

數學家比較聰明？

黃敏晃

國立臺灣大學 數學系

§ 1 從樂透到聰明

幾個月前搭飛機到高雄，和鄰坐一位老先生談到當時開辦未久的樂透。他指著我看報紙上面，全島瘋迷樂透的報導，搖頭嘆息說：「太離譜了！」我回問他：「為什麼你覺得離譜？」

他說：「這麼多人瘋狂簽注，難道不離譜嗎？」我說：「原來的譜是什麼？這幾年來的不景氣，習慣於口袋有錢的臺灣人心裡有點著急。樂透提供一個機會，使你下很小的成本，就有微小的可能性變成大富翁。這麼多人簽注只不過反映了這種社會狀態而已。至於每期花很多錢簽注的人，只是非常的少數而已，這種人每個社會都會有，也許臺灣多一些。」

「你這樣說也是有道理，但我覺得不只這樣。許多國家的樂透歷史這麼長，都沒有像臺灣樂透的現象這麼奇怪。例如許多地方的樂透，頭獎常沒人中獎，所以獎金會很快累積很高。臺灣的樂透到目前為止才發行十幾期，除兩次沒人中頭彩外，每期都有多人中，這就很不正常。」

我說：「不會呀！我倒覺得滿合理的。因為臺灣簽樂透的注數多，譬如說，第八期就超過 2340 萬筆，01 到 42 這 42 個號碼取 6 個號碼的組合共有 500 多萬種，即此期的簽

注筆數是此組合數的 4 倍多。所以若簽注時選擇的號碼組合分布很均勻，應該有 4 人中頭彩。事實上，第八期沒有人中頭彩，而其他期中頭彩的人數也沒有到達平均人數，原因是太多人相信明牌了。」

他說：「你頭腦好清楚喔，先生，你從事什麼行業？」「我是個教書匠。」「教什麼科目？在那個學校？」「數學，原來在臺大，現在退休了。」他肅然起敬：「數學好難，能在臺大教數學，難怪你這麼聰明。」我很尷尬地說：「數學好的人不一定聰明，我也有很笨的地方。」他說：「你太謙虛了。」

像這樣的事件經常發生，每次我都很不好意思。因為我雖然在大學教數學，勉強算是個小數學家（小不是年紀小，而是成就小），但我自覺並不比別人聰明。我也認識一些大數學家，他們也常說自己不比別人聰明。尤其是不熟悉的事物，問他們意見，通常聽到的回答是：「我真的不知道。」越是如此，別人越認為他們虛懷若谷。

§ 2 難倒我的題目

有人認為數學家比較聰明的原因，是他們老想和數學老師比解數學問題，他們當然比不過數學老師。就像你向職業籃球選手挑戰籃球鬥牛一樣，你一定穩輸。但向職

業籃球選手挑戰唱歌，那你可能有贏的機會，要和數學家比聰明，一定要挑也們不熟悉的題目。以我為例，我就被下列題目問倒過，而且還被我的小孩訕笑：「老爸，你好笨，這些還是和數學有關的題目呢！」

題目 1 在臺灣的日本料理店，點一人份的生魚片，為什麼總是給七塊魚片？

我察覺到這個現象，但把它視為當然。若這樣的題目可以提問，則如“人為什麼一天要吃三頓飯？睡八小時的覺？”等都可以問了。此類題目的答案是人體的需求，雖然有些人並不需要一天吃三頓飯（有人則要吃更多頓），睡足八小時，但這是一般人的習慣。一人份生魚片給七塊，也可能是基於一般人吃魚肉的需求而形成的規範。

我的回答是錯誤的，因為這只是臺灣日本料理店的規範。其成因來自生魚片的日語發音為 *sasimi*，以臺灣河洛話來說就有三和四的音，故一般都切兩種不同的魚肉，一種三片另一種四片（也有用三種魚肉，拼成 3+2+2 的組合），合起來七片。在日本一人份的生魚片就不一定給七片。

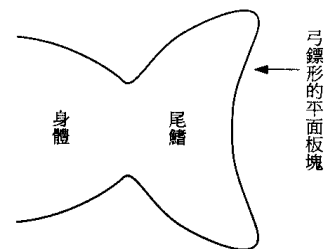
題目 2 “0000” 猜中國成語一句。

國語日報的科學教室於民國 91 年元月底舉辦數學年的活動時，有一個項目是“數學燈謎”。筆者應邀參與該項活動事前命題與謎底的檢核工作，命題者提供的此題之正確答案為“掛萬漏一”我提出異議，認為“四大皆空”或“排成一行”都是可能的答案，但大家認為後兩者數學味道較淡（既然是數學燈謎，答案當然要有數學味）。

題目 3 鯨豚和鯊魚貼近海游水時，如

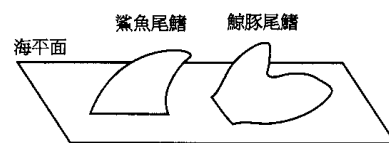
何靠其尾鰭和海平面的關係，分辨出是鯨豚還是鯊魚？

有次我和家人一起觀賞海洋動物的電視節目，十二歲的兒子指著電視畫面，海平面上的尾鰭考我這道題目。由於筆者對這方面的事物並不留意，造成我的無知，當場被兒子考倒。虛心請教後，得到如下的答案。首先，鯨豚和鯊魚的尾鰭都可粗略視為弓鏢形的平板塊，如下圖。



圖一

其次，鯨豚或鯊魚的雙眼（各視為一點），可作一個平面與它們的脊椎骨平行（當一平面和一直線平行時，把它們無限延長都不會相交）讓我們暫時將此平面叫做此動物的左右平衡面，有雙眼的脊椎動物都可定出此平面。脊椎動物行動時，經常此平面垂直於地心引力（即平行於海平面）。



圖二

鯊魚的尾鰭與它的左右平衡面互相垂直，故游弋海面時與海平面互相垂直；此時我們只會看到尾鰭的上半部，像個三角板。鯨豚的尾鰭與它們的左右平衡面互相平行，鯨豚游行於海面時，常喜歡全身或部份跳出水面，故我們會看到整個弓鏢形的尾鰭（它

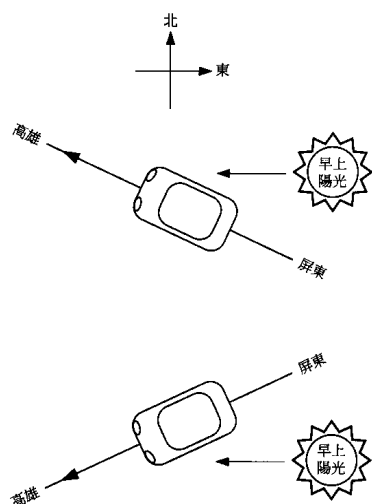
會以某種斜角平拍在海面上) 這兩種運動的型態是非常不一樣的。

§ 3 數學連結地理

上述的三道題目，牽涉到我不熟悉的事物，當然容易被問倒。不過，我也能和其他人一樣，用追根究底的方式探討這些問題的本質，進行解題。下面再舉題目 4 和 5，都與地理有關，和讀者分享我解題的歷程。

題目 4 高雄市和屏東市，那個比較南邊（從緯度的角度來比較）？

我們的刻板印象是，由台北搭火車南下，先到達的車站在比較北邊，後到達的則比較南邊，由此推論高雄站（在高雄市）先到，然後才到屏東站（在屏東市），所以高雄市在屏東市的北邊。有天早上，我和兒子搭火車由屏東市到高雄市，他注意到陽光是從左後方照進車箱（以車箱前進的方向做為前方），向我提出此問題，我無法回答，因為觀察到的現象和高北屏南的已知互相矛盾，見圖三上。



圖三

到達高雄市後，立刻買了份高雄縣地圖（才會包含高雄市和屏東市），發現屏東市在高雄市往東約 13 公里，往北約 5 公里處。即從緯度的角度而言，屏東市比高雄市略為偏北一點點，見圖三下。

後來搭車時比較注意這方面現象，發現在台北縣鶯歌站往南的一個地段，也有和上述的類似狀況。例如早上搭車南下時，陽光從右後方（火車前進方向為前方）照過車箱。有興趣的讀者，可自行進一步追究下去。

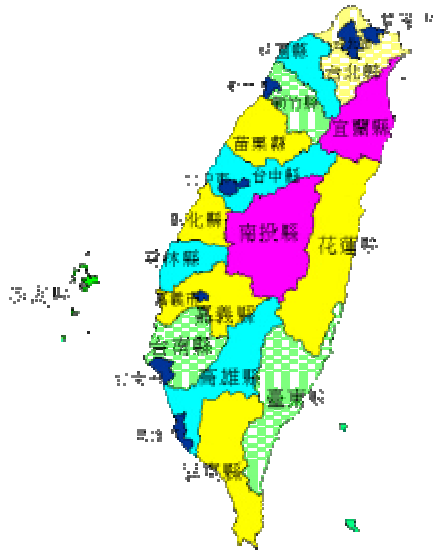
題目 5 大家都知道高雄縣圍住了高雄市（高雄市和海還有交界，故不是完全被圍住），並和臺南市、臺南縣、屏東縣及臺東縣有共同的邊界。那麼高雄縣和嘉義市、嘉義縣、雲林縣、南投縣、花蓮縣有沒有共同的交界？

這是筆者 and 一位登山界的朋友阿罕喝茶時，他考我的問題。他不准查地圖，我只好靠腦中的臺灣地圖來運思作答。一個人腦中的圖（mental map 下文簡稱腦圖）通常是由極粗略摘要的印象形成，許多的細節都被省略。譬如說，我印象中的嘉義市被嘉義縣完全圍住，像澎湖完全被海圍住一樣，不可能和其他縣市（當然包含高雄縣）相交。這種特別的現象，在我腦中是以孤島現象這樣的標籤來歸類的。

我腦圖中關於臺灣各縣市的粗略印象是，臺東、花蓮、屏東和高雄縣都是南北較長，東西較窄的形狀，但是高雄縣是西南到東北走向的；嘉義縣和臺中縣則是東西向較長，南北較扁的形狀；臺南縣和南投縣是南北向和東西向長度比較接近的形狀，臺南縣

數學家比較聰明？

較小，南投縣較大。這些形狀之間的相互關係又是如何呢？



圖四

嘉義縣的南部，就無法和南投相交了。這個細節並不在我腦圖中，只好再用猜的。又猜錯了，阿罕提供了進一步資料，高雄縣、花蓮和南投三縣的交界點是海拔 3208 公尺的達芬尖山，高雄縣、嘉義縣和南投三縣的交界點則是玉山主峰。他說，若我前年陪他去爬玉山，這部分就不會答錯。



圖五

§4 你有多少鄰居

我知道屏東縣的北部不夠高，擋不住高雄縣和臺東相交。事實上，臺東、高雄縣和屏東三縣的交界在大小鬼湖附近，我登山來過這裡。前一陣電視報導，新發現有萬株神木的山區，就在這裡附近。

高雄縣和花蓮有沒有相交，要看臺東的北部夠不夠高，若臺東比高雄縣高，就可擋住高雄縣和花蓮相交。我的腦圖中這個細節不存在，只好用猜的。我猜不相交，阿罕說不對。他說去年年底才登過臺東、花蓮和高雄縣三縣交界的三叉山，海拔 3496 公尺。

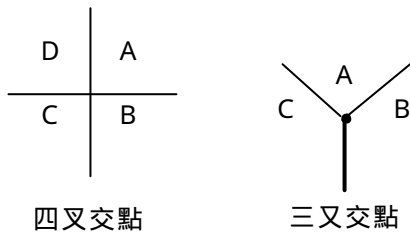
臺南縣東西向不夠長，擋不住高雄縣和嘉義縣相交，這點是正確的。至於高雄縣是否和南投相交，則要看嘉義東西向是否夠長？若嘉義縣夠長，高雄縣的北部就會頂住

由此可見，一個人的腦圖也可靠個別的經驗，幫忙補足細節，使腦圖的功能更有效率。由於腦圖的粗糙，有時會令人產生錯覺，因此會得到錯誤的推論。有位地理老師，就把上題的材料改頭換面，利用我的錯誤，把我再考倒一次。題目如下述，但讓我們先澄清一些名詞的意義。

把臺灣各縣市，(包含臺北和高雄這兩個院轄市，以及海各當作一個獨立的地區，當兩地區有一條共同邊界(通常是曲線，而非直線)時，我們說它們相鄰。譬如說在圖六的右圖中，A 和 B，B 和 C，C 和 A 都相鄰(互為鄰居)，但在左圖四叉交點的局部，A 和 C，及 B 和 D 都只相交於一點，就不算相鄰了。

在上述的界定下，圖四中臺東縣有 4 個鄰居(花蓮、高雄縣、屏東和海)，屏東有 3

個鄰居（臺東、高雄縣和海），高雄市則只有 2 個鄰居（高雄縣和海）。澎湖、嘉義市、臺中市和臺北市則呈現海島現象，只有 1 個鄰居。



圖六

題目 6 臺灣各縣市中鄰居最多的是那個縣市（海不是縣市，故應該除外，不列入答案的考慮）。

我和許多人一樣，都誤以為位居臺灣中央的南投是答案的正解。錯！南投只有花蓮、臺中縣、彰化、雲林、嘉義縣、高雄縣

等 6 個鄰居，而臺中縣有南投、花蓮、宜蘭、新竹縣、苗栗、臺中市、海和彰化等 8 個鄰居；高雄縣更有屏東、臺東、花蓮、南投、嘉義縣、臺南縣、臺南市，海和高雄市等 9 個鄰居。

一般人的腦圖中，常會有位居中央的南投，四面八方都有鄰居的錯覺。但東西向很長的臺中縣，以及西南斜橫到東北很長的高雄縣，顯然有更多的鄰居。這樣的錯覺，數學家 and 一般人都會犯，可見數學家和一般人是一樣平凡的，沒有更聰明。最後，沿著上面題目 4.5.6 的脈絡，提出下面的題目 7 給讀者想想。

題目 7 世界各國的行政地圖上，存在行政區域（如省、州）的四叉交點（參看圖六）或更多叉的交點嗎？

（上承第 72 頁）

3. 整理並分析資料。
4. 選擇適用的資料，利用手工或藉助電腦處理，以 A4 紙張整理成冊。
5. 設計一個符合主題的封面。
6. 各組分別上臺報告並討論。

問題與討論：

1. 搜集資料的過程是否遇到一些困難呢？這些困難是什麼？
2. 承上題，針對所發生的困難，有什麼對策可以解決或改善這些問題呢？