

數學解題中「無到有」的感覺

許建銘

高雄市立龍華國民中學

一、前言：

英國一位難題研究專家曾經發表如下的問題：「如何在厚紙板上，切割出兩把套在同一圓圈的鑰匙(如圖 1-1)? 但圓圈與鑰匙不可有縫隙。」初看這問題的人，大多會與筆者產生同樣疑問：「有可能嗎？」甚至於說，出題者先將圖 1-2 繪製在厚紙板上，再請觀者設法割出如 1-1 的圖，相信還是很多人會滿頭霧水且無計可施。



圖 1-1

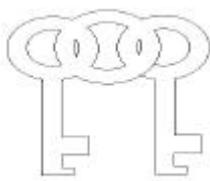


圖 1-2

要從圖 1-2 的厚紙板上，切割如圖 1-1 的圓圈與鑰匙，它的關鍵在於：用心「看透」鑰匙圈與鑰匙的交會處。只要將此交會處看成「重疊」的兩部分，問題就解決大半了。因為這圖是繪製在厚紙板上，所以可以作如下的割離：如圖 1-3，將粗黑線由上而下切到紙板一半厚度的位置；而虛線部分，則是由紙背往上反切到紙板的一半厚度，然後設法將四個「重疊」區域上下分開，就見得到如圖 1-1 的完成圖了。

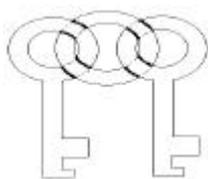


圖 1-3

另一道趣味數學問題是這樣問的：「圖 1-4 是利用 24 根棉花棒所擺成的 2 個正方形，請問如何操作可使它在移動其中 4 根後，變成 3 個正方形；又接著再移動其中 8 根，可以變成 9 個小正方形。」

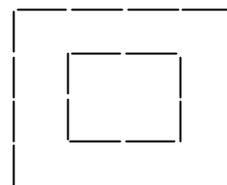


圖 1-4

這道問題我拿來給國三學生當假日「休閒小品」，同樣得到滿多學生的熱烈迴響。可惜只有極少數人想出正確解法(如圖 1-5)，大多數的學生僅解出問題前半部如何變成 3 個正方形的部分(如圖 1-6 至 1-9)，但因無法繼續移動作成 9 個小正方形，而宣告失敗或認定無解。

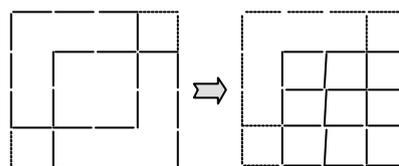


圖 1-5

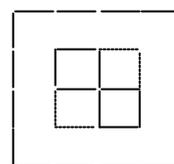


圖 1-6

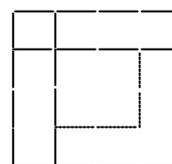


圖 1-7

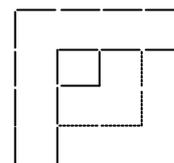


圖 1-8

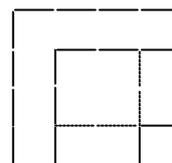


圖 1-9

為什麼想到圖 1-5 的學生比想到其它圖的學生少呢？仔細看看這五個圖，不難發現這幾個圖當中，就以圖 1-5 的左圖中，三個正方形同時重疊的區域為最多，而這也可能是它們比較不被學生「看開」來的主要原因。而圖 1-6 和圖 1-7，就是因為三個正方形沒有同時重疊的區域，所以是當中較容易被學生想到的兩個圖。

「看透」與「看開」兩種「從無到有」的「感覺」，其實也是幾何學上早已存在的解題觀點。由於受到現代電腦軟體的設計觀念，以及「形而上」生活哲學思維的影響，筆者才嘗試將這種解題思考呈現於解題步驟與數學教學上，當然更希望藉此文章，讓讀者感受到「思考之美」。

現在讓我為這種解題思考作進一步的說明：當我們看到一個幾何圖形時，首先要有「想得開」與「想得透」的「想法」，也就是說：不管無心或有心在看圖，都要感覺到這張圖可能是由多個畫在同一紙片上的圖所建構而成的「群組」。如果群組中每個圖的背景都是透明無色的，就較容易「看開」這些圖；如果群組中有一些圖的背景是有色的，此時就要借助敏銳的洞察力，才能「看透」紙片上可能「隱藏」的圖形，當然能「看透」，也就能「看開」了。

以上的說明，也同時確立了一個思考內涵：「想開」、「想透」、「看開」、「看透」，是一種以模擬的、動態的觀點來解幾何問題的分析方式，它們可以使幾何問題的解法更接近具象的操作，並走入較生活化的體驗。以下就列舉幾個數學問題，從解題中將可看到

「魔術藥水」使遮遮掩掩的圖形「無所遁形」；「萬能鑰匙」解開層層疊疊的圖形並讓它們「躍然紙上」。

二、本文：(以下各圖的虛線部分，表示「看透」的圖形)

(一)問題 1：如圖 2-1， $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ ， $\overline{CD} \perp \overline{AB}$ 。
求證： $\overline{BE} = \overline{CD}$

【證 1】(1)看得開 $\triangle ABE$ 與 $\triangle ACD$ (如圖 2-2)

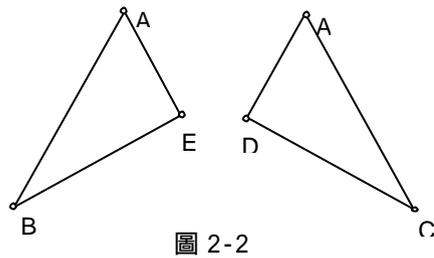
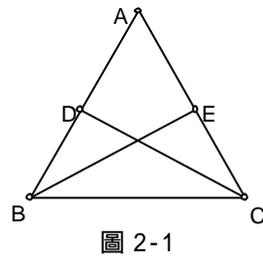
(2) $\because \overline{BE}$ 、 \overline{CD} 分別為 \overline{AC} 、 \overline{AB} 邊上的高

$$\therefore \angle AEB = \angle ADC = 90^\circ$$

(3) 又 $\angle A = \angle A$ ， $\overline{AB} = \overline{AC}$

$$\therefore \triangle ABE \cong \triangle ACD$$

$$\text{故 } \overline{BE} = \overline{CD}$$



【證 2】(1)看得開 $\triangle DBC$ 與 $\triangle ECB$ (如圖 2-3)

(2) $\because \overline{CD}$ 、 \overline{BE} 分別為 \overline{AB} 、 \overline{AC} 邊上的高

$$\therefore \angle BDC = \angle CEB = 90^\circ$$

(3) 又 $\overline{BC} = \overline{BC}$ ， $\angle DBC = \angle ECB$

$$\therefore \triangle DBC \cong \triangle ECB$$

$$\text{故 } \overline{BE} = \overline{CD}$$

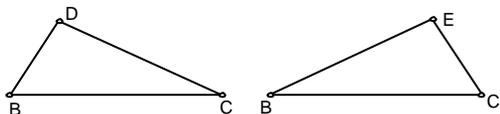


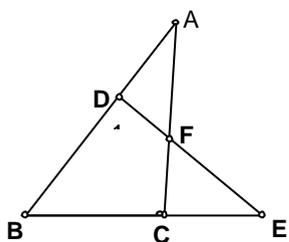
圖 2-3

(二)問題 2：如圖 2-4， $\angle 1 + \angle 2 = 160^\circ$ ， $\angle A = 40^\circ$ ， $\angle E = 35^\circ$ ，求 $\angle B$ ？

【解 1】看不開的解法：

$$\text{設 } \angle 1 = x^\circ, \angle 2 = 160^\circ - x^\circ$$

$$\angle ADF = 180^\circ - x^\circ, \angle FCE = 20^\circ + x^\circ$$



如圖 2-4

$$180 - x + 40 = 20 + x + 35$$

$$\Rightarrow 2x = 165$$

$$\Rightarrow x = 82.5$$

$$\therefore \angle FCE = 102.5^\circ$$

$$\Rightarrow \angle B = 102.5^\circ - 40^\circ = 62.5^\circ$$

【解 2】看得開 $\triangle ABC$ 與 $\triangle DBE$ (如圖 2-5)

$$\angle B = \frac{360^\circ - 40^\circ - 35^\circ - 160^\circ}{2}$$

$$= \frac{125^\circ}{2} = 62.5^\circ$$

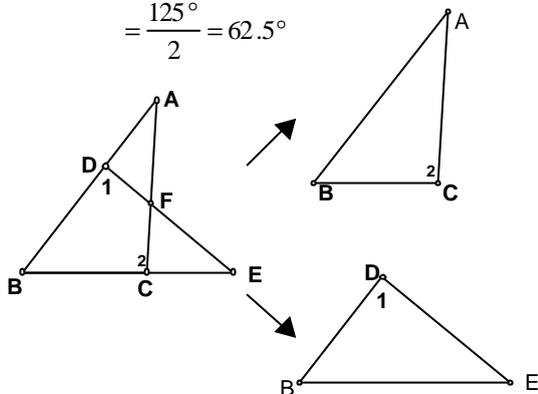


圖 2-5

(三)問題 3：如圖 2-6，矩形 $ABCD$ 中， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 4$ ， BE 弧是以 \overline{AB} 為半徑之圓的四分之一， BF 弧是以 \overline{BC} 為半徑之圓的四分之一，求斜線部分的面積？

【解 1】看不開(如圖 2-7)的解法：

(1)過 F 作 $\overline{FH} \perp \overline{AB}$

$$(2) \overline{AB} = 6, \overline{BC} = \overline{CF} = \overline{BH} = 4$$

$$\Rightarrow \overline{AH} = 6 - 4 = 2$$

$$\Rightarrow \text{矩形 } ADFH \text{ 面積} = 2 \times 4 = 8$$

(3)區域 Q 的面積

$$= 4^2 - \frac{1}{4} \times p \times 4^2 = 16 - 4p$$

(4)斜線部分的面積

$$= 6^2 p \times \frac{1}{4} - 8 - (16 - 4p)$$

$$= 13p - 24$$

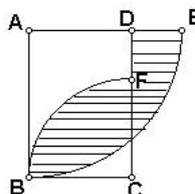


圖 2-6

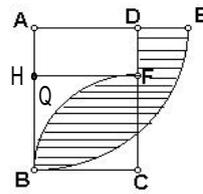


圖 2-7

【解 2】看得開 1、2、3 (如圖 2-8)

斜線部分的面積 = (1 加 2 減 3) 的面積

$$\text{積} = \frac{1}{4}(36p + 16p) - 24$$

$$= 13p - 12$$

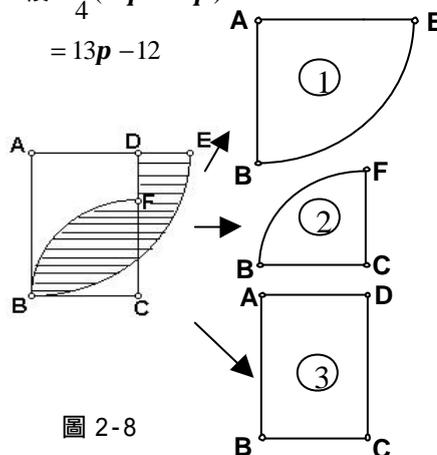


圖 2-8

(四)問題 4：如圖 2-9， $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $ACDE$ 為正方形，求 $\angle EBC$ 的度數？

【解 1】看開等腰 $\triangle ABE$

$$\begin{aligned} \text{設 } \angle ABE = \angle AEB &= x^\circ \\ \therefore \angle BAE &= 180^\circ - 2x^\circ \\ \Rightarrow \angle BAC &= 90^\circ - 2x^\circ \\ \Rightarrow \angle ABC &= \frac{180^\circ - (90^\circ - 2x^\circ)}{2} \\ &= 45^\circ + x^\circ \\ \therefore \angle EBC &= 45^\circ \end{aligned}$$

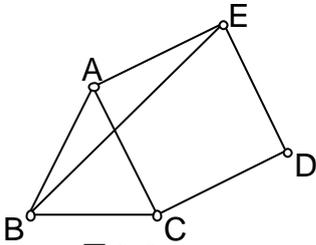


圖 2-9

【解 2】看透圓 A (如圖 2-10)

$$\begin{aligned} \therefore \angle EAC &= 90^\circ = \text{CE 弧的度數} \\ \therefore \angle EBC &= \frac{1}{2} \times 90^\circ = 45^\circ \end{aligned}$$

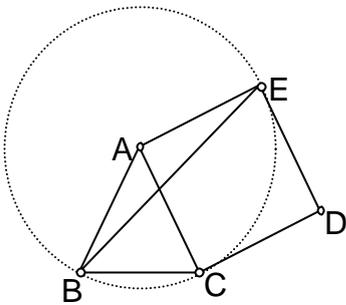


圖 2-10

(五)問題 5：如圖 2-11，正五邊形 $ABCDE$ 的兩條對角線 \overline{AC} ， \overline{BE} 相交於 P 。

求證： $\overline{BC} = \overline{PC}$

【證 1】看開 $\triangle ABC$ 與 $\triangle ABE$ (如圖 2-12)

$$\begin{aligned} \therefore \angle BAE &= \angle ABC = 108^\circ \\ \therefore \angle 1 = \angle 2 = \angle 3 &= \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ \\ \therefore \angle 4 &= 108^\circ - \angle 3 = 108^\circ - 36^\circ = 72^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{又 } \angle 5 &= \angle 2 + \angle 3 = 36^\circ + 36^\circ = 72^\circ \\ \Rightarrow \angle 4 &= \angle 5 \quad \therefore \overline{BC} = \overline{PC} \end{aligned}$$

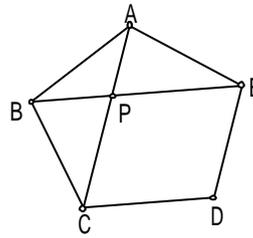


圖 2-11

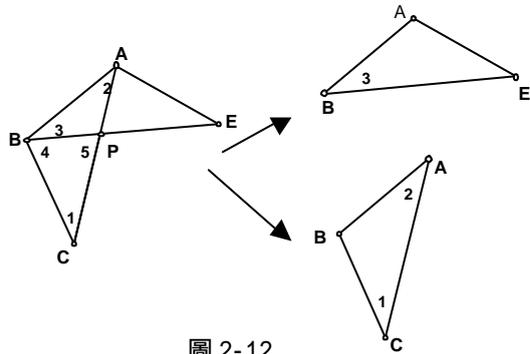


圖 2-12

【證 2】看透正五邊形 $ABCDE$ 的外接圓 (如圖 2-13)

$$\begin{aligned} \therefore \angle CBE &= \frac{1}{2} \text{CDE 弧的度數} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} \times 360^\circ\right) = 72^\circ \\ \text{又 } \angle BPC &= \frac{1}{2} (\text{BC 弧} + \text{AE 弧}) \text{的度數} \\ &= \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5} \times 360^\circ\right) = 72^\circ \\ \Rightarrow \angle CBE &= \angle BPC \\ \therefore \overline{BC} &= \overline{PC} \end{aligned}$$

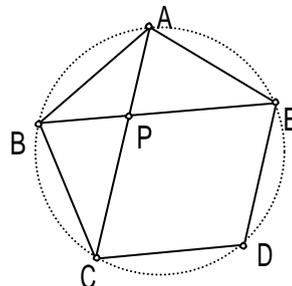


圖 2-13

(六)問題 6：如圖 2-14，若 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ， $\overline{AD} \perp \overline{BC}$ ，試證 $\overline{CD} + \overline{BD} > \overline{AB} + \overline{AC}$ 。

【證 1】(1) 看透以 \overline{AD} 為軸， $\triangle ACD$ 的鏡射圖 $\triangle AED$ (如圖 2-14)

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2, \overline{AE} = \overline{AC}$$

$$(2) \because \overline{AD} \perp \overline{BC} \quad \therefore \angle 2 = \angle ACB$$

$$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 = \angle ACB = \angle ABC$$

$$\therefore \angle 1 + \angle 2 + \angle BAC$$

$$= \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180^\circ$$

推得 B, A, E 三點共線

$$(3) \because \overline{DE} + \overline{BD} > \overline{BE} = \overline{AB} + \overline{AE}$$

$$\therefore \overline{CD} + \overline{BD} > \overline{AB} + \overline{AC}$$

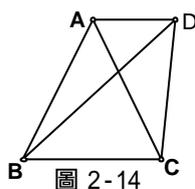


圖 2-14

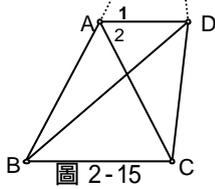


圖 2-15

【證 2】(1) 看透 \overline{BF} 為直徑的圓 A 與 $\triangle ADF$ (如圖 2-16)

$$(2) \text{ 因為 } \overline{AD} \parallel \overline{BC}$$

$$\Rightarrow \angle 3 = \angle ABC, \angle 4 = \angle ACB$$

$$\text{又 } \angle ABC = \angle ACB \quad \therefore \angle 3 = \angle 4$$

$$(3) \because \overline{AF} = \overline{AC}, \angle 3 = \angle 4, \overline{AD} = \overline{AD}$$

$$\therefore \triangle FAD \cong \triangle CAD \Rightarrow \overline{DF} = \overline{CD}$$

$$(4) \because \overline{DF} + \overline{BD} > \overline{AB} + \overline{AF}$$

$$\therefore \overline{CD} + \overline{BD} > \overline{AB} + \overline{AC}$$

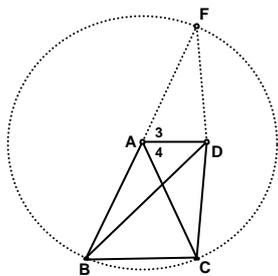


圖 2-16

(七)問題 7：如圖 2-17，正 $\triangle ABC$ 內部任一點 P ，且 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PE} \perp \overline{BC}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{AC}$ ，若 $\overline{AB} = a$ ，試證： $\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$

【證 1】看透 $\triangle APB$ 與 $\triangle APC$ 與 $\triangle BPC$ (如圖 2-18)

由 $(\triangle APB + \triangle APC + \triangle BPC)$ 的面積 = $\triangle ABC$ 面積

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \overline{PD} \times \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{PE} \times \overline{BC} + \frac{1}{2} \overline{PF} \times \overline{AC}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} (\overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF}) \times a = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

$$\text{得證 } \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

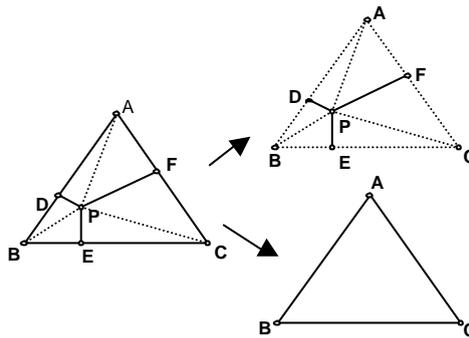


圖 2-18

【證 2】(1) 看透正 $\triangle AMN$

(2) 看透 $\triangle AMN$ 和 $\triangle ABC$ 的高 \overline{AG} 和 \overline{AH} (如圖 2-19)

(3) 因為 $\overline{PD} \perp \overline{AB}$ ， $\overline{PF} \perp \overline{AC}$ ，由等腰三角形性質

$$\text{可推得 } \overline{PD} + \overline{PF} = \overline{AG}$$

$$\Rightarrow \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \overline{AG} + \overline{PE} = \overline{AG} + \overline{GH} = \overline{AH}$$

$$\text{得證 } \overline{PD} + \overline{PE} + \overline{PF} = \frac{\sqrt{3}}{2} a$$

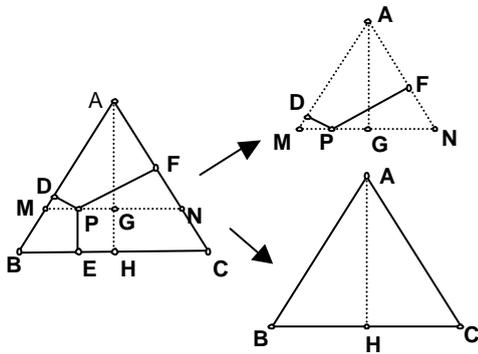


圖 2-19

(八)問題 8：有一個半徑為 1 的圓形硬幣，沿著直角三角形 ABC 的三邊內緣移動一周，若 $\angle B = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$ ， $\overline{BC} = 8$ ，求硬幣掃過的面積？

【解】(1)如圖 2-20，設 $BDIG$ 為邊長 2 的正方形，

且 $\overline{DE} \parallel \overline{BC}$ ， $\overline{FG} \parallel \overline{AB}$ ，

$\overline{IH} \perp \overline{AC}$ 。

(2)看開 $\triangle ADE$ 、 $\triangle FGC$ 、 $\triangle FIE$ 、 $\triangle ABC$ 為四個相似直角三角形。

(3)因為 $\overline{AD} = 6 - 2 = 4$ ，所以

$$\overline{DE} = 8 \times \frac{4}{6} = \frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow \overline{IE} = \overline{DE} - \overline{DI} = \frac{16}{3} - 2 = \frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{IE}}{\overline{BC}} = \frac{5}{12}$$

$$\therefore \overline{IH} = \frac{6 \times 8}{10} \times \frac{5}{12} = 2$$

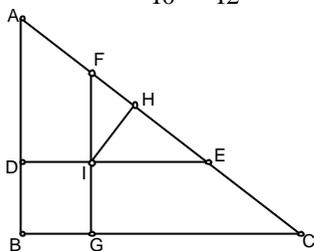


圖 2-20

由 $\overline{DI} = \overline{IG} = \overline{IH} = 2$ ，推得硬幣掃過如圖

2-21 的斜線區域。

以上(1)~(3)的解題目的，是解題者試圖求出 \overline{IH} 的長，以斷定硬幣掃過的區域是否會產生「中空」(若 $\overline{IH} > 2$) 的情形。然而若能看透 $\triangle ABC$ 的內切圓(如圖 2-22 之右圖)，且算得半徑為 $\frac{6+8-10}{2} = 2$ ，當然可以更快推出硬幣掃過的區域圖形。

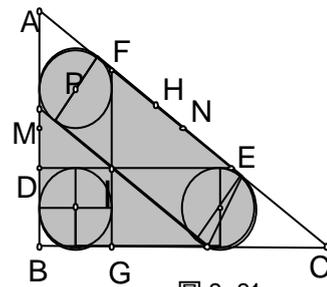


圖 2-21

(4)看透 $\triangle AMN$ (如圖 2-21, \overline{MN} 為圓 P 的切線且平行 \overline{BC})

因為圖 2-22 的左、右兩圖相似，

又圓 P 半徑為 1，而圓 S 半徑為 2

$$\text{所以 } \overline{AM} = 6 \times \frac{1}{2} = 3,$$

$$\overline{MN} = 8 \times \frac{1}{2} = 4$$

$$\Rightarrow \overline{BM} = 6 - 3 = 3$$

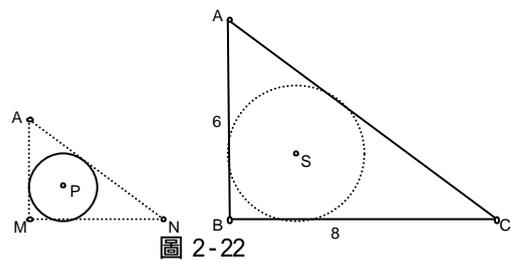


圖 2-22

(5)看開圓 P 與梯形 $MBCN$ (如圖 2-23)

\therefore 斜線面積 = 圓 P 面積 + $MBCN$ 面積

$$= p + \frac{1}{2}(4+8) \times 3 = p + 18$$

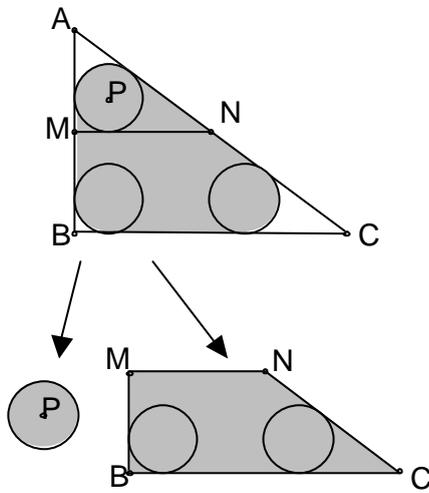


圖 2-23

三、結論：

如果將羽毛、草莓、猴子這三張圖卡，拿給幼兒選擇一項與香蕉相關的圖卡，研究幼兒認知發展的專家說，三歲以下的兒童會根據「猴子喜歡吃香蕉」的「情節特性」選擇猴子圖卡；而三歲以上的幼兒，會因感覺羽毛和香蕉的「外形相似」而選擇羽毛圖卡；若是年齡再稍大的兒童或成人，則可能以分

類學的概念選擇草莓圖卡，因為兩者都是水果。

由此可知每個人對事物間關係連結的認知能力，會因為學習發展以及時空變遷等因素影響，造成一些差異或轉變。如同習慣以「作」「輔助線」的「外加」觀點來看待的某些圖形，如今也可以考慮用「看透」與「看開」，這種「原形畢露」的「內存」觀點來看待。就像「打電話」這件事，是從「打」演進至「撥」和「按」電話訊號，現代人「打電話」更可能連號碼鍵都不按（因為號碼已經內存在記憶體上），而改以更簡便的操作（如「音控」），就可以完成電話撥打的工作了。

一樣的東西，會隨著時空轉換、人事遷移，而有不同思考的生命展現。正如許多數學道理早已為人發現與認識，但透過許多有心人士的領會與傳播，就算同一份、最基礎的教材，也會吹動出不一樣的聲音、節奏與感覺。