

磁鐵的極強、磁矩與磁場

蔡尚芳

國立臺灣大學 物理系

摘要

國內目前使用的物理教材，有關磁力作用的部分，在高中階段與大學普通物理學課程中，通常都先由電流的磁效應切入，指出載流導線會在空間各處建立磁場，因而可使在磁場中運動的電荷，感受到磁力。但在國小與國中階段，則多半是由現象學的觀點出發，先觀察磁鐵對鐵質物體的吸引作用，再引進磁場、磁力線與磁力的觀念。至於從電流磁效應的觀點，要如何描述磁鐵的磁力強弱，以及其磁場的大小與方向，則各階段的教材，似乎多略而不提，鮮少詳細加以說明。

基於不同階段教材內容互相銜接的需要，本文由現代電磁學的觀點，以磁偶極子為闡釋磁作用與磁現象的基本單元，說明如何定義磁鐵的磁極強度，並進而建立磁力與距離平方成反比的重要特性。文中也舉出一些有關磁鐵與磁力作用的例子，藉以說明此類的靜磁學問題，確可完全仿照靜電學中有關庫侖作用力的各種分析與解法，獲得定量而明確的答案，此外並討論磁矩與磁化強度的測量方法。

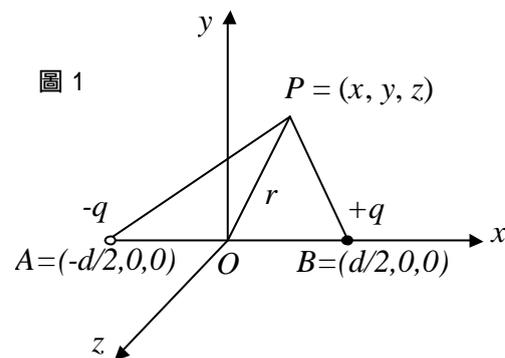
磁鐵的極強、磁矩與磁場

如果不計較力的本質，則在很多情況下，靜磁力與靜電力極為相似。同樣地，磁鐵的特性，也與靜電學中的電偶極子極為相

似。由於靜電學的觀念，較易掌握，故以下首先討論電偶極子的電場。

(一)電偶極子的電場

電偶極子(electric dipole)是由帶正電 $+q$ 與帶負電 $-q$ 的兩個非常靠近的點電荷形成的，其總電量為零。討論電偶極子的靜電作用時，由於負電荷到正電荷的位移 \vec{d} 很小，通常都可將電偶極子視為一點，但因 \vec{d} 與電量 q 的乘積 $\vec{p} = q\vec{d}$ ，亦即電偶極矩(electric dipole moment)，具有一定的量值，並不隨 d 變小而趨近於零，故電偶極子與其他帶電體之間，會有靜電力作用，這與完全重合的正電荷與負電荷，並不相同。



考慮如圖 1 所示的電偶極子。設取 x 軸的正方向為由負電荷 A 到正電荷 B ，並取 AB 的中點 O 為原點。若點 P 的座標為 (x, y, z) ，則 OP 的長度為 $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ ，而電偶極子在點 P 產生的電場 \vec{E} ，可依重疊原理求

$$\text{得為 } \vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{(x-d/2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{[(x-d/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} - \frac{(x+d/2)\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{[(x+d/2)^2 + y^2 + z^2]^{3/2}} \right\} \quad (1)$$

依二項式展開定理，當 $u^2 < 1$ 時，可得 $(1+u)^a = 1+au+\dots$ ，故如 r 大於 d ，則可將上式中的分母展開至 d 的一次方，而得

$$\frac{1}{[y^2 + z^2 + (x \pm d/2)^2]^{3/2}} \approx \frac{1}{(r^2 \pm xd)^{3/2}} \quad (2)$$

$$= \frac{1}{r^3} (1 \pm \frac{xd}{r^2})^{-3/2} \approx \frac{1}{r^3} (1 \mp \frac{3xd}{2r^2})$$

由於含 d 的二次方以上的各項可以忽略，故綜合以上兩式的結果可得

$$\vec{E} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left\{ \left[\frac{3xd(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{2r^2} - \frac{d}{2}\hat{i} \right] - \left[-\frac{3xd(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})}{2r^2} + \frac{d}{2}\hat{i} \right] \right\} \quad (3a)$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} (3px\vec{r} - p\hat{i})$$

如果以 $\hat{r} = \vec{r}/r$ 代表 OP 方向的單位長度向量，並以純量積 $\vec{p} \cdot \hat{r}$ 表示 px ，則上式可改寫為

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (3b)$$

上式的結果顯示電偶極子對電荷 Q 的作用力 $\vec{F} = Q\vec{E}$ ，一般並非沿著 \hat{r} (亦即連心線) 的方向，而作用力的大小也與 \vec{r} 和 \vec{p} 的夾角有關，而不能完全由距離 r 決定，故形式與 \vec{F} 相同的作用力，特稱為張量式力 (tensor force)。

當 P 點位在 x 軸上時， $\hat{r} = \hat{i}$ ，故由上式可看出電場為

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{i})\hat{i} - p\hat{i}}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{3p - p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \hat{i} = \frac{2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4a)$$

而當點 P 在 yz 平面上時， $\vec{p} \cdot \hat{r} = 0$ ，故電場

$$\text{為 } \vec{E} = \frac{(0 - \vec{p})}{4\pi\epsilon_0 r^3} = \frac{-\vec{p}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (4b)$$

(二)磁偶極子的磁場

考慮一個半徑為 a 、電流為 I 的線圈，此線圈的面積為 $A = \pi a^2$ 。若如圖 2 所示，以線圈中心 O 為原點，取 x 軸使與線圈平面垂直，則在 x 軸上一點 $P = (x, 0, 0)$ 之磁場 \vec{B} ，依必歐-沙伐 (Biot-Savart) 定律，可求得為

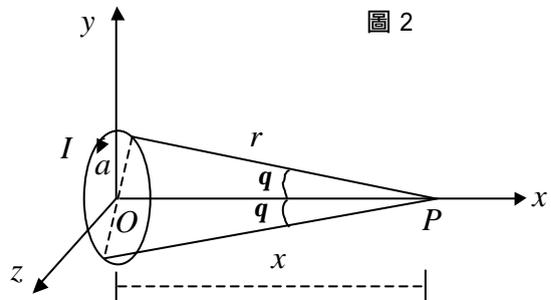


圖 2

$$\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2\pi a I \sin q}{r^2} \hat{i} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2\pi a^2 I}{r^3} \hat{i} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2IA}{r^3} \hat{i} \quad (5a)$$

當 a 趨近於零時，上式中之 r 即為 OP 之長度。若將電流 I 與面積 A 的乘積以 m 表示，即 $m = IA$ ，並定義向量 $\vec{m} = m\hat{i}$ ，則上式

$$\text{成為 } \vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2m}{r^3} \hat{i} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \right) \frac{2\vec{m}}{r^3} \quad (5b)$$

上式與(4a)式具有相同的形式，如比較此兩式，可看出靜磁學中的向量 \vec{m} ，與靜電學中的電偶極矩 \vec{p} 互相對應，故 \vec{m} 稱為磁偶極矩 (magnetic dipole moment)，簡稱為磁矩。同理，一個面積很小的載流線圈，可視為與電偶極子對應，而可稱之為磁偶極子 (magnetic dipole)。磁偶極子之大小通常雖可忽略而將其視為一點，但因其電流 I 與面積

A 的乘積 $m = IA$ ，具有一定的量值，並不隨 A 變小而趨近於零，故磁偶極子與其他物體間會有磁力作用。

若 P 點不在 x 軸上，則磁偶極子(或大小可忽略的載流線圈)所產生的磁場 \vec{B} ，仍可依必歐-沙伐定律求得，其形式一如預期，與

$$(3b) \text{式相同，即 } \vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{r^3} \quad (6)$$

(三) 均勻磁體的磁矩與極強

一個均勻的磁鐵或磁體(magnet)，可視為是由很多均勻分布的磁偶極子或原子大小的載流線圈所組成，其橫截面有如圖 3a 所示。由於任何兩個相鄰磁偶極子的電流，在磁體內部會因方向相反，而彼此相消，故均勻磁體的內部沒有淨電流，只有在表面部分，才會有電流出現，稱為磁化電流(magnetization current)，換言之，一個均勻的磁體可視為僅在表面有電流，就像螺線管或載流線圈一樣，如圖 3b 所示。

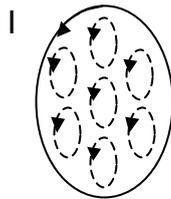


圖 3a

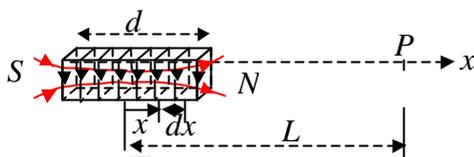


圖 3b

一個磁體的總磁矩 \vec{m} ，等於其所含之各磁偶極子的磁矩的總和。考慮如圖 3b 所示的

均勻磁體，其總長度為 d ，橫截面積為 A ，體積為 $V = Ad$ 。若此磁體每單位體積內之磁偶極子數為 n ，而每一磁偶極子的磁矩均為 \vec{m} ，則其每單位體積內之磁矩為 $\vec{M} = n\vec{m}$ ，稱為其磁化強度(magnetization)，而此磁體的總磁矩則為 $\vec{m} = V\vec{M} = (Ad)\vec{M} \quad (7a)$

若比照靜電力的來源為電荷(electric charge)的說法，則靜磁力的來源，可稱為磁荷(magnetic charge)，而磁體的總磁矩，可視為是因其負磁荷 $-q_m$ (即 S 磁極)與正磁荷 $+q_m$ (即 N 磁極)之間有一位移 $\vec{d} = d\hat{i}$ 所造成。如仿照電偶極矩 \vec{p} 之定義為電荷 q 與位移 \vec{d} 的乘積，則磁偶極矩也可定義為磁荷與位移的乘積，即 $\vec{m} = q_m\vec{d} = (q_md)\hat{i} \quad (7b)$

綜合以上兩式，並令 $\vec{m} = m\hat{i}$ ，

$$\vec{M} = M\hat{i}，可得 \quad q_m = \frac{m}{d} = MA \quad (7c)$$

上式中之磁荷 q_m 亦稱為磁體的磁極強度，簡稱極強(pole strength)。由於磁矩為電流與面積的乘積，其單位為 $A \cdot m^2$ (即安培-公尺²)，故磁極強度的單位為 $A \cdot m$ (即安培-公尺)。

(四) 均勻磁體在對稱軸上產生的磁場

如圖 3b 所示的均勻磁體，在其縱向對稱軸 x 軸上 P 點所產生的磁場，可依以下兩種方式求得。

(甲) 積分法

此磁體中由 x 到 $x+dx$ 的部分，依 (7a) 式，具有磁矩 $\vec{m} = (Adx)\vec{M}$ ，故此部分在 P 點產生的磁場可依(5b)式求得為

$$d\vec{B} = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) \frac{2MA dx}{(L-x)^3} \hat{i} \quad (8a)$$

而整個磁體產生的磁場則為

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) 2\vec{M}A \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dx}{(L-x)^3} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \vec{M}A \frac{1}{(L-x)^2} \Big|_{-d/2}^{d/2} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \vec{M}A \left\{ \frac{1}{(L-d/2)^2} - \frac{1}{(L+d/2)^2} \right\} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \vec{M}A \frac{2Ld}{(L^2 - d^2/4)^2} \end{aligned}$$

上式可利用(7a)式寫成 (8b)

$$\vec{B} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2L}{(L^2 - d^2/4)^2} \vec{m} \quad (8c)$$

或利用(7c)式寫成

$$\vec{B} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \left\{ \frac{q_m}{(L-d/2)^2} - \frac{q_m}{(L+d/2)^2} \right\} \hat{j} \quad (8d)$$

(乙)平方反比定律法

不需運用積分，(8d)式之結果亦可相當容易地求得如下：

假設磁荷 q_m 對磁荷 q'_m 之磁力 \vec{F} 為連心力，且可仿照庫倫靜電力之形式，表示為與兩磁荷之乘積成正比，而與兩者間距離 r 之平方成反比，則當以 \hat{r} 代表由磁荷 q_m 指向磁荷 q'_m 之單位向量時，磁力之公式可寫成

$$\vec{F} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{q_m q'_m}{r^2} \hat{r} \quad (9a)$$

若將磁荷 q_m 在某處之磁場 \vec{B} ，定義為每單位磁荷在該處所受之磁力，即

$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{q'_m} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{q_m}{r^2} \hat{r} \quad (9b)$$

則(8d)式之結果，顯然可運用上式，將 N 極磁荷 $+q_m$ (與 P 點距離為 $L-d/2$) 與 S 極磁荷 $-q_m$ (與 P 點距離為 $L+d/2$) 在 P 點所產生的磁場相加後求得。

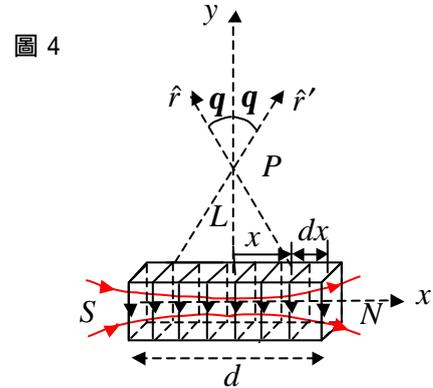
(五)均勻磁體在垂直軸上產生的磁場

上述均勻磁體在 y 軸上 P 點(如圖 4)所產生的磁場，可依以下兩種方式求得。

(甲)積分法

如圖 4 所示，此磁體中由 x 到 $x+dx$ 的部分，與由 $-(x+dx)$ 到 $-x$ 的部分，依(7a)式其磁矩相同，均為 $\vec{m} = (Adx)M\hat{i}$ 。此兩部分在 P 點產生的磁場，其和可依(6)式求得為

$$d\vec{B} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \left\{ \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}}{(L^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{3(\vec{m} \cdot \hat{r}')\hat{r}' - \vec{m}}{(L^2 + x^2)^{3/2}} \right\} \quad (10a)$$



但因 $\hat{r} = -\sin q \hat{i} + \cos q \hat{j}$ ， $\hat{r}' = \sin q \hat{i} + \cos q \hat{j}$ ，故得 $\vec{m} \cdot \hat{r} = -\vec{m} \cdot \hat{r}' = -m \sin q$ ， $\hat{r} - \hat{r}' = -2 \sin q \hat{i}$ ，將此結果代入上式，並利用 $L \tan q = x$ 與 $L \sec^2 q dq = dx$ 之關係，可得

$$\begin{aligned} d\vec{B} &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2m(3 \sin^2 q - 1)}{(L^2 + x^2)^{3/2}} \hat{i} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2\vec{M}A(3 \sin^2 q - 1) \cos q dq}{L^2} \end{aligned} \quad (10b)$$

故如令 $L \tan a = d/2$ ，則整個磁體在 y 軸上 P 點所產生的磁場為

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2\vec{M}A}{L^2} \int_0^{\sin a} (3 \sin^2 q - 1) d(\sin q) \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2\vec{M}A}{L^2} (\sin^3 a - \sin a) \\ &= -\left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{\vec{M}Ad}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \end{aligned} \quad (11a)$$

上式之結果可利用(7a)式改寫成

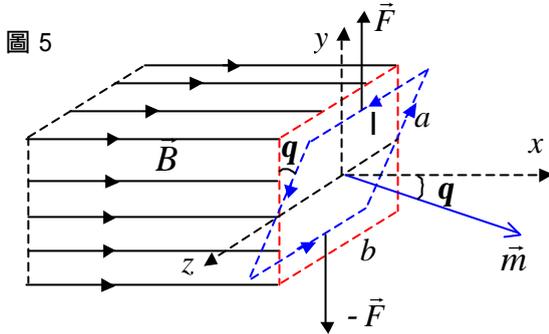
$$\vec{B} = -\left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{1}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \vec{m} \quad (11b)$$

(乙)平方反比定律法

如利用(9b)式與(7c)式，則不需運用積分，(11b)式之結果亦可求得如下：

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) q_m \left\{ \frac{(-d/2)\hat{i} + L\hat{j}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \right. \\ &\quad \left. - \frac{(d/2)\hat{i} + L\hat{j}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \right\} \\ &= \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{(-q_m d)\hat{i}}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \\ &= -\left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{1}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \vec{m} \end{aligned} \quad (11c)$$

(六)均勻磁場對磁針或磁偶矩子的力矩



如圖 5 所示，在沿 x 軸方向的均勻磁場 B 中，有一僅可繞 z 軸轉動的長方形線圈，其邊長為 a 與 b 。若此線圈上流過之電流為 I ，則磁場對其上、下兩邊之磁力，分別為 $\vec{F} = F\hat{y} = IbB\hat{y}$ 與 $-\vec{F}$ 。當線圈平面與 yz 平面之夾角為 q 時，此兩力至 z 軸的力臂均為 $r = (a/2)\sin q$ ，故磁力對線圈上、下兩邊之力矩均為 $rF\hat{y}$ 。因磁力對線圈前、後兩邊之力矩，其和為零，故得線圈所受之總力矩為

$$\vec{\tau} = 2rF\hat{z} = IbB\sin q\hat{z} \quad (12a)$$

因線圈磁矩 \vec{m} 之大小 m 等於長方形面積 ab 與電流 I 之乘積，故上式亦可改寫為

$$\vec{\tau} = mB\sin q\hat{z} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (12b)$$

如圖 6a 所示之磁針，設其極強在 S 極為 $-q_m$ ，在 N 極為 q_m ，由 S 極至 N 極之位移為 \vec{d} ，則均勻磁場 \vec{B} 對其 S 極與 N 極之磁力分別為 $-q_m\vec{B}$ 與 $q_m\vec{B}$ ，故針磁所受之力矩為 $\vec{\tau} = \vec{d} \times (q_m\vec{B})$ 。因磁針之磁矩為 $\vec{m} = q_m\vec{d}$ ，故對磁針而言， $\vec{\tau} = (q_m\vec{d}) \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}$ ，即(12b)式之結果亦適用。

(七)偏向磁強計(deflection magnetometer)

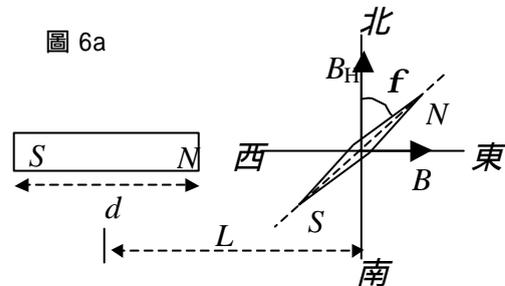
如圖 6a 所示¹，一均勻磁鐵棒之棒軸沿東西向，長度為 d ，磁矩為 m 。棒軸上距離其中心 L 處，有一磁矩為 m 的小磁針，僅能在水平面自由轉動。

設於磁針所在處之地球磁場，其水平分量為 B_H (向北)，而磁鐵之磁場為 \vec{B} (向東)，則當此磁針靜止於 f 角時，上述二磁場對其作用之力矩和必須為零，故由(12b)式得

$$mB_H \sin f - mB \cos f = 0 \quad (13a)$$

利用(8c)式之結果，上式亦可寫成

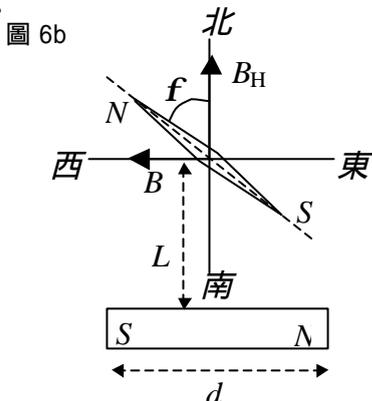
$$\tan f = \frac{B}{B_H} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{2L}{(L^2 - d^2/4)^2} \left(\frac{m}{B_H}\right) \quad (13b)$$



同理，如圖 6b 所示，將小磁針放置於磁鐵垂直軸上離中心 L 處，則利用(11c)式之結果可得

$$\tan f = \frac{B}{B_H} = \left(\frac{m_0}{4p}\right) \frac{1}{(L^2 + d^2/4)^{3/2}} \left(\frac{m}{B_H}\right) \quad (13c)$$

若量出 f 角 L 與 d ，則不論由(13b)或(13c)式，均可求得磁鐵磁矩 m 與地磁水平分量 B_H 之比。



(八) 振動磁強計(vibration magnetometer)

設均勻磁鐵棒之磁矩為 m ，以垂直懸線，將磁鐵棒自中心吊起，使棒軸只能在一個水平面內轉動。當磁鐵棒沿南北向靜懸時，使其略微偏轉一小角度，則依(12b)式之結果，磁鐵棒因地磁之作用，受到回復力矩 $mB_H \sin f$ ，將作簡諧振動，如圖 7 所示。設磁鐵棒繞通過其中心之垂直軸的轉動慣量為 I_C ，其角加速度為 \ddot{f} ，則其做小角度轉動的運動方程式為

$$I_C \ddot{f} = -mB_H \sin f \approx -mB_H f \quad (14a)$$

故得角頻率為 $\omega = \sqrt{mB_H / I_C} \quad (14b)$

上式中磁鐵棒之轉動慣量，視其形狀與大小而定。若棒之質量為 m ，長度為 d ，則沿棒軸方向之線密度為 $I = m/d$ 。設棒之截面為長方形，邊長為 a 與 b ，則如圖 8 所示，

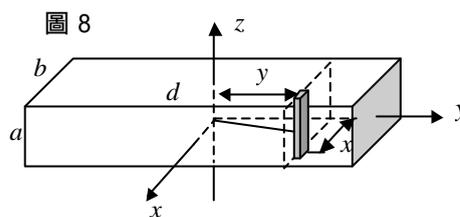
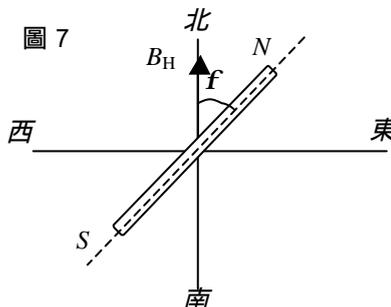
磁鐵棒位於 y 至 $y+dy$ 部份之質量為 $dm = I dy$ ，其轉動慣量 dI 為

$$\begin{aligned} dI &= \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + x^2) \frac{dx}{b} dm \\ &= \frac{dm}{b} \int_{-b/2}^{b/2} (y^2 + x^2) dx \\ &= dm (y^2 + b^2/12) \end{aligned} \quad (14c)$$

故整條磁鐵棒之轉動慣量為

$$\begin{aligned} I_C &= \int dI = \int (y^2 + \frac{b^2}{12}) dm \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} (y^2 + \frac{b^2}{12}) I dy \\ &= \frac{m}{12} (d^2 + b^2) \end{aligned} \quad (14d)$$

利用(14b)與(14d)之結果，配合(13b)或(13c)式，可看出由角頻率之測量，可測得磁鐵棒之磁矩 m 與地磁之水平分量 B_H 。



(九) 磁化強度之測量

如圖 9 所示¹，將兩個完全相同的螺線圈，使其軸線沿東西向成一直線，並在兩者中點處置一偏向磁強計。將兩螺線圈串聯，並接通電源，使其產生相反之磁場 B_0 ，則在地磁水平分量 B_H 的作用下，磁強計之磁針指

向北，其偏角 f 為零。注意：若電流為 I ，每單位長度之線圈匝數為 n ，則可得知 $B_0 = \mu_0 n I$ 。

若於左邊螺線圈內，插入一長度為 d 、截面積為 A 、且完全去磁的鐵棒，則在磁場 B_0 作用下，鐵棒會被磁化而出現磁化強度 M ，而有磁矩 $m = MA d$ ，故在磁針處會產生一向東之磁場 B_M ，由(8b)式得其大小為

$$B_M = \left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right) M A \frac{2Ld}{(L^2 - d^2/4)^2} \quad (15a)$$

在地磁水平分量 B_H 與磁場 B_M 的作用下，磁強計之磁針偏角 f 可由(13b)式求得為 $\tan f = B_M / B_H$ ，故得磁化強度為

$$M = \left(\frac{4\pi}{\mu_0}\right) \frac{(L^2 - d^2/4)^2}{2LAd} B_H \tan f \quad (15b)$$

利用圖 9 裝置中之可變電阻與變向開關，可改變電流 I 之大小與方向，若畫出 M 對 $H = nI$ 的變化曲線，稱為磁化曲線，則可看出鐵磁物質的遲滯現象。

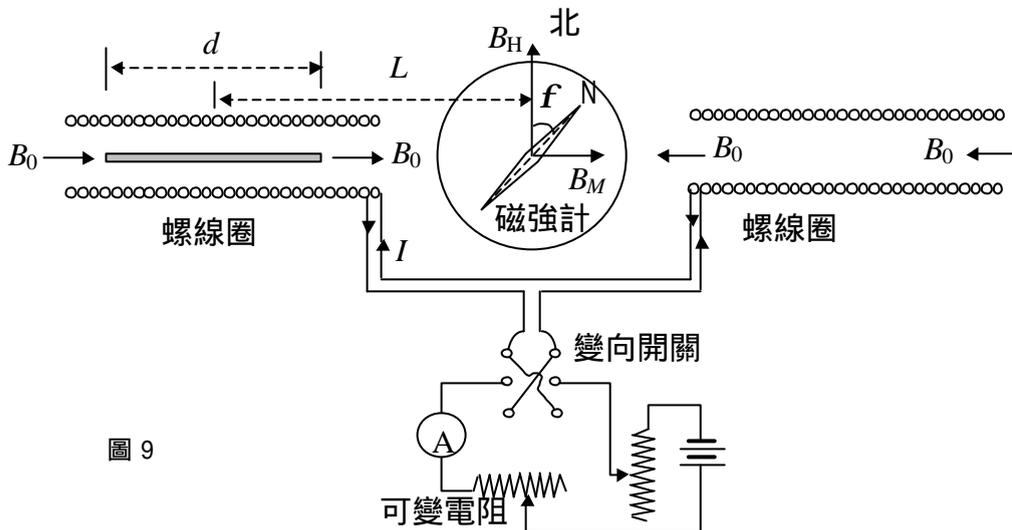


圖 9

參考資料：

1. 普通物理學實驗 pp.108-111(實驗 42 與 43)，國立臺灣大學理學院物理學系編，民國四十八年十月印行。