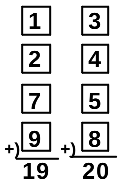
數學解題中「移與轉」的觀點

許建銘

高雄市立龍華國民中學

一、前言：

Boris A.Kordemsky 在其所著「350 MATHEMATICAL RECREATIONS」中有一道趣味問題：



把 1，2，3，4，5，7，8，9 八個數字分別寫在小硬紙板上，如圖示排成兩行。請移動兩張紙板，使兩行的數字和一樣。

這問題在原書的解答是：將「9」的紙板反轉成「6」，並與「8」的紙板互換，則兩行的數字和皆變成 18。

「平移」和「旋轉」原是從運動的觀點解決幾何問題的實用方法，而它產生的作用，就如同可省工省時，又可提高生產效率的「機械手臂」，所作流暢精準的快速運動；也如同讓小孩子愛不釋手的「變身玩具」，動不動就有「搖身一變」成特殊造型的神奇魔力。「移轉」或「轉移」的解題觀點，因為動作自然天成，節奏明快有序，所以也能使其圖解呈現「力與美」的動態嵌合效果。

例如以下的三個問題與其圖解（圖 1-2、1-4、1-6），就是靈活運用善變的圖形移轉與嵌合策略，才使解法變得如此簡潔明白（本文各圖之記號「。」表示旋轉中心）。

問題一：圖 1-1 中，若大正三角形的面積為 4，求圓內接正三角形的面積？

圖解：如圖 1-2。

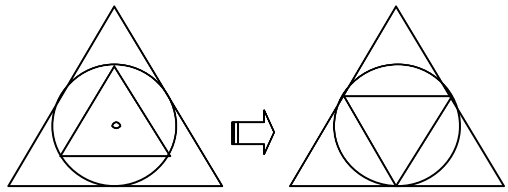


圖 1-1　圖 1-2　Ans:1

問題二：圖 1-3 中，正三角形邊長為 6，分別以三邊為直徑畫半圓，求斜線面積？

圖解：如圖 1-4。

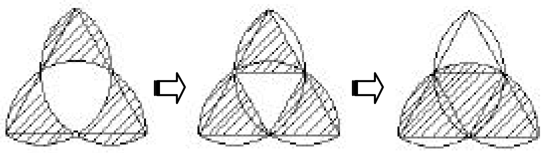


圖 1-3　圖 1-4　Ans:4.5π

問題三：圖 1-5 中，若最小半圓的半徑為 1，且較大一個半圓的半徑都增加 1，求斜線部分與其它部分的面積比？

圖解：如圖 1-6。

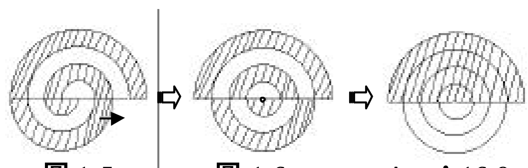
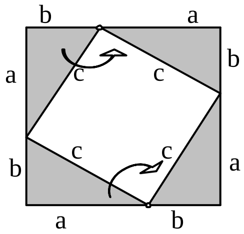


圖 1-5　圖 1-6　Ans：16:9

二、本文：

(一)現在國二生在學習「商高定理」時，課本和習作本中有幾個「商高定理」的不同證明方法，其中最易學易懂的，要算以下這個利用拼圖變化所作面積比較的證明(如圖

2-1、圖 2-2，演示時最好以兩套相同教具作對照)：



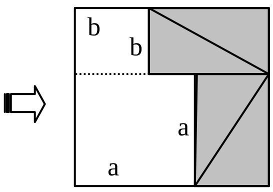
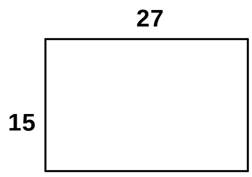


圖 2-1　　　　圖 2-2

$$c^2 = a^2 + b^2$$

有一道剪拼圖的問題是：請將長 27，寬 15 的長方形紙片(如圖 2-3)，經過裁剪再拼成一個正方形。



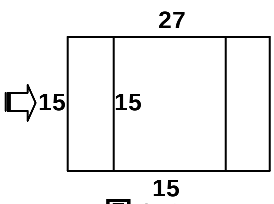


圖 2-3　　　　圖 2-4

由圖 2-3 與圖 2-1，我們似乎聯想到了它們之間可能產生的關係，也就是說：如果我們先在矩形紙的正中央畫出一個邊長為 15 的正方形(如圖 2-4)，然後再把正方形兩旁的兩片矩形紙片，剪拼出四片斜邊長為 15 的直角三角形，並將這些紙片拼成如圖 2-1 樣式的正方形，那麼問題不就迎刃而解了嗎？

因此我們分別以 15 的邊長為直徑作兩個半圓，便可得兩個斜線三角形皆為直角三角形(如圖 2-5)。因為每個斜線直角三角形旁的兩個小直角三角形，都可拼成與斜線直角三角形全等之直角三角形，因此若將它們拼於正方形之另兩邊(如圖 2-6)，則剪拼正方形的工作便大功告成了(如圖 2-7)。

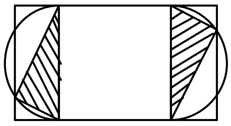


圖 2-5

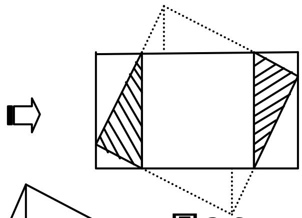


圖 2-6

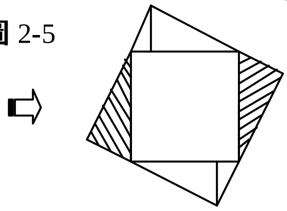


圖 2-7

事實上，長方形剪拼成正方形的方式，可以隨長方形不同的長寬比例，而有多種不同的解決之道。但這並非本文主題，所以筆者不多作贅述。以本題 15×27 的長方形而言，若能以「平移」再配合「三角形全等性質」，則剪拼方式將變得更為簡易。

首先，我們利用直角三角形「母子相似」以求出 $\sqrt{15\times 27}=\sqrt{405}$ (如圖 2-8)，然後再從矩形長 27 的 $\overline{AD}$ 邊上取 $\overline{AE}=\sqrt{405}$ 的長度，並剪開 $\overline{BE}$，使矩形紙成為兩部分(如圖 2-9)。

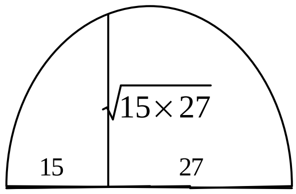


圖 2-8

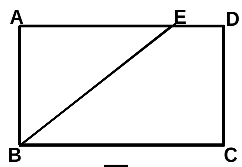


圖 2-9

接下來，我們將 ΔABE 沿著 $\overrightarrow{BE}$ 的方向平移，直到 E 點落在 $\overleftrightarrow{CD}$ 上，則 $\Delta A'B'E' \cong \Delta ABE$（如圖 2-10）。因為直角 $\Delta BB'F \cong \Delta EE'D$，所以再剪開直角 $\Delta BB'F$，並依舊沿著 $\overrightarrow{BE}$ 的方向平移至 $\Delta EE'D$ 的位置(如圖 2-11)，則邊長為 $\sqrt{405}$ 的正方形 $A'FCE'$ 便剪拼完成了。

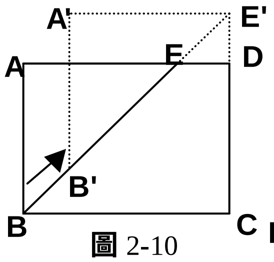


圖 2-10

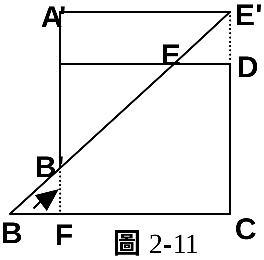


圖 2-11

(二)以下兩個問題，或許有讀者看過以「平移」作為解題策略的解法，而筆者在此也同時列出自己教學時，作為評析比較用的「旋轉」解法。

問題一：如下圖，六邊形 $ABCDEF$，$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{DE}$，$\overline{BC} \,/\!/\, \overline{EF}$，$\overline{CD} \,/\!/\, \overline{AF}$，而且 $\overline{BC}-\overline{EF}=\overline{ED}-\overline{AB}=\overline{AF}-\overline{CD}>0$

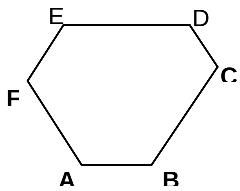
試證：各內角皆為 120 度。

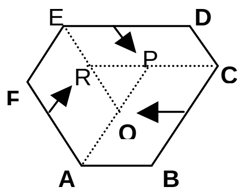
解一：將 $\overline{ED}$、$\overline{AF}$、$\overline{BC}$ 如圖示的方向作平移。

由 $\overline{BC}-\overline{EF}=\overline{ED}-\overline{AB}=\overline{AF}-\overline{CD}>0$

$\Rightarrow \overline{PQ}=\overline{PR}=\overline{QR}$　$\therefore \Delta PQR$ 為正三角形

$\Rightarrow \angle PQR=\angle PRQ=\angle QPR=60°$ 由平行線性質便可依次推得各內角皆為 120 度。





解二：將 $\overline{CD}$、$\overline{AF}$ 如下圖示的旋轉中心依次旋轉至與六邊形之另四邊成一直線。

由 $\overline{BC}-\overline{EF}=\overline{ED}-\overline{AB}=\overline{AF}-\overline{CD}>0$

$\Rightarrow \overline{ED}+\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{AF}$，$\overline{EF}+\overline{AF}=\overline{BC}+\overline{CD}$

$\Rightarrow \overline{ED}+\overline{DP}=\overline{AB}+\overline{AR}$，$\overline{EF}+\overline{FS}=\overline{BC}+\overline{CQ}$

$\therefore \overline{EP}=\overline{BR}$，$\overline{ES}=\overline{BQ}$ 又 $\overline{EP} \,/\!/\, \overline{BR}$，$\overline{ES} \,/\!/\, \overline{BQ}$ 因此若假設 $\overleftrightarrow{EP}$ 與 $\overleftrightarrow{BQ}$ 交於 M，$\overleftrightarrow{ES}$ 與 $\overleftrightarrow{BR}$ 交於 N 則必定 $\overline{PM}=\overline{RN}$ (令$=|x|$，且 $x=\overline{DM}-\overline{DP}=\overline{AN}-\overline{AR}$) $\overline{QM}=\overline{SN}$ (令$=|y|$，且 $y=\overline{CM}-\overline{CQ}=\overline{FN}-\overline{FS}$)

由 $\Delta CDM \sim \Delta FAN$

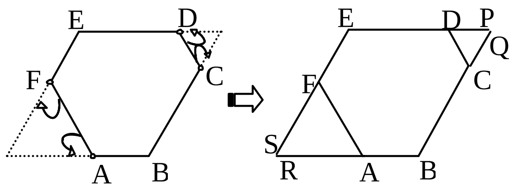
$\Rightarrow \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{DM}}{\overline{AN}}=\dfrac{\overline{CM}}{\overline{FN}}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{DP}+x}{\overline{AR}+x}=\dfrac{\overline{CQ}+y}{\overline{FS}+y}$

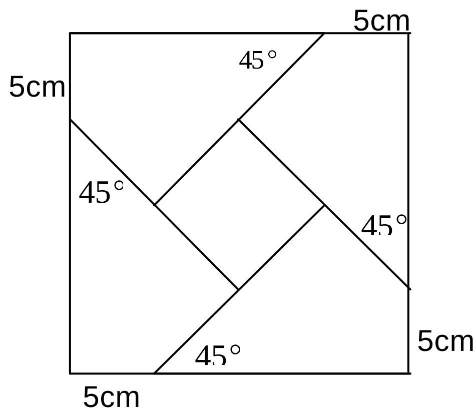
$\Rightarrow \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AF}}=\dfrac{\overline{CD}+x}{\overline{AF}+x}=\dfrac{\overline{CD}+y}{\overline{AF}+y}$

$\Rightarrow x(\overline{AF}-\overline{CD})=y(\overline{AF}-\overline{CD})=0$

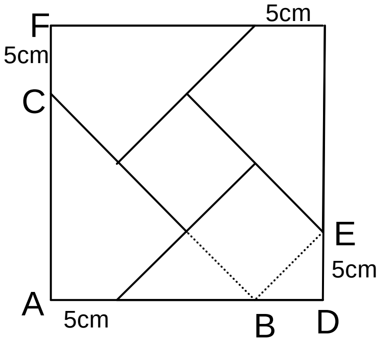
因為 $\overline{AF}-\overline{CD}\neq 0$ $\therefore x=0$ 此即證得當 $\overline{CD}$、$\overline{AF}$ 分別以 C、D、A、F 為旋轉中心而旋轉至與原六邊形之另四邊成一直線時，恰可作成兩個正三角形。故可依次推得各內角皆 120 度。



問題二：如下圖，是由一個小正方形與四個有一內角為 45 度，且一邊長為 5cm 的全等四邊形所拼成的大正方形，請求出小正方形的面積？

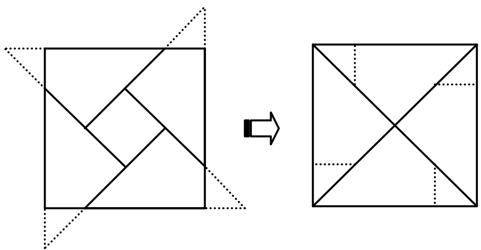


解一：如下圖，因為 ΔABC 為等腰直角三角形 $\therefore \overline{AB}=\overline{AC}$ 又 $\overline{AD}=\overline{AF}$ $\therefore \overline{BD}=\overline{CF}=5cm \Rightarrow \Delta BDE$ 為等腰直角三角形 $\therefore \overline{BE}=5\sqrt{2}$ =小正方形邊長，故小正方形面積 $=(5\sqrt{2})^2=50(cm^2)$

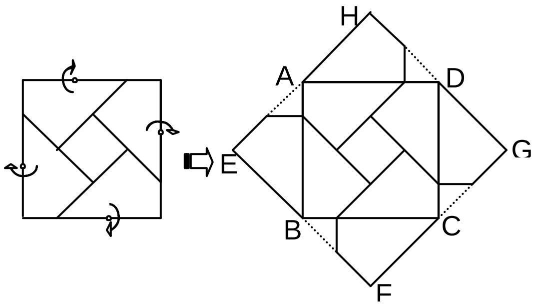


解二：如下圖，延長四個全等四邊形的兩個邊長，則圖中將有四個較大的全等等腰直角三角形與四個較小的全等等腰直角三角形。若除去中央的小正方形，則四個較大的全等等腰直角三角形將可由平移拼成與原大正方形全等之正方形。

由此推知小正方形面積等於四個較小的全等等腰直角三角形的面積和，所以小正方形面積 $=\frac{1}{2}\times 5^2\times 4=50$ (cm^2)。



解三：如下圖，將四個全等四邊形皆順轉 180 度。由圖可推知 A、B、C、D 為正方形 $EFGH$ 四邊中點，即四個較大的全等等腰直角三角形 ΔHAD、ΔAEB、ΔBFC、ΔCGD 的面積和等於正方形 $ABCD$ 面積。由此推知小正方形面積等於四個較小的全等等腰直角三角形的面積和，所以小正方形面積 $=\frac{1}{2}\times 5^2\times 4=50$ (cm^2)。



(三)問題三：某人沿著正向上移動的電扶梯，從頂朝下走到底，用了時間7分30秒，而他沿著正向上移動的電扶梯，從底朝上走到頂，用了時間1分30秒，(如果此人上下走，都作等速運動考慮)，那麼此人不走，乘著向上移動的電扶梯，從底到頂需多少時間？

解一：設人走路的分速為 x，電扶梯向上移動分速為 y 電扶梯由底至頂的長

$$=\frac{15}{2}(x-y)=\frac{3}{2}(x+y)$$

$$\Rightarrow 5x-5y=x+y$$

$$\Rightarrow 2x=3y\Rightarrow x=\frac{3}{2}y$$ $\therefore$ 所需時間

$$=\frac{\frac{3}{2}(x+y)}{y}=\frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}y+y)}{y}=\frac{3}{2}\times\frac{5}{2}=\frac{15}{4}=3\frac{3}{4}$$

(分)

解二：設人走路的分速為 x，電扶梯向上移

動分速為 y，電扶梯底至頂的長為 s

$$\begin{cases}\dfrac{s}{x-y}=7\dfrac{1}{2}\\[2mm]\dfrac{s}{x+y}=1\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{x-y}{s}=\dfrac{2}{15}\\[2mm]\dfrac{x+y}{s}=\dfrac{2}{3}\end{cases}\Rightarrow\dfrac{y}{s}=\dfrac{4}{15}$$

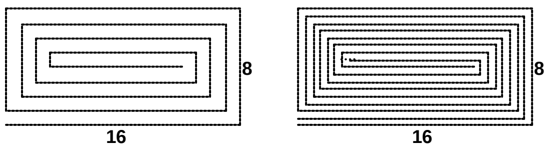
$\therefore$ 所需時間 $=\dfrac{s}{y}=\dfrac{15}{4}=3\dfrac{3}{4}$(分)

問題三的「解二」，雖然是分式方程與加減消去的結合，但解題過程中作了兩次分數的「反轉」，相較「解一」採用的變數轉換，「解二」顯得更簡明扼要，靈活有趣。

(四)問題四：

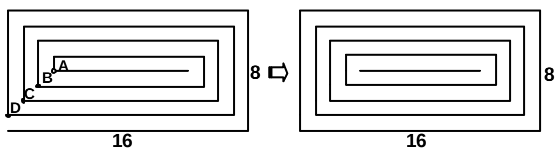
(1)如下圖左，兩緊鄰平行線相距 1，請求出成直角的折線段長度和。

(2)承第(1)題，若虛線位於兩緊鄰平行線的中央，請求出成直角的虛線段長度和。

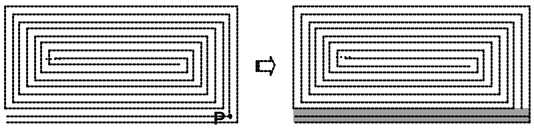


解：(1)以 A、B、C、D 為旋轉中心(如下圖左)，將其右方長度 1 的線段順轉 90 度(如下圖右)。而右圖中，因為每一個較外側的矩形周長都比其相鄰內側的矩形周長多了 8 個單位長，所以折線的總長度為

$48+40+32+24+8=144+8=152$。



(2)以 P 為旋轉中心(如下圖左)，將正上方長度 0.5 線段順轉 90 度(如下圖右)。因為右圖下方的灰色矩形區域面積恰等於區域內虛線的長度乘以這塊長條矩形的寬 1。由此我們可以推廣得知任一長條矩形的面積皆等於該長條矩形內的虛線長乘以 1。最後可推得整個矩形的總面積會等於虛線段的長度總和乘以 1。即虛線段長度和乘以 1 等於整個矩形面積 $16\times8=128$，所以虛線段長度和=128。



問題四的兩個小題，雖然都是求折線段長度和的問題，而且解題都應用到簡單的「旋轉變換」，但兩者的解題策略也有明顯的不同：(1)是以「等差」來精簡計算；(2)是將長度轉化為面積來計算。許多數學問題常常是乍看很相像，但箇中解題的思考方向卻可能大異其趣。這點也可能是數學解題的美妙之處，甚至是吸引眾多數學愛好者嗜好解題思考的原因。

三、結論：

臺灣有句俗諺說：「橫柴入灶」，有比喻霸道或蠻橫不講理的意思。若以其字面作解釋就可以知道：想把較長的木柴放入灶中燃燒，若完全不理會置入的方式，有時是行不通的。換句話說：無論古人的「愚公移山」，還是今人的「山不轉路轉，路不轉人轉」，若不能順應時勢，掌握轉彎變通的得法要領，就不可能把事情辦得很好。

數學教學與解題的訓練，目的就在培養學習者具備以數學觀點看待生活周遭事物的

基本素養，並進而提高學習者運用數學思考評析、解決生活問題的情意與能力。因此波利亞（Polya，1965）對數學學習有如此的看法：「很多人說學習應該是主動的，不僅是被動的或接受的。如果只是靠讀書、聽演講、或看圖片而沒有加上自己心靈的一些行動，決不可能學到任何事物，至少不可能學太多。」因此如何引導學生欣賞解題之美或者是感受數學思考之美，讓學生樂於主動學習數學，並從解題思考中建構數學經驗而「自得其樂」與「學以致用」，是當今整個社會面與教育面，都需要一起面對與省思的課題。

註：感謝臺灣師大洪有情教授與其他編審，對本人所投稿之文章的悉心指導，在此致上誠摯的敬意與謝意。

(上承第 25 頁)

文獻探討

1.趙文敏. 寓數學於遊戲第一輯，台北九章出版社，1981。

2.孫君儀、葉均承、陳天任. 土撥鼠遊戲研究，中央研究院數學傳播(1999)，第 23 卷. 第四期，p.32-38。

3.葉均承. Apex 遊戲的推廣，中央研究院數學傳播(2000)，第 24 卷. 第三期，p.66-83。

4.葉均承.圓積木研究，科學教育月刊(2002)，第 246 期，p.16-20。

5.葉洹君.拼圖遊戲，中央研究院數學傳播(2002)，第 26 卷.第三期，p.68-82。

6.葉洹君、顏德琮、連信欽：所羅門寶藏，科學教育月刊(2001)，第 245 期，p.10-17。