中學生通訊解題第十八期題目與參考解答

臺北市立建國高級中學 數學科

問題編號
901801

已知一線段，其長為 a，請完成下列步驟：

(1)試作線段，使其長 x 滿足 $\frac{1}{x}-\frac{2}{a}+\frac{3}{x+a}=0$。

(2)再作另一線段，使其長為 $\sqrt{ax}$。

a

參考解答：

[計算]

已知 $\frac{1}{x}-\frac{2}{a}+\frac{3}{x+a}=0$

兩邊同乘以 $ax(x+a)$**，得**

$a(x+a)-2x(x+a)+3ax=0$

整理後得 $2x^2-2ax-a^2=0$

兩邊同除以 a^2**，得** $2(\frac{x}{a})^2-2(\frac{x}{a})-(\frac{x}{a})^2=0$

可解得 $\frac{x}{a}=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ (**負不合**)

[作圖]

***已知*：線段** a

***作法*：**(1)**如圖，先作** $\sqrt{3}a$，

再作 $a+\sqrt{3}a$，

最後平分 $a+\sqrt{3}a$，

此線段長即為 x。

(2)**作一線段** $\overline{AB}=a+x$，

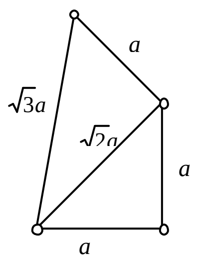
於 $\overline{AB}$ **上取一點** C，**使** $\overline{AC}=a$，

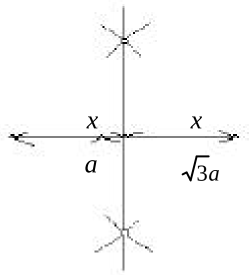
$\overline{CB}=x$，**以** $\overline{AB}$ **為直徑作一圓** O，

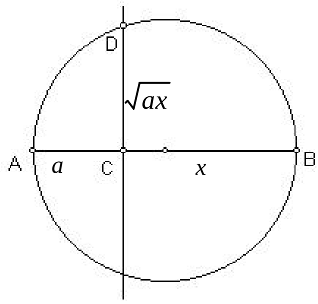
過 C **作直線** l **交圓** O **於** D，

則 $\overline{CD}=\sqrt{ax}$ **即為所求。**

***證明*：**(**略**)







問題編號
901802

有 n+1 顆小球，球面上分別標有 $1,5,5^2,5^3,\cdots,5^n$ **等數字，現在把這** n+1 **顆球分別放入** A,B,C **三個箱子中，試證：任意** 2 **個箱子中，小球上的數字和不相等。**

參考解答：

假設取到 A,B **兩箱，欲檢驗此兩箱中小球的數字和是否相等，只要觀察兩箱中小球的數字和相減後是否為** 0，**而未取到的** C **箱中之小球數字和則不予計算。**

假設 A,B **兩箱中小球的數字和相等，且**

標為 5^n 的小球在 A 箱可列出方程式

$5^n + a_1 \cdot 5^{n-1} + a_2 \cdot 5^{n-2} + \cdots + a_{n-1} \cdot 5 + a_n = 0$

其中，在 A 箱的係數為 1，在 B 箱的係數為-1，

在 C 箱的係數為 0

則 $5^n = -a_1 \cdot 5^{n-1} - \cdots - a_{n-1} \cdot 5 - a_n$

$\le |a_1| \cdot 5^{n-1} + \cdots |a_{n-1}| \cdot 5 + |a_n|$

$\le 5^{n-1} + \cdots + 5 + 1$

$= \dfrac{5^n - 1}{5-1}$

$< \dfrac{5^n}{5-1}$

得 $\dfrac{5^n(5-2)}{5-1} < 0$，矛盾

所以 A,B 兩箱中小球的數字和不相等

同理可知，任意 2 個箱子中，小球上的數字和不相等。

問題編號
901803

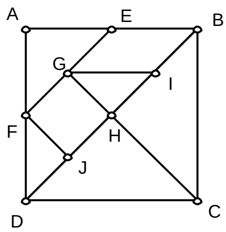
右圖是一組七巧板，其中 E、F、G、H、I、J 分別為 $\overline{AB}$、$\overline{AD}$、$\overline{EF}$、$\overline{BD}$、$\overline{BH}$、$\overline{DH}$ 的中點，且 ΔDFJ 的面積為 1。今任取幾個區塊塗黑，假設黑色部分的面積為 a，白色部分的面積為 b，問：

若要使 (1) $a = b$

(2) $a = b + 1$

(3) $a = b + 2$

各有幾種塗法？



參考解答：

七巧板各區塊面積如上圖

可知正方形 ABCD 的面積為 16

(1) $a = b$：

此時 $a = 8$ ($b = 8$)，其組成方法有：

(a)8=1+1+2+2+2：有 1 種塗法

(b)8=1+1+2+4：有 $3 \times 2 = 6$ 種塗法

(c)8=2+2+4：有 $3 \times 2 = 6$ 種塗法

(d)8=4+4：有 1 種塗法

由上述知，此情況共有 $1+6+6+1=14$ 種塗法

(2) $a = b + 1$：

此時 $a + b = (b+1) + b = 2b + 1 = 16$，矛盾

所以此情況共有 0 種塗法

(3) $a = b + 2$：

此時 $b = 7$ ($a = 9$)，其組成方法有：

(a)7=1+2+2+2：有 2 種塗法

(b)7=1+2+4：有 $2 \times 3 \times 2 = 12$ 種塗法

由上述知，此情況共有 $2 + 12 = 14$ 種塗法

問題編號
901804

某校舉辦演講及作文兩項國語文競賽，一人可同時參加兩項。如果參加演講比賽的學生中，有 75% 是女生，參加作文比賽的有 60% 是女生。

(1)試證：參加比賽的全體學生中，女生人數不少於男生人數。

(2)試說明：在什麼情況下，參加比賽的男生人數和女生人數會相等？

參考解答：

女生的英文是〝*girl*〞，男生的英文是〝*boy*〞，那麼我們就作如下的假設吧！

假設 g_1 是只參加演講比賽的女生人數

g_2 是只參加作文比賽的女生人數

g_{12} 是參加兩項比賽的女生人數

b_1 是只參加演講比賽的男生人數

b_2 是只參加作文比賽的男生人數

b_{12} 是參加兩項比賽的男生人數

由題目知 $(g_1+g_{12}):(b_1+b_{12})=0.75:0.25$

$(g_2+g_{12}):(b_2+b_{12})=0.6:0.4$

可得 $g_1+g_{12}=3(b_1+b_{12})$

$2(g_2+g_{12})=3(b_2+b_{12})$

相加可得 $3(g_1+g_{12}+g_2)\geq g_1+3g_{12}+2g_2$

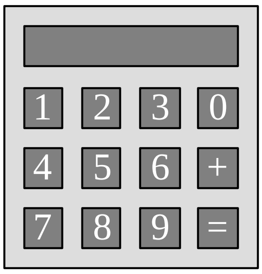
$=3b_1+6b_{12}+3b_2$

$\geq 3(b_1+b_{12}+b_2)$

由此得出，參加比賽的全體學生中，女生人數不少於男生人數並且可看出當 $g_1=g_2=b_{12}=0$ 時，參加比賽的男生人數和女生人數會相等。

問題編號
901805

阿駿設計了一個功能簡易的計算機如右圖，將每個數字鍵恰按一次，能夠得出運算結果是 100 嗎？如果可以，請舉例說明；如果不行，請說明你的理由。



參考解答：

不行，證明如下：

(1)先證明一個小性質：

設 $\overline{P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1}=P_n\times 10^{n-1}+P_{n-1}\times 10^{n-2}+\cdots+P_2\times 10+P_1$

則 $\overline{P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1}$ 除以 9 的餘數等於 $(P_n+P_{n-1}+\cdots+P_2+P_1)$ 除以 9 的餘數。

$\because$ $\overline{P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1}=P_n\times(10^{n-1}-1)+P_{n-1}\times(10^{n-2}-1)+\cdots+P_2\times(10-1)+P_n+P_{n-1}+\cdots+P_2+P_1$

又 $(10^{n-1}-1),(10^{n-2}-1),\cdots,(10-1)$ 皆為 9 的倍數

故 $\overline{P_nP_{n-1}\cdots P_2P_1}$ 除以 9 的餘數等於 $(P_n+P_{n-1}+\cdots+P_2+P_1)$ 除以 9 的餘數。

(2)若每一個數字鍵恰按一次，則無論你如何搭配組成，所按出的幾個正整數的和除以 9 的餘數都會等於 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 除以 9 的餘數，也就是 0。而 100 除以 9 的餘數等於 1，故沒有辦法得出運算結果為 100。