中學生通訊解題第十九期題目參考解答與評析

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901901

100 個同學圍坐成一圓圈，遊戲開始，每人先各由 1、2、3 三數中依〝相鄰之人不得選擇相同數字〞之條件，任意選定一數作為自己的幸運數字。選定之後各人與鄰座依序兩兩一組，共分 50 組，各組二人幸運數字之和若為 3、4、5 者各有 a、b、c 個組，則 a、b、c 三數中最大之各組有獎。

小希與左鄰同組，統計結果數字和為 5 的 c 各組獲獎。

小希說：若我與右座同組，獲獎的未必是 c 組吧。

小聰說：一樣啦！不論你與左鄰或右座同組，a、b、c 之值不會變的。

你以為呢？

參考解答：

設 100 人中，以 1,2,3 為幸運數字者各有 x,y,z 人，即 $x+y+z=100$。

小希與左鄰同組時，二人幸運數字和為 3,4,5 者各有 a,b,c 組

小希與右座同組時，二人幸運數字和為 3,4,5 者各有 a',b',c'組

則 $\begin{cases} a+b=x \\ a+c=y \\ b+c=z \\ a+b+c=50 \end{cases}$ $\begin{cases} a'+b'=x \\ a'+c'=y \\ b'+c'=z \\ a'+b'+c'=50 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} a+z=50=a'+z \\ b+y=50=b'+y \\ c+x=50=c'+x \end{cases}$ 即 $a=a'$，$b=b'$，$c=c'$

小聰說的對！

解題重點：

分析題意，依分組規則列出方程組，再作比較。

評析：

本題難度較高，答題狀況普遍不佳，部分同學僅舉出一個特例，或發生觀念錯誤、算式不清的情形，顯示國中生對於題目的分析仍有進步空間。本題答題人數共 9 人，平均得分 2 分，答題優良者為新莊國中吳之堯同學。

問題編號
901902

若 p 為質數，且 $\frac{q}{10p}=0.1\overline{23xyzw}$ $=0.123xyzw23xyzw23xyzw\cdots$，$q$ 為自然數，x、y、z、w 為阿拉伯數字，求 p 之值。

參考解答：

$\frac{q}{10p}=\frac{123xyzw-1}{9999990}$

$\Rightarrow 10p(123xyzw-1)=q\times 9999990$

$\Rightarrow p(123xyzw-1)=q\times 3^3\times 7\times 11\times 13\times 37$

逐一檢驗得 $p=13$，$q=16$

解題重點：

先將循環小數化成分數的形式，從而觀察出 p 是 999999 之質因數，再經試驗得到 $p=13$ 的結論。

評析：

本題答題情況尚佳，部分同學能推得 p=13 的結論，但未能清楚說明理由，甚是可惜。本題答題人數共 12 人，平均分數為 4.5 分，答題優良者有銘傳國中邱柏凱同學、福和國中胡明原同學、大直國中陳俊曄同學及新莊國中吳之堯同學等。

問題編號
901903

(1)設 n 是形如 $4k+1$ 的正整數（例如：1,5,9,⋯），是否可以找到 n 個正奇數，a_1、a_2、a_3、⋯、a_n，使得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$？

(2)若有 n 個正奇數 a_1、a_2、a_3、⋯、a_n，滿足 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$，證明 n 必為形如 $4k+1$ 的正整數。

參考解答：

(1)取 $a_1=a_2=\cdots=a_{n-2}=1$，$a_{n-1}=3$，$a_n=2k+1$

$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n=6k+3$，$a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n=3(2k+1)=6k+3$

∴可找到 n 個正奇數 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$，使得 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$

(2)∵ $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdots a_n$

而 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 為正奇數

∴$a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n$ 為奇數

⇒n 為奇數

假設 n=4k+3，k 為大於等於 0 的整數

考慮 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ 中，被 4 除餘 1 的有 x 個，則被 4 除餘 3 者有 $(n-x)$ 個

$N=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+a_n\equiv 3n-2x\equiv 2x+1 \pmod 4$

$M=a_1\cdot a_2\cdots a_{n-1}\cdot a_n\equiv(-1)^{n-x}\equiv(-1)^{x+1} \pmod 4$

(a)若 x 為奇數，$N\equiv 3 \pmod 4$

但 $M\equiv 1 \pmod 4$ ……….不合

(b)若 x 為偶數，$M\equiv 1 \pmod 4$

但 $M\equiv 3 \pmod 4$ ……….不合

由(a),(b)可知假設不成立。

∴n 必為形如 $4k+1$ 的正整數。

解題重點：

第一小題主要是構造出滿足條件的情況；而第二小題則由除法原理出發，利用餘數相同的概念，得到結果。

評析：

本題對國中生而言偏難，因此答題人數僅有 4 人，平均得分為 4.75 分，答題優良者為福和國中胡明原同學。

問題編號
901904

某天蛋頭正在寫數學作業，調皮搗蛋的弟弟把他的作業本搶了去，在幾個數字上亂塗鴉，結果只見題目如下：

“若($x^4+★x^2+▲$)可被($x^2+★x+▲$)整除，……………”

蛋頭只記得兩個★處是相同數字，兩個▲處也是相同數字，請幫幫忙解救他，找出★和▲的數字吧！

參考解答：

假設★ $=a$ 且▲ $=b$

則由長除法的計算可得下式：

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-a \\
\cline{2-2}
1+a+b & 1+0+a+0+b \\
 & 1+a+b \\
\cline{2-2}
 & -a+(a-b)+0 \\
 & -a-a^2-ab
\end{array}
$$

但當 $a=0$ **時，上式不正確**

$\therefore$ **必須討論** a **是否為** 0**，同理** b **亦然**

(1) $a=0$ **且** $b=0$**：滿足條件，得**

$(a,b)=(0,0)$

(2) $a=0$ **但** $b\neq 0$**：則** $x^4+b=(x^2+b)Q(x)$

(A)

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1+0-b \\
\hline
1+0+b & 1+0+0+0+b \\
 & 1+0+b \\
\hline
 & -b+0+b \\
 & -b+0-b^2 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore b+b^2=0$

$b(1+b)=0$

$b=0$ **或** -1 (0 **不合**)

得 $(a,b)=(0,-1)$

(B) **取** $x^2=-b$ (**降次**)

$\therefore x^4+b=(x^2)^2+b$

$=(-b)^2+b=b^2+b=0$

亦然

(3) $a\neq 0$ **但** $b=0$**：**

則

$x^4+ax^2=(x^2+ax)Q(x)$

$x^3+ax=(x+a)Q(x)$

$\therefore (-a)^3+a(-a)=-a^2(a+1)=0$

$\therefore a=0$ **或** -1 (0 **不合**)

得 $(a,b)=(-1,0)$

(4) $a\neq 0$ **且** $b\neq 0$ **：**

$$
\begin{array}{r|l}
 & 1-a+1 \\
\hline
1+a+b & 1+0+a+0+b \\
 & 1+a+b \\
\hline
 & -a+(a-b)+0 \\
 & -a-a^2-ab \\
\hline
 & (a^2+a-b)+ab+b \\
 & 1+a+b \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

$\therefore a^2+a-b-1=0$

$ab-a=0$

$a(b-1)=0$

$\therefore a=0$ (**不合**) **或** $b=1$

$\therefore a^2+a-2=(a-1)(a+2)=0$

$\therefore a=1$ **或** -2

得 $(a,b)=(1,1)$ **或** $(-2,1)$

由上述(1)(2)(3)(4)**情況可知** $(a,b)=(0,0)$ **或** $(0,-1)$ **或** $(-1,0)$ **或** $(-2,1)$ **或** $(1,1)$

解題重點：

熟悉多項式的除法運算，以及因式分解的應用，並分析 a、b **的各種情況。**

評析：

本題需就 a、b **的值分類討論，容易遺漏** $(a,b)=(0,0)$ **的情況，造成得分率不高的情形。本題答題人數為** 23 **人，平均得分為** 1.83 **分。**

問題編號
901905

在平面直角座標系中，A 點座標為 (1,1)**，B 點與 C 點都在座標軸上（可能同在 x 軸或 y 軸上，也可能各在一個座標軸上），A、B、C 三點形成一個等腰三角形。**

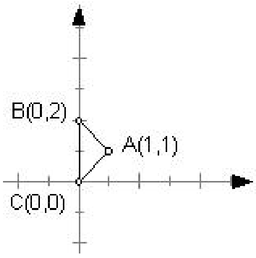
(1)**請找出 5 個滿足以上條件的三角形。**

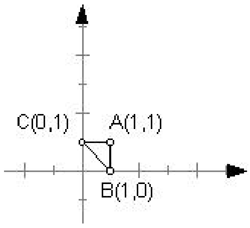
(2)**設以 A 為頂點，令** $\overline{AB}=\overline{AC}=d$**，試用** d **的值來討論此類等腰三角形** ΔABC **的個數。**

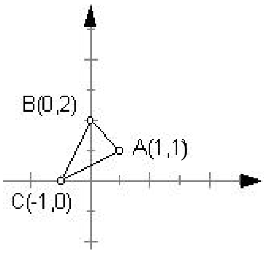
(3)**若以 B、C 為頂點，請討論這類的等腰三角形的個數。**

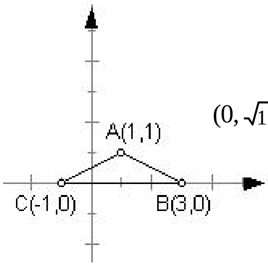
參考解答：

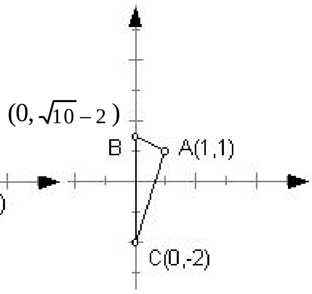
(1)











(2) ∵△ABC 是以 A 為頂點，$\overline{AB}=\overline{AC}$ 的等腰△

∴B,C 分別落在以 A 為圓心，d 為半徑的圓上，又∵B,C 須在座標軸上，故可用圓與 x,y 軸的相交情形，討論等腰△ABC 的個數。

(a)d=1 時，一解

(b)1<d<$\sqrt{2}$ 時，六解

(c)d=$\sqrt{2}$ 時，兩解

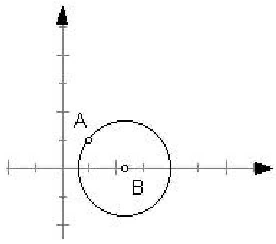
(d)d>$\sqrt{2}$ 時，六解

(3)設以 B 當頂點，取 $B(x_0,0)$

∵ $\overline{BA}=\overline{BC}$

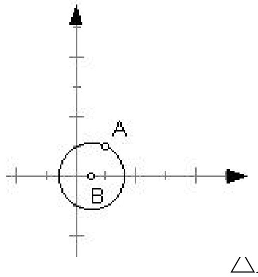
∴A,C 均在以 B 為圓心，$\overline{BA}$ 為半徑的圓上因此就 x_0 討論△ABC 的個數。

$x_0\geq 1$



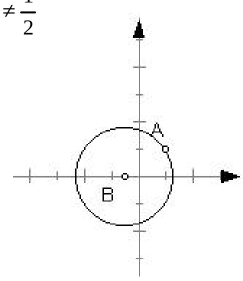
△ABC 有兩種

$x_0=\dfrac{1}{2}$



△ABC 有三種

$1>x_0\neq\dfrac{1}{2}$



△ABC 有四種

解題重點：

掌握等腰三角形的性質，能將距離相等的條件轉化為圓上各點，並懂得分就不同情況討論。

評析：

大部分同學能做出第一小題，少數同學能夠將第二小題作完整的討論。本題答題人數共 12 人，平均得分為 2.916 分，答題優良者為福和國中胡明原同學。