循環數列的一般項公式
——一個數學問題研究的例子

陳　薇　祁恒昱　謝沛興
臺北市立建國高級中學

摘　要

給定數列 $0,0,\cdots,0,0,1,0,0,\cdots,0,0,1,0,0,\cdots,0,0,1,\cdots$，即每 $k-1$ 個 0 之後接一個 1，反覆循環下去。在這篇短文中分別用複數理論和初等數論的 Euler 函數 $f(n)$，Möbius 函數 $m(n)$ 得到這循環數列的兩個一般項公式。我們也推廣這個結果，得到更一般的循環數列 $c_1,c_2,\cdots,c_k,c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots$ 的一般項公式。

這個問題雖然是數列的教材，卻結合了高中的複數理論，與初等數論中 Euler 函數 $f(n)$，Möbius $m(n)$ 函數的理論。

我們選擇保留了整個探索問題的過程，而非直接呈現最後的結果。希望不僅在教學上有參考價值，也希望這樣的方式不僅體現了在教學上如何引導學生如何體驗數學研究"慢慢深入問題，靈機一動，豁然開朗"的必經過程。

一、前　言

不論是在小學的智力遊戲，國中的性向測驗，或是在高中數學的"數列與級數"，乃至於更高階的離散數學或組合數學的課程中，"看出一般項"是一個非常重要的技能。這與觀察能力，歸納能力，作出猜測和以純數學驗證的能力都有密切的關係。由建中課堂"數列與級數"上課的經驗，我們發現這個問題是非常有趣的：

$0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots$，請問一般項是什麼?

直觀上看出規律並不困難，但是如何用一個確切的公式來表示它的一般項，卻難倒了絕大部份的同學。特別是當老師提出答案:

$0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots$，的一般項是 $\dfrac{1^n+(-1)^n}{2}$

之後，台下是一片讚嘆及咒罵。很自然地我們聯想，如果不只是每 2 個數一循環時，會發生什麼狀況?

稱形如上例為由 0 和 1 所構成的 2-循環數列。一般來說，我們定義

$$\{a_{k,n}\}:\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{k\text{-1 個 }0},1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{k\text{-1 個 }0},1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{k\text{-1 個 }0},1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{k\text{-1 個 }0},1,\underbrace{0,0,\cdots,0,0}_{k\text{-1 個 }0},1,\cdots$$

為每 k 個數一循環的數列(此後稱作 k-循環數列)，其中 $a_{k,n}=\begin{cases}0,\text{當}n\text{不是}k\text{的倍數}\\1,\text{當}n\text{是}k\text{的倍數}\end{cases}$。

例如 $\{a_{1,n}\}=1,1,1,1,1,1,1\cdots$;

$\{a_{2,n}\}=0,1,0,1,0,1,0,1,0,1,\cdots$;

$\{a_{3,n}\}=0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,\cdots$ 等等。

在這篇文章中，我們從求這個數列的一般項出發，得到一些結果。我們發現這個數列不只和複數的 n 次方根有關，也和初等數論中的 Möbius 函數有關。第二節中我們將用高中的複數求出一般項。第三節中我們引進

Möbius 函數，求出另一個一般項的表示。第四節我們合併這兩節的結果，得到一些很不顯然的等式。然後稍作推廣，得出最一般的 k-循環數列的通項表示。

這個小結果不只說明了數學的奧妙，說明了數學不同領域之間的關連，也說明了數學的小研究並非遙不可及，材料真的是就在身邊。

二、複數的 n 次方根

這一節中，我們用複數來求出 $\{a_{k,n}\}$ 的一般式。整個探索的過程是這樣的：

首先觀察一些初始的情形。

$\{a_{1,n}\}$: 1,1,1,1,1,1,1,1,1,1, $\cdots$ (1-循環數列)是無聊的，其一般項為 $a_{1,n}=1$。

$\{a_{2,n}\}$: 0,1,0,1,0,1,0,1,0,1, $\cdots$ (2-循環數列)是第一個不無聊的情況。我們發現利用也同樣是每 2 個數一循環的 $\{(-1)^n\}$ 可以把這個數列湊出來：

$$\begin{array}{rl} & -1,\ 1, -1,\ 1, \ldots,\quad (-1)^n\quad ,\ldots \\ +) & \underline{\ \ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ldots,\qquad 1^n\quad ,\ldots} \\ & 0,\ 2,\ 0,\ 2, \ldots, (-1)n+1\ n, \ldots \end{array}$$

故 $\{a_{2,n}\}$ 的第 n 項為 $a_{2,n}=\dfrac{1^n+(-1)^n}{2}$。

$\{a_{3,n}\}$: 0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1,0,0,1, $\cdots$，有上個例子，很快我們就體會要先找三次一循環的數列。因此必然是"$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$"。試驗一下就有

$$\begin{array}{rl} & \omega,\ \omega^2, 1,\ \omega,\ \omega^2, 1, \ldots,\qquad \omega^n\qquad ,\ldots \\ & \omega^2,\ \omega, 1,\ \omega^2,\ \omega, 1, \ldots,\qquad (\omega^2)^n\quad ,\ldots \\ +) & \underline{\ 1,\ 1, 1,\ 1,\ 1, 1, \ldots,\qquad 1^n\qquad ,\ldots} \\ & 0,\ 0, 3,\ 0,\ 0, 3, \ldots, \omega^n+(\omega^2)^n+1^n, \ldots \end{array}$$

故列出 $\{a_{3,n}\}$ 第 n 項為

$$a_{3,n}=\frac{1^n+w^n+(w^2)^n}{3}。$$

作到這裡，一般的結果已經呼之欲出了。我們的主要結論是：

定理一：

固定 $k\in N$。定義數列 $\{a_{k,n}\}_{n\geq 1}$ 以

$$a_{k,n}=\begin{cases}0,\text{當}n\text{不是}k\text{的倍數}\\ 1,\text{當}n\text{是}k\text{的倍數}\end{cases}$$

。則 $\{a_{k,n}\}_{n\geq 1}$ 的一般項

$$a_{k,n}=\frac{1^n+a^n+(a^2)^n+\cdots+(a^{k-1})^n}{k},$$

其中 a 為 $x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x^2+x+1=0$ 的任一複數根。

證明：

假設 a 為 $x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x^2+x+1=0$ 的任一複數根，令

$$a=\cos\frac{2m\pi}{k}+i\sin\frac{2m\pi}{k}, m\in\{1,2,\cdots,k-1\}$$

，則其他根分別為 $a^2, a^3, \cdots, a^{k-1}$。

接下來只要證明僅當 n 為 k 的倍數時定理中的表達式等於 1，其它情形等於 0 即可。

(i)當 n 不為 k 的倍數，可設 $n=k\cdot q+r$，r 為正整數且 $0<r<k$。

則 $1^n+a^n+(a^2)^n+\cdots+(a^{k-1})^n$

$$\begin{aligned}
&=1^{k\cdot q+r}+a^{k\cdot q+r}+(a^2)^{k\cdot q+r}+\cdots+(a^{k-1})^{k\cdot q+r}\\
&=1^{k\cdot q+r}+a^{k\cdot q+r}+a^{2k\cdot q+2r}+\cdots+a^{(k-1)k\cdot q+(k-1)r}\\
&=1+a^r+a^{2r}+\cdots+a^{(k-1)r}\\
&=1+(a^r)+(a^r)^2+\cdots+(a^r)^{k-1}\\
&=0
\end{aligned}$$

(ii)當 n 為 k 的倍數，可設 $n=k\cdot q$。

則 $1^n + a^n + (a^2)^n + \cdots + (a^{k-1})^n$

$= 1^{k\cdot q} + a^{k\cdot q} + (a^2)^{k\cdot q} + \cdots + (a^{k-1})^{k\cdot q}$

$= 1 + (a^k)^q + (a^k)^{2q} + \cdots + (a^k)^{(k-1)\cdot q}$

$= \underbrace{1+1+1+\ldots+1}_{k\text{ 個 }1}$

$= k$

由(i),(ii)可得

$$a_{k,n} = \frac{1^n + a^n + (a^2)^n + \cdots + (a^{k-1})^n}{k} = \begin{cases} 0，當 n 不為 k 的倍數 \\ 1，當 n 為 k 的倍數 \end{cases}$$

此式即數列 $\{a_{k,n}\}$ 的一般項公式。

得證

至此我們已算是完全解決了這個問題。然而經另外不同的思路，我們發現可以不用複數的方法來作。在下一節中我們用數論的角度來討論。

三、Möbius 函數 $m(n)$，Euler 函數 $f(n)$

這一節中，我們換用完全不同的切入點。我們將利用初等數論中的 Euler 函數 $f(n)$ 和 Möbius 函數 $m(n)$ 來求出 $\{a_{k,n}\}$ 的一般式。我們的主要的結論是

定理二：

固定 $k \in N$。定義數列 $\{a_{k,n}\}_{n\ge1}$ 以 $a_{k,n} = \begin{cases} 0, 當 n 不是 k 的倍數 \\ 1, 當 n 是 k 的倍數 \end{cases}$。則 $\{a_{k,n}\}_{n\ge1}$ 的一般項 $a_{k,n} = \dfrac{\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})}{f(k)}$，

其中 (n,d) 為 n,d 的最大公因數；$f(n)$ 為 Euler 函數，$m(n)$ 為 Möbius 函數。

這式子非常神奇。在證明之前我們來看看怎麼猜出這個式子的。由上一節的經驗，我們知道先找到“k 個一循環”的數列是關鍵。除了 1 的 k 次方根之外，還有沒有會“k 個一循環”的數列呢?

既然 k-循環數列只要是第 k 項、第 $2k$ 項、第 $3k$ 項、…都等於 1，其餘各項皆為 0，因此此類數列的一般項公式應與因倍數的關係有關。沿著這線索我們首先發現關鍵性的引理：

引理三：

“固定自然數 k，數列 $\{(n,k)\}$ 是一個周期為 k 的數列”。

證明： 證此引理，只需證得(n,k)=(n+k,k)即可。令 $d_1=(n,k)$ 和 $d_2=(n+k,k)$

$\because d_1 = (n,k) \Rightarrow d_1 | n 且 d_2 | k$

$\Rightarrow d_1 | n+k 且 d_1 | k \Rightarrow d_1 | (n+k,k) = d_2$

又 $d_2 = (n+k,k) \Rightarrow d_2 | n+k,\ d_2 | k$

$\Rightarrow d_2 | (n+k) - k = n \Rightarrow d_2 | (n,k) = d_1$

$\therefore (n,k) = d_1 = d_2 = (n+k,k)$

即 $\{(n,k)\}$ 的第 n 項會等於第 $n+k$ 項、第 $n+2k$ 項、…，為一 k-循環數列。

得證

有了這個引理對於 $\{(n,k)\}$ 循環的保證，我們就可以開始繼續尋找它和所求數列之間的關聯。一樣我們從小的 k 開始：

$k=1$ 時，$\{a_{1,n}\} = 1,1,1,\cdots = \{(n,1)\}$ 是無聊的。

$k=2$ 時，數列 $\{(n,2)\}$ 為 $1,2,1,2,\ldots$，因此，$a_{2,n} = (n,2) - 1$ 即為 $\{a_{2,n}\}$ 的一般項公式，直式表式是

$$\begin{array}{rl} & 1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots,\ (n,2)\quad ,\ldots \\ \text{-)} & \underline{1,1,1,1,1,1,1,1,\ldots,\quad 1\quad ,\ldots} \\ & 0,1,0,1,0,1,0,1,\ldots,(n,2)\text{-}1,\ldots \end{array}$$

$k=3$ 時，數列 $\{(n,3)\}$ 為 1,1,3,1,1,3,…，將每一項減 1 後除以 2，就是我們要的答案了！所以答案就是 $a_{3,n}=\dfrac{(n,3)-1}{2}$ 了！來看看直式：

$$\begin{array}{rl} & 1,1,3,1,1,3,\ldots,\quad (n,3),\ldots \\ \text{-)} & \underline{1,1,1,1,1,1,\ldots,\quad 1\quad ,\ldots} \\ & 0,0,2,0,0,2,\ldots,(n,3)\text{-}1,\ldots \end{array}$$

到此我們發現只要 $k=p$，其中 p 是質數，則 $a_{p,n}=\dfrac{(n,p)-1}{p-1}$。這是令人振奮的部份結果。不是質數的情形呢?

$k=4$ 時，$\{(n,4)\}$ 所呈現的數列為 1,2,1,4,……，要怎樣將 1,2,1 一起變成 0?這是第一個瓶頸。靈機一動，我們發現用 $\{(n,4)\}$ 減掉 $\{(n,2)\}$，則

$$\begin{array}{rl} & 1,2,1,4,1,2,1,4,\ldots,\quad (n,4)\quad ,\ldots \\ \text{-)} & \underline{1,2,1,2,1,2,1,2,\ldots,\quad (n,2)\quad ,\ldots} \\ & 0,0,0,2,0,0,0,2,\ldots,(n,4)\text{-}(n,2),\ldots \end{array}$$

很神奇的，答案出來了！

為 $a_{4,n}=\dfrac{(n,4)-(n,2)}{2}$。

由此我們關鍵性的發現，得先找出“k 的因數”。再作幾個：

$k=6$ 時，有 $a_{6,n}=\dfrac{(n,6)-(n,3)-(n,2)+(n,1)}{2}$。

$k=10$ 時，有 $a_{10,n}=\dfrac{(n,10)-(n,5)-(n,2)+1}{4}$。

$k=12$ 時，有 $a_{12,n}=\dfrac{(n,12)-(n,6)-(n,4)+(n,2)}{4}$

到此，顯然

$a_{k,n}=b_1(n,d_1)+b_2(n,d_2)+\cdots+b_m(n,d_m)$，其中 $d_1,d_2,\ldots,d_m$ 為 k 的相異正因數。而各項係數 $b_1b_2,\ldots,b_m$ 和 Möbius 函數及 Euler 函數的關係已非常明顯。我們用 k=10,12 兩個典型當例子：

k \ n		(n,d) 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	d	$\mu(d)$	$\mu(k/d)$	ψ(d)
10	{(n,10)}	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10			10	1	1	4
	{(n,5)}	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5			5	-1	-1	4
	{(n,2)}	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2			2	-1	-1	1
	{(n,1)}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1			1	1	1	1
	A(k,n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4						
	B(k,n)	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1						
12	{(n,12)}	1	2	3	4	1	6	1	4	3	2	1	12	12	0	1	4
	{(n,6)}	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2	1	6	6	1	-1	2
	{(n,4)}	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2	1	4	4	0	-1	2
	{(n,3)}	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	3	-1	0	2
	{(n,2)}	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	-1	1	1
	{(n,1)}	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1
	$A(k,n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	4				
	$B(k,n)$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1				

（表中的 $A(k,n)=\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})$；

$$B(k,n)=\frac{\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})}{f(k)}\ )$$

因此我們猜出答案就是

$$a_{k,n}=B(k,n)=\frac{\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})}{f(k)}$$

。答案既已猜出，我們最後把證明寫下來：

定理二的證明：

按 n 是否為 k 的倍數分成兩部份。

I. n 為 k 的倍數時。此時 $(n,k)=k=\sum_{d|k}f(k)$。

由 Möbius Inversion Formula，得

$f(k)=\sum_{d|k}m(d)\cdot(n,\frac{k}{d})=\sum_{d|k}(n,d)\cdot m(\frac{k}{d})$。

II. n 不為 k 的倍數時。令 $k=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\cdots\cdots p_m^{r_m}$ 為 k 的標準分解式。由 Möbius 函數的定義，$m(k)\neq 0$ 時必有

$m(k)=(-1)^m=m(p_1p_2\cdots\cdots p_m)=m(k')$，其中 $k'=p_1p_2\cdots\cdots p_m$。又由 Möbius Function

的可積性知，$m(k)=m(d)m(\frac{k}{d}), \forall d>0$ 且 $d|k$。故討論 $m(d)$ 時，亦只需考慮 $d|k'$ 時的情況即可，其餘情況時為 0。

不失其一般性，設

$(n,k)=p_1^{s_1}p_2^{s_2}\cdots\cdots p_l^{s_l}$，其中 $l\le m$。再分成兩種情況：

(i)若 $s_1,s_2,\cdots,s_l\le 1$，$(n,k)=(n,k')$ $=p_1p_2\cdots\cdots p_l$。因 $k'=p_1p_2\cdots\cdots p_m$，故 k' 有 2^m 個正因數。對 k' 的任一個正因數 d_{ij} 而言，可寫成如下形式：

$$d_{ij}=(p_1^{t_{i1}}p_2^{t_{i2}}\cdots\cdots p_l^{t_{il}})\cdot (p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}}),$$

其中 $i=1,2,\cdots,2^l$，$j=1,2,\cdots,2^{m-l}$，$t_{i_1},\cdots,t_{i_l},u_{j_1},\cdots,u_{j_{m-l}}\in\{0,1\},\forall i,j$。此時

$$\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})=\sum_{d|k'}(n,\frac{k'}{d})m(d)$$

$$=\sum_{1\le i\le 2^l,1\le j\le 2^{m-l}}(n,\frac{k'}{d_{ij}})m(d_{ij})$$

$$=\sum_{1\le i\le 2^l,1\le j\le 2^{m-l}}\begin{matrix}(p_1^{1-t_{i1}}p_2^{1-t_{i2}}\cdots\cdots p_l^{1-t_{il}})\cdot\\ m(p_1^{t_{i1}}p_2^{t_{i2}}\cdots\cdots p_l^{t_{il}})\cdot\\ m(p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}})\end{matrix}$$

$$=\left(\sum_{1\le i\le 2^l}\begin{matrix}(p_1^{1-t_{i1}}p_2^{1-t_{i2}}\cdots\cdots p_l^{1-t_{il}})\cdot\\ m(p_1^{t_{i1}}p_2^{t_{i2}}\cdots\cdots p_l^{t_{il}})\end{matrix}\right)$$

$$\left(\sum_{1\le j\le 2^{m-l}}m(p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}})\right)$$

$$=\left((n,k')\cdot m(1)+\sum_{a=1}^{l}\frac{(n,k')}{p_a}m(p_a)+\sum_{1\le a_1<a_2\le l}\frac{(n,k')}{p_{a_1}p_{a_2}}m(p_{a_1}p_{a_2})+\cdots+\sum_{a=1}^{l}m(p_1p_2\cdots\cdots p_l)\right)\cdot$$

$$\left(\sum_{1\le j\le 2^{m-l}}m(p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}})\right)$$

$$=\left((n,k')-\sum_{a=1}^{l}\frac{(n,k')}{p_a}+\sum_{1\le a_1<a_2\le l}\frac{(n,k')}{p_{a_1}p_{a_2}}-\cdots+(-1)^{l-1}\sum_{1\le a_1<\cdots<a_{l-1}\le l}\frac{(n,k')}{p_{a_1}p_{a_2}\cdots\cdots p_{a_{l-1}}}+(-1)^l\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{1\le j\le 2^{m-l}}m(p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}})\right)$$

$$=\left((n,k')-(n,k')\left(\sum_{a=1}^{l}\frac{1}{p_a}-\sum_{1\le a_1<a_2\le l}\frac{1}{p_{a_1}p_{a_2}}+\cdots+(-1)^{l-1}\sum_{1\le a_1<\cdots<a_{l-1}\le l}\frac{1}{p_{a_1}p_{a_2}\cdots\cdots p_{a_{l-1}}}+(-1)^l\right)\right)$$

$$\cdot\left(\sum_{1\le j\le 2^{m-l}}m(p_{l+1}^{u_{j1}}p_{l+2}^{u_{j2}}\cdots\cdots p_m^{u_{j_{m-l}}})\right)$$

$$=0$$

(ii)若 $s_1,s_2,\cdots,s_l$ 不全小於或等於 1，假設其中 $s_1,s_2,\cdots,s_r>1$，$r\le l$

則可設

$$(n,k)$$
$$=(p_1p_2\cdots\cdots p_l)\cdot(p_1^{s_1-1})\cdot(p_2^{s_2-1})\cdots\cdots(p_r^{s_r-1})$$
$$=(p_1^{s_1-1})\cdot(p_2^{s_2-1})\cdots\cdots(p_r^{s_r-1})\cdot(n,k')$$

。則此時

$$\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})$$
$$=(p_1^{s_1-1})\cdot(p_2^{s_2-1})\cdots\cdots(p_r^{s_r-1})\cdot\left(\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k'}{d})\right)=0$$

由 I.和 II.，定理得證。

得證

四、更一般的情形

附帶地我們可以得到一系列的結果。約定各數學符號都同之前的定義。首先，既然定理一和定理二都是同樣一個數列的通項公式，就有

系理四：

對於任意自然數 n,k，下式成立。

$$\frac{\sum_{d|k}(n,d)m(\frac{k}{d})}{f(k)}=\frac{1^n+a^n+(a^2)^n+\cdots+(a^{k-1})^n}{k},$$

原來的 $a_{k,n}$ 是周期為 k 的循環數列，且第一個 1 在第 k 個出現。同理稍作調整就有以下的結果：

系理五：

考慮周期為 k 的循環數列，且第一個 1 在第 $k-i$ 個出現，$1\le i\le k-1$，其它都是 0。則此數列的通項是：

$$a_n=\frac{\sum_{d|k}(n+i,d)m(\frac{k}{d})}{f(k)}$$
$$=\frac{1^{n+i}+a^{n+i}+(a^2)^{n+i}+\cdots+(a^{k-1})^{n+i}}{k}$$

其中 a 為 $x^{k-1}+x^{k-2}+\cdots+x^2+x+1=0$ 的任一複數根。

將此 k 個數列做適當的組合，即可形成任意的 k-循環數列，換句話說，任一 k-循環數列皆可依此列出一般項公式。證明仿前兩節的主定理立即可得，此處從略。

定理六：

k-循環數列：$c_1,c_2,\cdots,c_k,c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots$ 的第 n 項為

$$\frac{\sum_{i=0}^{k-1}c_i\left(\sum_{d|k}(n+i,d)m(\frac{k}{d})\right)}{f(k)}.$$
$$=\sum_{i=0}^{k-1}c_i\left(\frac{1^{n+i}+a^{n+i}+(a^2)^{n+i}+\cdots+(a^{k-1})^{n+i}}{k}\right)$$

這個一般的定理解決了所有 k-循環數列的通項公式問題。這個問題也算完整地告一段落了。

五、後記

這個問題初看並不困難，但是背後原來可以引出這麼深刻的數學，真是我們始料未及的。最後特別感謝建中游森棚老師的指導，這個問題原是游老師在課堂中提出的，然後成為兩位同學寒假作業獨力研究的題材(文中兩個想法即為兩位同學不同的切入方式)。再經由游老師提示這個問題與數論 Möbius 函數上的聯結後，由三位作者共同努力統整並作出證明。

這篇文章算是我們在數學學習過程中的小小的發現與喜悅，也在此與各位一同分享這個有趣的小結論。

參考文獻

1. 余文卿等（2001）：高級中學數學 1 教師手冊。台北縣，龍騰文化。
2. Strayer（1994）：Elementary Number Theory. International Thomson Publishing / PWS Publishing Company, Boston, Massachusetts.