同一地點出發，則第二次相會的地點是在圓形跑道的左下方(記成)，見圖 2.5。這是直接求算第二次相會的時間，或稱為第二次相會活動。因為甲的速度快過乙的速度，所以，第二次相會地點不會發生在圓形跑道的右下方。也就是說，第二次相會的地點是發生在起始點的左方的某處。令為相會點 和起始點 之間的距離長。則甲走的總長是“圓周長 + ”；乙走的總長是“圓周長 - ”。

由 2.1 節中所提的第一次相會之問題情境的推論得知兩人所花的時間應是相同的，故而可以得出下列等式

$$(\text{圓周長} +) \div (340/4) = (\text{圓周長} -) \div (360/5)$$

解出上面方程式可得 = 圓周長 \times (13/157)，所花的時間為： $\text{圓周長} \times 2 \div 157$ (分)。

3. 對第二次相會的兩個形象思維模式的思考

本節主要在研究和分析問題的兩個解法是否構成一個概念發展模式的兩個不同階段的活動結果，抑或是兩個不同思維模式的活動結果。這需要從兩方面進行探討，第一方面，兩種解法是否都存在著“可逆運思”的活動，因為可逆運思活動是構成思維系統化的

基本特徵(皮亞杰，1989，p53)；第二方面，兩種解法是否都存在著“部分全體運思”的活動，因為部分全體運思是測量運思和形式運思的前一階段的運思活動。

雖然，每種思維模式不能絕對地、簡單地畫分成這兩個運思活動的組合，但在“準形式運思期”的思維系統內卻包含著這兩種運思活動。這樣的作法，一方面可以檢視出兩種解法所需要的運思活動是否符合兒童或學生的需要，即佈題和其解題紀錄對主體的合適性；另一方面可以檢視兩種解法之思維模式的關聯性，即兩種解法是一種概念發展的兩個階段，或是兩種不同的思維模式。

3.1 兩種思維模式的關鍵性運思的分析

“解法一”的問題情境由於轉化的結果，可以將原始問題的情境“視為”或“等價”成一個 1 維空間思維的問題情境，或是說可以在一個層次上進行思維活動的問題，見圖 2.2 或圖 2.4。這裡等價的意思是指從某個角度來看，這兩個思維的具體對象是同構的，譬如，圖 2.1 和圖 2.2 或圖 2.3 和圖 2.4。然而，“解法二”的問題情境，則無法“等價”為 1 維空間思維的問題情境，而是一個必須在 2 維空間的情境才能進行思考活動的問題，或是需要分成兩個情境來思考的問題。

為什麼說“解法一”的思維方式是屬於 1 維思維模式呢？首先，因為在第一次相會的問題所要思考的對象情境是發生在整個圓跑道的範圍內，而且其活動是指同時同地做反向地繞圓形跑道行走，這個活動和同時由兩地做相向地行走是兩種不同表現形式的等價

活動。其次，兩人一定會在兩地之間的某處碰面，碰面的地點必在“直線”之內，譬如，見圖 2.2 或圖 2.4。因此，“兩個第一次相會”的解法模式就等價於“圖 2.1”和“圖 2.3”的整合，或是“圖 2.2”和“圖 2.4”的整合。

為什麼說“解法二”的思維是屬於 2 維思維模式呢？雖然第二次相會的碰面情形也一定是發生在整個圓形跑道內，但是必須分別從甲單獨繞行和乙單獨繞行，這樣的 2 個情境上做思考。例如，“圖 2.5”或是“圖 3.1”和“圖 3.2”的整合。因此，若是要將直接考慮第二次相會的活動簡化成“直線”和兩地的思維活動，如圖 2.2 或圖 2.4，必會發生某甲必須要走出“直線”之外。這就形成一個在“直線”內的活動現象卻發生在“直線”之外，或是一個包含於整體現象之內的現象卻發生在整體之外。

另外，在兩個第一相會活動（“解法一”）的問題中，首先，圖 2.1 和圖 2.2 與圖 2.3 和圖 2.4 均可視為等價的意思就是，圖 2.1 和圖 2.3 的形象思維可以分別轉化成對圖 2.2 和圖 2.4 的形象思維。故圖 2.2 是圖 2.1 的轉化結果，圖 2.4 是圖 2.3 的轉化結果。這種視兩種不同具體形象為等價是“可逆運思”活動的結果。其次，兩個第一相會的問題中，若乙行走距離，則甲必走“全長 - ”的距離，且兩人相會的地點在 處，是在“直線”之內。這是“部分全體運思”的結果，因為“ ”和“全長 - ”都是內嵌於圓形跑道和直線之內，也可以嵌於圓形跑道和直線。

最後，在直接考慮第二次相會活動的問題（“解法二”）之具體化圖式又可分化成兩個

活動的圖形，如圖 3.1 和圖 3.2。在充分、適當且相同的繞行時間之下，第二次相會時，甲必然需要繞回並經過原點後又沿著圓形跑道繼續走距離為 的路；而乙必然在相同的時間下尚未繞回原點，且距離原點尚有 的路。因為甲快而乙慢，且這樣兩人才有可能在 處做第二次相會。這裡顯然必須藉助於兩次的“可逆運思”，才能得出這兩種繞行活動之結果的圖像。至於甲和乙的繞行活動皆在圓形跑道之內進行，因而屬於圓周內的活動，故內嵌於圓周內。然而，兩人活動的距離又可以大過和不足一個圓周，因而圓周又需要脫嵌於活動之外。這就說明了需要利用到“部分全體運思”的思維活動，因為全體不僅包含了部分，且亦包含了全體本身。

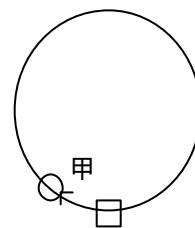


圖 3.1

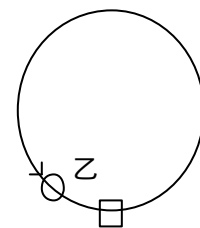


圖 3.2

3.2 兩種思維模式的關聯性分析

由於 2.2 節的兩種形象思維模式內均顯示出“可逆運思”和“部分全體運思”的活動，因此，兩種思維模式可以視為分屬於不同的思維模式，而不是同一個思維模式或同一個概念發展模式之兩個不同的階段。由 3.1 節的分析，一方面可以說直接第二次相會的思維模式（“解法二”）的水平高於兩個第一次相會的思維模式（“解法一”），這似乎言之成理。另一方面，若是將第二次相會的思維活動分

解為兩個第一次相會的思維活動(“解法一”)，則第一次相會的思維活動便是第二次相會的思維活動(“解法一”)的充要條件。那麼，這表示第一次相會的思維活動和第二次相會的思維活動兩者是同一水平的思維活動。這也顯示出兩個第一次相會的思維(“解法一”)是屬於比較直觀式的素樸思維，例如，兩個“第一次相會”的思維活動都表現出部分和全體的界限分明，見圖 2.2 或圖 2.4。然而，直接第二次相會思維(“解法二”)則表現出更概念化的思維，例如，全體亦是全體中的一部分，見圖 3.1 和圖 3.2 的圖象。

然而，若缺乏 2.1 節中第一次相會的思維模式為基礎，則 2.2 節中第二次相會的兩種思維活動(解法一和解法二)將不容易產生。又，缺乏第二次相會的思維活動卻不會影響到第一次相會的思維活動。因此，可以視 2.1 節中第一次相會的思維活動為 2.2 節中第二次相會思維的必要條件而非充分條件。故將兩種思維活動(解法一和解法二)暫定為兩種互相輔助的思維模式的表現；而且這兩種思維模式也可以說是，認識或思維的發展過程是呈“螺旋式”(皮亞杰，1989, p76)的上升的具體表現。

4. 結論和教學建議

雖然這兩個解法的概念化思維活動和過

程是屬於“形式運思”的表現，因為其中包含許多的抽象形式和假設推理，這對處於“準形式運思期”的兒童或學生而言，是不容易進行的解題活動。但在這裡，筆者只針對佈題和其解題紀錄的抽象形象在具體化之後所能做的形象思維活動進行分析，這樣才能獲得主體在解題活動或討論解題活動的過程中，所可能呈現的不同的思維模式或所需要具備的概念發展模式的階段性概念，譬如，“可逆運思”和“部分全體運思”。不僅可以提供做為教學和解題策略的合適性的參考，即什麼樣的學生適合解法一？什麼樣的學生適合解法二？同時還可以獲得不同思維模式或概念發展模式在認識系統或思維系統內的發展是呈螺旋式的上升狀態。

5. 參考資料

- [1] 皮亞杰(1989)：發生認識論原理(王憲鈿等譯，胡世襄校)。商務印書館。
- [2] 甯自強(1993a)：單位量的變換(I)。教師之友，34(1)，27-34。
- [3] 蘇國樑(2000)：一個關於計算面積的問題。科學教育月刊，227，2-9。
- [4] 甯自強(1993b)：“建構式教學法”之教學觀——由根本建構主義的觀點來看。國教學報，5，33-39。