平衡問題

葉洹君

臺北市實踐國民中學

研究動機

我看到一個"稱天秤"的數學遊戲題目：*請將質量為 1,2,3,…10 單位的砝碼，置入圖一中的 10 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。*

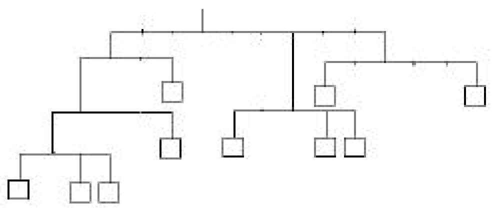

圖 一

我覺得這個題目很有趣，而且也能找出惟一的解答。後來又碰到一個"稱天秤"的數學遊戲題目，但是砝碼由 10 個變成 20 個：

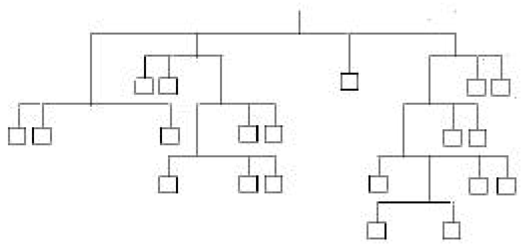

圖 二

在嘗試解這個題目的過程時，我花了很長的時間才找出解答，但是沒有證明它是惟一的解。雖然解題的過程十分繁雜且花費很多時間，但是解題技巧只用到國一、二課程裡的知識: 1. 解一次聯立方程組; 2. 因數及倍數關係; 3. 比例關係; 4.一次不等式而已。解完這個題目以後，我開始收集這方面的題目，希望透過解題的過程來深入了解這種"稱天秤"題目特性，除了能讓自己熟用國一、二課程裡的知識之外，也能了解這方面題目的解題技巧，同時也能對一些較少砝碼的題目作分類整理，當面對較大較繁的題目時，能夠快速地得到一些變數的可能解答，使得原來繁瑣的題目變成較簡單一些，這樣整個解題的速度會加快，進而希望自己也能設計出類似的好題目，而且答案恰好只有一個。

研究過程

天秤的左右兩旁都有一個或一個以上的支點，而且每個支點下都掛有一個砝碼或另一個天秤。令天秤中心左邊的每一個支點下的砝碼質量總和乘以這個支點與天秤中心的距離後，再全部相加之總和為 L，同樣地，令右邊的總和為 R。"稱天秤"的題目要求所有的天秤都平衡，這些要求對應重要的不變量就是每個天秤的 R-L=0，即 R=L。我們可以 這些不變量得到對應的方程式。

剛開始嘗試解研究動機中第二題時，我碰到不少困難:

1. 由於怕麻煩，想省點事，所以不喜歡列舉所有的方程式時，常常會造成不知該如何繼續下去。
2. 由於事先沒有規劃就隨便設定變數順序，造成列舉方程式時，需要一一寫出每一個變數，相當麻煩，甚至常常會因為變數量

太多太雜亂，而寫錯變數，導致白白浪費很多時間。

3. 當我決心要列舉所有的方程式時，常常會因為沒有依照一定的順序來列舉，而造成漏列方程式，也常會看錯題目而不容易被檢查出來。

4. 面對一大堆的方程式，不知從何下手。

每次當我作答收集來的新題目時，如果題目中砝碼數量較大時，就會出現相同的困難。針對這些困難，我採用先左而後右的順序來對變數編號，而且所有天秤的中心點按照由上而下，再由左而右的順序來列舉天秤中不變量對應的所有的方程式之後，錯誤就減少許多，而且容易檢驗。經過解答很多題目之後，自己對這方面的問題特性及解題技巧有一些初步解題心得，再回頭重新解答以前見過的題目，速度就快多了。對於解題技巧的初步心得有：

1. **確定方程式的個數**.為了使所有的天秤平衡，必須所有天秤的 R-L=0，即 R=L。利用這些獨立的不變量來建立方程式，所以”稱天秤“的題目中有幾個天秤中心就可以列出相同數目的方程式，另外還要加上一個計算所有砝碼質量的總和。

2. **解聯一次聯立方程組**. 當某一個天秤的中心點兩端都恰好只有一個支點掛上砝碼或天秤時，利用解一次聯立方程組的技巧是很好的方法。

3. **上、下夾擠法**. 當某一個天秤的中心點一端只有一個支點掛上砝碼或天秤，而另一端有多個支點掛上砝碼或天秤、天秤兩端的 R 和 L 之上界(或下界)相差不多時，可以推導出一些變數只有簡單幾組的可能答案。

4. **因數與倍數關係**. 判斷某些砝碼是某個整數的倍數(例如偶數、奇數、3 的倍數等等)，常常有助於找出題目的解答。

5. **比例關係**.某些砝碼質量的比例為定值時，可以推導出這些砝碼只有幾組的可能答案。

6. **檢驗解答**. 解答這方面題目時，要小心分析各種可能性，不能遺漏，敢勇於嚐試，細心計算及檢驗是否滿足題目要求所有的條件。

首先我敘述一些題目的解題方法，由於研究動機中第二題的解題方法比較複雜，所以到後面再說。為了節省空間，在往後的圖形中，我會標上變數(變數可由解題者自行設定)。

題一.

請將質量為 1,2,3,…10 單位的砝碼，置入圖三中 10 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

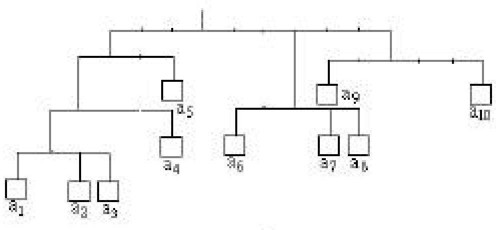

圖 三

這個題目有六個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，所以我們可以列出七個方程式，然後再解這些聯立方程組。

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=(a_6+a_7+a_8)+2(a_9+a_{10})$……(A)

$a_1+a_2+a_3+a_4=2a_5$ ………(B)

$a_1+a_2+a_3=3a_4$ ………(C)

$a_1=a_2+2a_3$ ………(D)

$2a_6=a_7+2a_8$ ………(E)

$2a_9=3a_{10}$ ………(F)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=55$…….(G)

由公式(F)知道 a_{10} 是偶數。令 $a_{10}=2K$，則 $a_9=3K$。

令 $X= a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$，$Y= a_6+a_7+a_8$ 代入公式(A)和(G) 可得 $X=Y+10K$ 和 $X+Y+5K=55$。

由此可得 $2X=55+5K$。

由於 X 是整數，則 K 為奇數。又 $a_9=3K\leqq 10$，所以 K=1 或 3。

如果 K=3,則我們知道 X=35 和 Y=5 ，不合(因為 $6=1+2+3\leqq a_6+a_7+a_8=Y$

所以 K=1,因此 $a_9=3$, $a_{10}=2$，我們就容易推導出 X=30 及 Y=20。令 $P= a_1+a_2+a_3+a_4$

這樣我們有 $P+a_5= X=30$。而由公式(B)可得 $P=2a_5$，可以推導出 $a_5=10$,P=20。

令 $Q=a_1+a_2+a_3$，即 $Q+a_4=P=20$，而公式(C)可得 $Q=3a_4$。可以推導出 Q=15, $a_4=5$。

現在只剩下質量為 1,4,6,7,8,9 單位的砝碼尚未被使用過，變數 a_1,a_2,a_3，a_6,a_7,a_8 之值尚未被決定，我們知道 $Q=a_1+a_2+a_3$，而其中 3 個砝碼重量和為 15 單位只有 8+6+1。因此由(D)容易得到 $a_1=8$, $a_2=6$, $a_3=1$。

再來檢驗公式(E)，顯然 $a_6=9$, $a_7=4$, $a_8=7$,所以

$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10})$ =

(8,6,1,5,10,9,4,7,3,2) 是惟一解。 ■

題二.

請將質量為 1,2,3,…9 單位的砝碼，置入圖四中 9 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

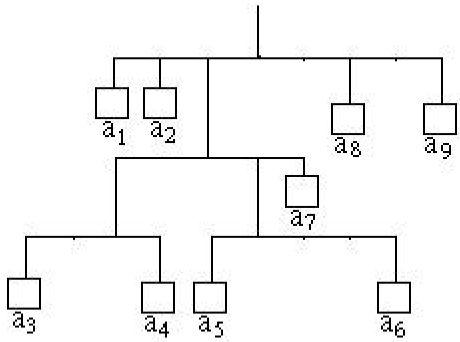

圖　四

這個題目有四個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，所以我們可以列出五個方程式，然後再解這些聯立方程組。

$3a_1+2a_2+(a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)=2a_8+4a_9$………(A)

$2(a_3+a_4)=(a_5+a_6)+2a_7$ ………(B)

$2a_3=a_4$ ………(C)

$a_5=3a_6$ ………(D)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9=45$ ………(E)

由公式(C),(D)代入(B)可得

$6a_3=4a_6+2a_7$ ………(F)

由公式(C),(D),(F)代入(A)可得

$3a_1+2a_2+6a_3+2a_6=2a_8+4a_9$ ………(G)

由公式(D)知道 a_5 是 3 的倍數，可得 (a_5,a_6)=(3,1),(6,2)或(9,3)。我們考慮三種情形:

(1)當 (a_5,a_6)=(3,1)時，代入公式(F)可得

$22 \geq 6a_3=4+2a_7 \geq 6$，則 (a_3,a_7)=(2,4)。

$a_3=2$ 代入公式(C)可得 $a_4=4$ (不合)，因為 4 重複。因此 (a_5,a_6) 不可能是(3,1)。

(2)當 (a_5,a_6)=(6,2)時，代入公式(F)可得

$26 \geq 6a_3=8+2a_7 \geq 10$，則 (a_3,a_7)= (3,5),(4,8)。

(i)當 (a_3,a_5)=(3,5)時，$a_3=3$ 代入公式(C)可得

a_4=6 (不合)，因為 6 重複。

(ii)當 $(a_3,a_5)=(4,8)$時，$a_3=4$ 代入公式(C)可得 $a_4=8$ (不合)，因為 8 重複。

因此(a_5,a_6)不可能是(6,2) 。

(3)當 $(a_5,a_6)=(9,3)$時，代入公式(F)可得 $30 \geq 6a_3=12+2a_7 \geq 14$，所以 a_7 是 3 的倍數。因此$(a_3,a_7)=(4,6)$。$a_3=4$ 代入公式(C)可得 $a_4=8$。

由公式(G) $3a_1+2a_2+6a_3+2a_6=2a_8+4a_9$，可以知道 a_1 是偶數，而 $a_3=4$，$a_7=6$，$a_4=8$ 都已經被使用過，所以 $a_1=2$。因此目前只剩質量為 1、5、7 單位的砝碼尚未被使用，由公式(G)可得

$38 \leqq 2a_2+36=6+2a_2+24+6=3a_1+2a_2+6a_3+2a_6=2a_8+4a_9 \leqq 10+28=38$。

所以 $a_2=1,a_8=5,a_9=7$。因此

$(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)=(2,1,4,8,9,3,6,5,7)$是唯一解。 ■

解過很多 "稱天秤"的題目之後，雖然是不同的題目，但是解答的過程卻都十分相似。當砝碼的個數由少變多時，要考慮的情況非常多，面對一大堆的方程式，還是常常會不知從何下手。想找出所有的解答時，解題的過程就十分繁雜且花費很多時間。我將砝碼較少的題目按照天秤兩端支點的距離加以分類，並給予明確的記號，同時算出它可能的解答。在考慮天秤題目中含有兩個或兩個以上的基本圖形，同時算出它可能的解答。有了這些基本的資料，當我們要解比較複雜的天秤題目時，速度就會快很多了。

如果"稱天秤"的題目用圖形表示，就會很佔空間且不方便。為了便於記錄，我設計了一種稱天秤的題目表示方法，這種用記號表示方法是: 如果天秤只有一層，即左右兩邊支點下掛的都是一個砝碼，則我們用 $G(a_1,a_2,\ldots,a_s;b_1,b_2,\ldots,b_t)$表示在天秤左邊距離中心 $a_1,a_2,\ldots,a_s$ 單位及右邊距離中心 $b_1,b_2,\ldots,b_t$ 單位的支點下都掛有一個砝碼，如果天秤不只一層，即距離中心 i 單位掛有另一個天秤，則把 i 改成 $G_i(\ldots;\ldots)$ 。當然支點下可能又掛有天秤，這樣就一層一層記錄即可。例如圖一和圖二的記號是

$G(G_3(G_1(G_1(1;1,2);3);2);G_3(2;1,2),G_6(2;3))$和

$G(G_8(3,2;3),G_6(2,1;G_2(G_1(1;2,3);1,2)),$

$G_6(G_1(G_1(1;G_1(2;1),3,4);1,2);1,2))$。

題目作得越多，碰到的問題也越多，但是心得也變多了。除了初步的解題心得之外，我再談談現在得到的新解題心得:

1.**加重夾擠法**.令 $d_1,d_2,\ldots,d_k$ 和 $w_1,w_2,\ldots,w_k$ 是二個遞增數列。假設題目中砝碼的質量 $a_1,a_2,\ldots,a_k$ 兩兩不同，而且是從 $w_1,w_2,\ldots,w_k$ 中挑出來的，我們常常需要計算 $X=d_1a_1+d_2a_2+\ldots+d_ka_k$ 的最大或最小值。由排序不等式知道 $d_1w_k+d_2w_{k-1}+\ldots+d_kw_1 \geqq X \geqq d_1w_1+d_2w_2+\ldots+d_kw_k$。當題目中砝碼的個數很少時，由於上界(或下界)與單個砝碼的最大(或最小)質量相差不多時。夾擠法很有用，但是砝碼的個數變多時，由於上界(或下界)與單個砝碼的最大(或最小)質量相差太多，夾擠法就變成不好用了。這時可以改用 "加重夾擠法"也就是多個方程式相加之後。再用夾擠法，

2.**反証法**.開始時，我只想到判斷某個或某些砝碼質量可能是多少?常常要討論很多的

情況，但是加上反証法的思維來判斷某個或某些砝碼質量不可能是多少或者質量為某單位的砝碼一定某些砝碼之一，這兩者靈活交互使用，可以使我們得到更多的訊息。

題三.

請將質量為 1,2,3,…11 單位的砝碼，置入圖五中 11 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

這個題目有五個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，所以我們可以列出六個方程式，然後再解這些聯立方程組。

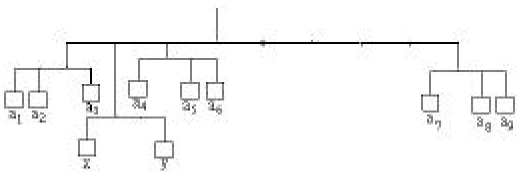

圖　五

$2a_1 + a_2 = a_3$ ……… (A)

$a_4 = a_5 + 2a_6$ ……… (B)

$a_7 = a_8 + 2a_9$ ……… (C)

$x = 2y$ ……… (D)

$3(a_1+a_2+a_3)+2(x+y)+(a_4+a_5+a_6)=5(a_7+a_8+a_9)$ ……… (E)

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+x+y=66$ ……… (F)

由公式(A)+(B)+(C)+(D)可得 $a_3+a_4+a_7+x = (a_2+a_5+a_8)+2(a_1+a_6+a_9+y)$。

因為所有的砝碼是質量為 1,2,3,…11 單位組成，所以

$38=11+10+9+8 \geqq a_3+a_4+a_7+x=(a_2+a_5+a_8)+2(a_1+a_6+a_9+y) \geqq (5+6+7)+2(1+2+3+4)=38$，因此 $\{(a_1,a_2,a_3),(a_4,a_5,a_6),(a_7,a_8,a_9)\}\}=\{(3,5,11),(10,6,2),(9,7,1)\}$ 且 $(x,y)=(8,4)$。

令 $P=a_1+a_2+a_3$， $Q=a_4+a_5+a_6$， $R=a_7+a_8+a_9$， $S=x+y$。由於 $11+5+3=19$， $10+6+2=18$， $9+7+1=17$, $8+4=12$。所以我們只要用檢驗下列公式的所有解

$3P+2S+Q=5R$ 其中 $\{P,Q,R\}=\{17,18,19\}$ 且 $S=12$。所以 $(P,Q,R)=(18,17,19)$。因此 $(a_1,a_2,a_3,x,y,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9)=(10,6,2,8,4,9,7,1,11,5,3)$ 惟一解。 ■

註：這個題目中如果只由單獨的公式(A),(B),(C)或(D)並不能確定 a_1,a_4,a_7 及 x 之值，但是(A)+(B)+(C)+(D)之後，馬上可以得到很多訊息了。

有時候並非所有的砝碼都要放入稱盤內，而是只有部份砝碼要入稱盤內，這種題目常常是為了準備解更複雜的題目。

題四.

請將質量為 1,2,3,…14 單位的砝碼中挑選 7 個質量不同的砝碼，置入圖六中 7 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

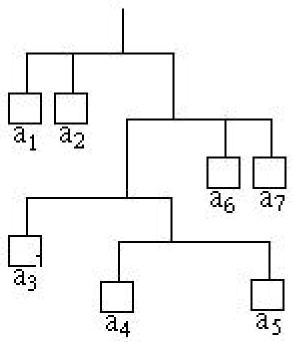

圖　六

這個題目有四個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，由於質量為 1,2,3,…14 單位的砝碼挑選 7 個質量不同的砝碼，所以我們並不知道砝碼的質量總和是多少，因此我們只可以列出四個方程式，然後再解這些聯立方

程組。

$a_4=2a_5$ ……… (A)

$2a_3=a_4+a_5$ ……… (B)

$a_3+a_4+a_5=a_6+2a_7$ ……… (C)

$2a_1+a_2=a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$ ……… (D)

由公式(A) 和(B)可得 $2a_3=3a_5$, 所以 a_5 是偶數和 a_3 是 3 的倍數。

由公式(A)知道 a_4 是偶數。因為所有的砝碼是從質量為 1,2,3,…14 單位的砝碼挑選。所以我們考慮 a_3=3,6,9 或 12 四種情況:

(1)當 $a_3=12$ $(a_4,a_5)=(16,8)$ (不合)，因為所有砝碼質量屬於 1 到 14 之間的整數。

(2)當 $a_3=9 \Rightarrow (a_4,a_5)=(12,6)$，將$(a_3,a_4,a_5)=(9,12,6)$之值代入公式(C)可得

$27=a_6+2a_7 \Rightarrow 81=2(a_3+a_4+a_5)+a_6+2a_7$

$=2(a_3+a_4+a_5+a_6+a_7)-a_6$ ……… (E)

。所以 $41\leqq a_3+a_4+a_5+a_6+a_7$，由公式(D)可得 $41\leqq a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=2a_1+a_2\leqq 41 \Rightarrow$ $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=41=2a_1+a_2 \Rightarrow (a_1,a_2)=(14,13)$ 。但是由公式(E) $(a_6,a_7)=(1,13)$ (不合)，因為 13 重覆。

(3) 當 $a_3=6 \Rightarrow (a_4,a_5)=(8,4)$。將$(a_3,a_4,a_5)=(6,8,4)$之值代入公式(C)可得 $18=a_6+2a_7$，所以是 a_6 偶數$\Rightarrow (a_6,a_7)=(12,3),(14,2)$。我們考慮二種情形：

(i)當$(a_6,a_7)=(12,3)$.將$(a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=(6,8,4,12,3)$之值代入由公式(D)可得 $33=2a_1+a_2$，所以 a_6 是偶數 $\Rightarrow (a_1,a_2)=(14,5),(13,7),(10,13)$。。

(ii)當$(a_6,a_7)=(14,2)$，將$(a_3,a_4,a_5,a_6,a_7)=(6,8,4,14,2)$之值公式(D)可得

$34=2a_1+a_2 \Rightarrow (a_1,a_2)=(12,10),(11,12)$。

(4)當 $a_3=3 \Rightarrow (a_4,a_5)=(4,2)$，由公式(C)可得 $9=a_6+2a_7 \Rightarrow (a_6,a_7)=(7,1)$

由公式(D)可得 $17=2a_1+a_2 \Rightarrow (a_1,a_2)=(6,5)$ 。

綜合以上結果，答案共有：$(a_1,a_2,\ldots,a_7)$=(6,8,4,12,3,14,5)，(6,8,4,12,3,13,7)，(6,8,4,12,3,10,13)，(6,8,4,14,2,12,10)，(6,8,4,14,2,11,12)，(6,5,3,4,2,7,1)。 ■

題五.

請將質量為 1,2,3,…14 單位的砝碼，置入圖七中 14 個秤盤內 ，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

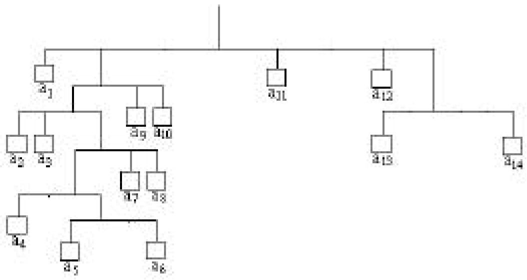

圖 七

這個題目有七個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，所以我們可以列出八個方程式，然後再解這些聯立方程組。

$3a_1+2(a_2+a_3+\ldots+a_{10})=a_{11}+3a_{12}+4(a_{13}+a_{14})$ ……… (A)

$a_2+a_3+\ldots+a_8=a_9+2a_{10}$ ……… (B)

$2a_2+a_3=a_4+a_5+\ldots+a_8$ ……… (C)

$a_4+a_5+a_6=a_7+2a_8$ ……… (D)

$2a_4=a_5+a_6$ ……… (E)

$a_5=2a_6$ ……… (F)

$2a_{13}=3a_{14}$ ……… (G)

由公式(B)可得 $a_2+a_3+\ldots+a_8=a_9+2a_{10}\leqq 41$,

而 $a_2,a_3,\ldots,a_8$ 由構成圖形和題四一樣，由題四的解答可以知道只有一種答案滿足 $a_2+a_3+\ldots+a_8 \leqq 41$。那就是 $(a_2,a_3,\ldots,a_8)=(6,5,3,4,2,7,1)$，而剩下砝碼質量是 8,9,…,14 單位，滿足公式(G)的比例關係只有 $(a_{13},a_{14})=(12,8)$。代入公式(B) 可得 $28=a_2+a_3+\ldots+a_8=a_9+2a_{10}\leqq 10+18=28$，所以 $(a_9,2a_{10})=(10,9)$。把所有已知砝碼質量代入公式(A)可得 $3a_1+a_4+94=a_{11}+3a_{12}+80 \Rightarrow 14=a_{11}+3(a_{12}-a_1)$，因為只剩質量為 11,13,14 單位的砝碼，所以 $a_{11}=11,a_{12}=14,a_1=13$。因此 $(a_1,a_2,\ldots,a_{14})=(13,6,5,3,4,2,7,1,10,9,11,14,12,8)$是惟一解。

■

現在我們回頭來談談研究動機中第二題的解題方法。

題六.

請將質量為 1,2,3,…20 單位的砝碼置入圖八中的 20 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且滿足所有天秤的狀態。

這個題目有十個天秤中心，為了使所有的天秤平衡，所以我們可以列出十一個方程式，然後再解這些聯立方程組。

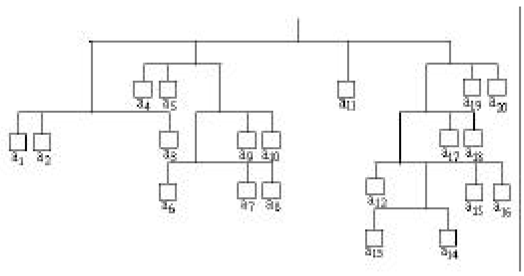

圖　八

$3a_1+2a_2=3a_3$ ………(A)

$2a_4+a_5=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$ ………(B)

$a_6+a_7+a_8=a_9+2a_{10}$ ………(C)

$a_6=2a_7+3a_8$ ………(D)

$4(a_1+a_2+a_3)+2(a_4+a_5+\ldots+a_{10})=a_{11}+3(a_{12}+\ldots+a_{20})$ ………(E)

$a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18}=a_{19}+2a_{20}$ ………(F)

$a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{16}=a_{17}+2a_{18}$ ………(G)

$a_{12}=(a_{13}+a_{14})+2a_{15}+3a_{16}$ ………(H)

$2a_{13}=a_{14}$ ………(I)

$a_1+a_2+\ldots+\ldots+a_{20}=190$ ………(J)

由公式(I)代入(H)可得

$a_{12}=2a_{15}+3(a_{13}+a_{16})$ ………(K)

公式(D)+(K)可得

$39\geqq a_6+a_{12}=2(a_7+a_{15})+3(a_8+a_{13}+a_{16})\geqq 2(4+5)+3(1+2+3)=36$。我們考慮

(1).如果 $\{1,2,3\}\subset\{a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}\}$，則公式(D)中 $a_6=2a_7+3a_8\geqq 10+12=22$(不合)，因為所有砝碼重量屬於 1 到 20 之間的整數。

(2).如果 $\{1,2,4\}\subset\{a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}\}$，則公式(D)中 $a_6=2a_7+3a_8\geqq 10+9=19$，所以 $a_6=19$。

由公式(K)知道 $a_{12}+a_{15}$ 是 3 的倍數，上面敘述告訴我們 $\{1,2,3\}\not\subset\{a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}\}$ 而且如果 $\{1,2,4\}\subset\{a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}\}$，則 $a_6=19$，所以

$(a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16})=(19,4,8,2,1),(19,2,4,5,1)$ 或 $(20,3,6,4,1)$。因此 $(a_6,a_7,a_8,a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16})$ 只可能是

(16,5,2,20,3,6,4,1) (19,2,5,20,3,6,4,1) (19,5,3,20,4,8,1,2)。

這三組答案都滿足

$\{1,2,3,4,5\}\subset\{a_6,a_7,a_8,a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16}\}$，則由公式(F)可得 $34\geqq a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{16}=a_{17}+2a_{18}$

$\Rightarrow 2(a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18})=102+a_{18}$ ……… (L)

因為所有砝碼重量屬於 1 到 20 之間的整數而且 1,2,3,4,5 和 20 已被使用，所以由公式(F)

和(L)**可得** $56=18+38\geqq a_{19}+2a_{20}=a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18}$ ………(M)

如果 $19\notin\{a_{19},a_{20}\}$，**則公式**(M) $5317+36\geqq a_{19}+2a_{20}\geqq 54$(**不合**)，**所以**，**所以** $19\in\{a_{19},a_{20}\}$。**這樣** a_6**不可能是** 19，**由此可見由公式**(D),(F),(G),(H)**與**(I)。**我們就可以推導出** $(a_6,a_7,a_8,a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16})$ **一定是** (16,5,2,20,3,6,4,1) …………(N)

到現在為止質量為 1,2,3,4,5,6,16,20**單位的砝碼已被使用過。由公式**(A)**知道** a_2**是** 3 **的倍數，所以** a_2**可能是** 9,12,15,18**而且**

$3(a_3-a_1)=2a_2$ …………(O)

。**由公式**(C)**知道** $23=a_6+a_7+a_8=a_9+2a_{10}$，**所以** (a_9,a_{10})**可能是**(9,7)**或** (7,8)，**我們考慮**

(1). $(a_9,a_{10})=(7,8)$。**由公式**(L)**和**(M)**知道** $56=18+38\geqq a_{19}+2a_{20}=a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18})\geqq 1/2(102+a_{18})$，**而我們已知道質量為** 1,2,3,4,5,6,7,8 **單位的砝碼已被使用過。所以** $a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18}=56=a_{19}+2a_{20}$。**我們又知道** $34=a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{16}=a_{17}+2a_{18}$，**所以** $(a_{17},a_{18})=(10,12)$**且** $(a_{19},a_{20})=(18,19)$，**所以** $(a_9,a_{10},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})=(7,8,10,12,18,19)$。**由公式**(N)**知道** a_2**可能是** 9,12,15,18**而且** $3(a_3-a_1)=2a_2$，**但是我們已知道質量為** 3,6,12 **單位的砝碼已被使用過。滿足** $3(a_3-a_1)=2a_2$**只有** $(a_1,a_2,a_3)=(11,9,17)$。

(2). $(a_9,a_{10})=(9,7)$。**由公式**(L)**和**(M)**知道** $56=18+38\geqq a_{19}+2a_{20}=a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18}\geqq 1/2(102+a_{18})$，**而我們已知道質量為** 1,2,3,4,5,6,7,8 **單位的砝碼已被使用過。所以** $a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{18}=a_{19}+2a_{20}=56$ **或** 55。**我們又知道** $34=a_{12}+a_{13}+\ldots+a_{16}=a_{17}+2a_{18}$，**所以我們就可以推導出** $(a_9,a_{10},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})=(7,9,8,13,17,19)$，(7,9,8,13,19,18) **或** (7,9,10,12, 18,19)。**由公式**(N)**知道** a_2 **可能是** 9,12,15,18 **而且** $3(a_3-a_1)=2a_2$，**但是我們已知道質量為** 3,6,9 **單位的砝碼已被使用過。滿足** $3(a_3-a_1)=2a_2$ **只有** $(a_1,a_2,a_3)=(10,12,18)$。

綜合以上結果， $(a_1,a_2,a_3,a_9,a_{10},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})$ **可能是**(11,9,17,7,8,10,12,18,19) **或** (10,12,18,7,9,8,13,17,19)。

(1).**如果** $a_1,a_2,a_3,a_9,a_{10},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})=(11,9,17,7,8,10,12,18,19)$，**則到現在為止質量為** 13,14,15 **單位的砝碼尚未被使用過。由公式**(B) **可得** $38=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=2a_4+a_5\geqq 26+14=40$ (**不合**)，

(2).**如果** $a_1,a_2,a_3,a_9,a_{10},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})=(10,12,18,7,9,8,13,17,19)$，**則到現在為止質量為** 11,14,15 **單位的砝碼尚未被使用過。由公式**(B) $39=a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}=2a_4+a_5$ **可得** $(a_4,a_5)=(14,11)$，**由公式**(E) **可得** $160+128=a_{11}+273$，**所以** $15=a_{11}$，**因此** $(a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,a_7,a_8,a_9,a_{10},a_{110},a_{12},a_{13},a_{14},a_{15},a_{16},a_{17},a_{18},a_{19},a_{20})$ **一定是** (10,12,18,14,11,16,5,2,7,9,15,20,3,6,4,1,8, 13,17,19)。 ■

設計題目

現在來談談我得到的設計題目心得:

1.**將砝碼較少的單層”稱天秤”的題目稱為基**

本圖形，按照天秤兩端支點的距離加以分類，並算出它可能的解答。同時也考慮天秤題目中含有兩個或兩個以上的基本圖形。有了這些基本的資料，當我們要解比較複雜的稱天秤題目時，速度就會快很多了，同時我們也很容易設計出只有惟一答案的好題目。

2. 在解題的過程中，常常可以發現只 用部份方程式就得到某些變數只有少數幾種的解，這些資料都是在設計題目的重要依據。再利用沒有被使用過砝碼質量之整數來湊等式，這樣就很容易設計出只有惟一答案的好題目。

當我們解題四的過程時，並沒有利用到公式(E)就可以證明得到$\{P,Q,R\}=\{17,18,19\}$且 $S=12$，其中 $P=a_1+a_2+a_3$，$Q=a_4+a_5+a_6$，$R=a_7+a_8+a_9$，$S=x+y$。利用整數 17,18,19,12 來湊等式，可以得到無限個等式，我們找係數較小的例如: 3 乘 17 加 18 等於 69 也等 3 乘 19 加 18。事實上滿足 $3P+Q =S+3R$ 的解只有 $(P,Q,R,S)=(17,18,19,12)$，所以我們可以設計出只有一個答案的題目，如圖九。

題七.

請將質量為 1,2,3,…11 單位的砝碼置入圖九中的 11 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且滿足所有天秤的狀態。

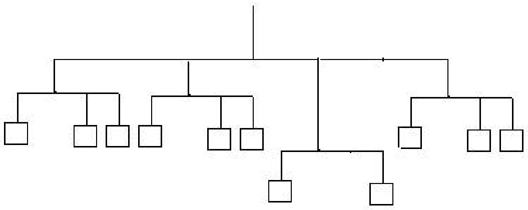

圖　九

這個題目的解題過程就和題四相似，只是公式(E)由 $3P+2S+Q=5R$ 改為 $3P+Q=S+3R$，所以我們只要用檢驗公式(E)的所有解是$(P,Q,R,S)= (17,18,19,12)$即可。 ■

另外當我們知道滿足 $3P+Q = 2S+3R$ 其中$\{P,Q,R\}=\{17,18,19\}$ 且 $S=12$ 的解只有$(P,Q,R,S)=(19,18,17,12)$ 時，我們也可以設計出另外一個是答案惟一的題目，如圖十。

題八.

請將質量為 1,2,3,…11 單位的砝碼置入圖十中的 11 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且滿足所有天秤的狀態。

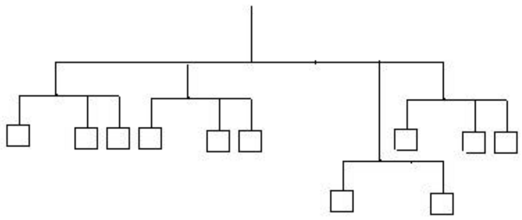

圖　十

討論

我們也可以設計一些新的”稱天秤　”題目，使得它的解題技巧包含一元二次方程式 $ax^2 + by + c = 0$ 和一次不等式 $ax + by > c$ 或 $ax + by < c$。例如

題九.

請將質量為 1,2,3,…8 單位的砝碼置入圖十一中的 7 個白色秤盤內，另外將質量為 x 和 x^2 單位的砝碼置入圖十一中的 2 個黑色秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且所有的天秤都平衡。

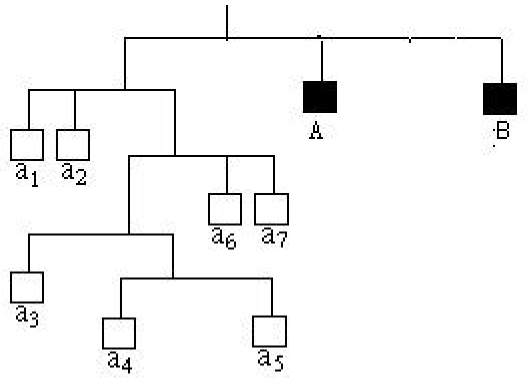

圖　十一

由題四的解答可以知道 $(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_7)=(6,5,3,4,2,7,1)$，所以本題變成問“$28=X+3X^2$”或“$28=X^2+3X$”的正整數解。很容易看出來 $28=X+3X^2$ 沒有正整數解，而 $28=X^2+3X$ 恰有一個正整數解。就是 $X=4$。

題十.

請將質量為 1,2,3,…8 單位的砝碼置入圖十二中的 8 個秤盤內，使得每個秤盤恰好放置一個砝碼，而且滿足所有天秤的狀態(最右邊兩個天秤傾斜並平衡)。

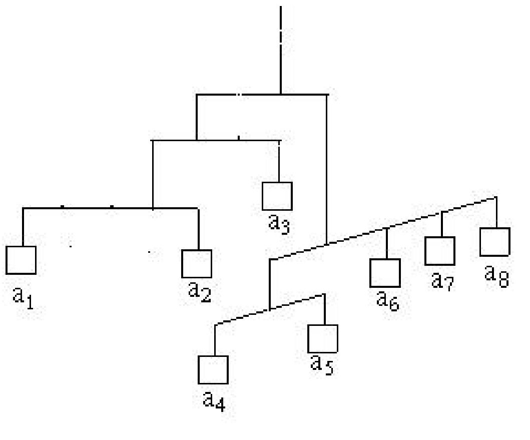

圖　十二

本題的解法技巧和前面所敘述差不多，在此就不再多說了，解答是

$(a_1,a_2,a_3,\ldots,a_8) = (2,6,4,8,7,5,3,1)$。

結論

在這個研究計劃裡，開始令我最困難的事是：面對一大堆的方程式，不知從何下手。因為每一種方程式都有好多種可能的解，每一種又可以引伸出更多種的解，所以需要花費很多時間來計算和檢驗。但是經過整理一些砝碼的個數較少的個數題目解答的可能性，當面對較大較繁鎖的題目時，能夠快速地得到簡單幾組的解答，再作分析就出來了。

令我最滿意的事是：自已能研究創作新題目，而且還有了一些屬於自已創作的題目。

在這個研究計劃裡，使我對國一、二課程裡的數學知識有更深入的認識，同時也能利用它來創作有趣而且好玩的數學遊戲題目，讓我覺得學數學不是一個很枯燥無味的事情，

經過這研究計劃以後，對自己的程度比較有信心，我很高興而且收獲很大。

在這個研究過程裡，我發現確定題目中的不變量及對應方程式是非常重要。給予天秤的題目明確的記號，可以避免畫複雜的圖形。分類整理”稱天秤”題目的基本圖形資料。可以避免許多重複的分析工作。掌握設計題目的訣竅就是要設計複雜的題目。自己必須要深入了解題目的特性，然後細心地計算和檢驗就可以了。只要多花點心思可以包含更多其他的數學技巧。

如何尋找不變量是學數學過程中非常重要的問題，在各種問題上常常出現，我看過很多各式各類數學資優生的考試題目，也都是在找不變量，這是我將繼續研究的方向。

誌謝：謝謝審查人對本篇文章寶貴的建議。

(下轉第 31 頁)