幾乎每個數都有 3

許介彥

大葉大學　通訊與計算機工程學系

這個怪題目是在說什麼？看完這篇文章後，您就清楚了。

我們先從整數的表示方式談起。從小學以來，我們都習慣於將數值以十進制的方式表示，利用一連串阿拉伯數字來表示一個數值的大小，例如：整數 167 是由 1、6、7 等三個阿拉伯數字組成，而四位數 5225 則是由 5 與 2 兩個阿拉伯數字組成（每個數字各出現兩次）等。當然，同一個數值在不同的進位系統裡可能有不同的表示方式，例如十進制的 18 相當於七進制的 24，又相當於三進制的 200 等。英文裡，一個整數的數值本身稱為 integer，而用來表示數值大小的一連串數字或符號則稱為 numeral；因此我們所謂「整數 167 是由 1、6、7 等三個阿拉伯數字組成」，說得精確一點，其實是針對該整數在十進制中的表示方式而言。

考慮以下問題：對任意正整數 n，所有小於 10^n 的非負整數中，含有至少一個阿拉伯數字 3 的共有幾個？以 $n = 1$ 為例，小於 10^1 的非負整數共有 10 個：0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9，其中只有一個含有 3，也就是 3 本身。當 $n = 2$，小於 10^2 的非負整數有 0 至 99 等 100 個，其中含有至少一個 3 的有 3, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 43, 53, 63, 73, 83, 93 等 19 個。

對任意正整數 n，假設 a_n 代表小於 10^n 而且含有至少一個 3 的非負整數的個數，那麼我們已經知道 $a_1 = 1$ 及 $a_2 = 19$，我們希望能找出 a_n 的一般式。

這個問題如果用遞迴的方式來思考，我們可以問自己：如果 a_{n-1} 的值已知，也就是小於 10^{n-1} 且含有至少一個 3 的非負整數的個數已知的話，對求出 a_n 的值有沒有幫助呢？答案是肯定的。以我們已知的 $a_2 = 19$ 為例，這項資訊對求出 a_3 的值很有幫助，因為如果我們把所有小於 1000 的非負整數分成十等份：0 到 99、100 到 199、200 到 299、……、900 到 999 等，那麼我們已經知道第一份的 100 個整數（0 到 99）中含有至少一個 3 的非負整數有 19 個；不只如此，除了 300 至 399 較特殊外，其他八份的每一份應該也都各包含了 19 個含有至少一個 3 的整數，而 300 至 399 這一份則是全部 100 個數都含有至少一個 3（因為百位數已經是 3）。因此，

$$a_3 = 9a_2 + 100$$

或者，更廣泛地說，

$$a_n = 9a_{n-1} + 10^{n-1}$$

再配合 $a_1 = 1$ 的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 9a_{n-1} + 10^{n-1} & n > 1 \end{cases}$$

由此不難推導出

$$a_n = 10^n - 9^n,\quad n \ge 1.$$

原來是這麼簡潔的一個式子。

既然 a_n 的一般式這麼簡單，當然值得我們探尋是否存在著一個簡單的解釋。仔細一想，讀者很容易就能看出其中的道理，因為小於 10^n 的非負整數總共有 10^n 個，而其中完全不包含 3 的整數總共有 9^n 個（因為每個位數只有 9 種可能的選擇）。

由上面的推導過程，讀者不難發覺阿拉伯數字 3 其實並沒有什麼特殊之處，即使原來的問題不是問數字 3 而是問另一個阿拉伯數字，只要不是 0，答案其實都是一樣的；如果是數字 0 則情況稍有不同。我們平常在書寫一個整數時，只要這個數不是 0，我們就不會將它的最左邊的位數寫為 0，也就是說，我們不會將 167 寫成 0167 或 00167；在這樣的習慣下，對任意正整數 n，所有小於 10^n 的非負整數中，含有至少一個阿拉伯數字 0 的共有幾個呢？

還是由最簡單的情形開始考慮。當 $n = 1$，所有小於 10^1 的 10 個非負整數中只有一個含有 0，也就是 0 本身。當 $n = 2$，所有小於 10^2 的 100 個非負整數中含有至少一個 0 的有 0, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 等十個。對任意正整數 n，假設 b_n 代表小於 10^n 而且含有至少一個 0 的非負整數的個數，那麼我們已經知道 $b_1 = 1$ 及 $b_2 = 10$；我們希望也能找出 b_n 的一般式。

如果 b_{n-1} 的值已知的話，對 b_n 的求值有沒有幫助呢？答案同樣是肯定的。如果我們把所有小於 10^n 的非負整數比照之前的分法分為十等份，那麼我們已經知道第一份的 10^{n-1} 個整數（0 至 $10^{n-1}-1$）中含有至少一個 0 的非負整數總共有 b_{n-1} 個；其他九份的每一份中，完全不包含數字 0 的整數各有 9^{n-1} 個（為什麼？），因此，

$$b_n = b_{n-1} + 9(10^{n-1} - 9^{n-1})$$

再配合 $b_1 = 1$ 的初始條件，我們有了完整的遞迴定義：

$$b_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ b_{n-1} + 9(10^{n-1} - 9^{n-1}) & n > 1 \end{cases}$$

由此不難推導出

$$b_n = 10^n - \frac{9}{8}\left(9^n - 1\right),\ n \ge 1.$$

這就是我們要找的一般式。

最後我們再看一個類似的問題：對任意正整數 n，所有小於 10^n 的非負整數中，含有至少一個「27」(即，一個阿拉伯數字 2 緊接著一個阿拉伯數字 7）的共有幾個？在繼續往下看之前，請讀者自己先試試看。

這個問題看起來雖然和前面的問題差不多，實際上是一個較難的問題；由正面著手不大容易，我們不妨試試由反面來思考。在以下的做法中，我們假設 a_n 代表小於 10^n 而且不含「27」的非負整數的個數，因此，小於 10^n 而且含有至少一個「27」的非負整數有$(10^n - a_n)$個。

還是由最簡單的情形開始考慮。當 $n = 1$，所有小於 10^1 的 10 個非負整數全都沒有「27」，因此 $a_1 = 10$。當 $n = 2$，很明顯，所有小於 10^2 的 100 個非負整數中不含「27」的共有 99 個，因此 $a_2 = 99$。

當 $n \ge 3$，如果我們把所有小於 10^n 的非負整數比照之前的分法分為十等份，那麼第

一份的 10^{n-1} 個整數（0 至 $10^{n-1}-1$）中不含「27」的有 a_{n-1} 個；不僅如此，除了第三份（即以數字 2 開頭的那一份）之外，其他八份也都各含有 a_{n-1} 個沒有「27」的整數。

以 2 開頭的那一份的 10^{n-1} 個整數中，不含「27」的共有幾個呢？並不是 a_{n-1} 個，沒有這麼多，因為所有小於 10^{n-1} 且不含「27」的 a_{n-1} 個非負整數中，有些整數是以 7 開頭的$(n-1)$位數，這種整數共有 a_{n-2} 個，而這些整數如果在最左邊補上一個 2 將會成為含有「27」的 n 位數。因此，以 2 開頭的 10^{n-1} 個 n 位數中，不含「27」的共有$(a_{n-1}-a_{n-2})$個。

有了上述推論，我們知道對所有 $n \geq 3$，以下的遞迴關係是成立的：

$$a_n = 9a_{n-1} + (a_{n-1} - a_{n-2}) = 10a_{n-1} - a_{n-2}$$

據此可寫出數列的遞迴定義：

$$a_n = \begin{cases} 10 & n=1 \\ 99 & n=2 \\ 10a_{n-1} - a_{n-2} & n>2 \end{cases}$$

有了這個定義，只要 n 是一個正整數，我們就可以算出 a_n 的值，例如

$$a_3 = 10 \times 99 - 10 = 980$$

$$a_4 = 10 \times 980 - 99 = 9701$$

$$a_5 = 10 \times 9701 - 980 = 96030$$

等；要是讀者熟悉常係數線性遞迴關係的求解，其實不難由以上的遞迴定義進一步得出 a_n 的一般式：

$$a_n = \frac{1}{4\sqrt{6}}\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n+1} - \left(5-2\sqrt{6}\right)^{n+1}\right)$$

因此，對任意正整數 n，所有小於 10^n 的非負整數中，含有至少一個「27」的共有

$$10^n - \frac{1}{4\sqrt{6}}\left(\left(5+2\sqrt{6}\right)^{n+1} - \left(5-2\sqrt{6}\right)^{n+1}\right)$$

個。

再回到我們原來的問題，我們已經知道所有小於 10^n 的非負整數中有 $(10^n - 9^n)$ 個整數包含了至少一個 3，就比率而言，有 3 的整數占了全部的

$$\frac{10^n - 9^n}{10^n} = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

隨著 n 的增大，含有 3 的整數的比率將越來越大：

n	10n	含有 3 的整數個數
1	10	1
2	100	19
3	1000	271
4	10000	3439
5	100000	40951
6	1000000	468559
7	10000000	5217031
8	100000000	56953279
9	1000000000	612579511
10	10000000000	6513215599

當 n 趨於無窮大，比值將趨近於 1；因此，就全部無窮多個非負整數而言，「幾乎每個數都有 3」。

最後筆者提供五個與本文相關的問題讓讀者想想看；只要您能掌握本文提及的概念，這些題目都不難回答。

1. 所有小於 7^{10} 的七進制非負整數中，含有至少一個阿拉伯數字 4 的共有幾個？
2. 對任意正整數 n，所有小於 b^n 的 b 進制非負整數中，含有至少一個阿拉伯數字 0 的共有幾個？
3. 對任意正整數 n，所有小於 3^n 的 3 進制非

負整數中，含有至少一個「201」的共有幾個（寫出遞迴定義即可）？

4. 對全部無窮多個正整數而言，完全平方數（即，可以表示成某個整數的平方的數）幾乎不存在，為什麼？

5. 對全部無窮多個正整數而言，幾乎每個數都含有 1、2、3、4、5 等五個阿拉伯數字至少各一個，為什麼？

參考資料

1. 許介彥（2001），遞迴函數的求解技巧，科學教育月刊，第 238 期。

2. 許介彥（2001），遞迴關係在計數問題的應用，科學教育月刊，第 243 期。

3. R. P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics, 4th edition, Addison-Wesley, 1999.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw

（上承第 34 頁）

結語

Catalan numbers 和數學上另一個有名的數列—費氏數列（Fibonacci numbers）—在某方面相當類似，就是在我們求解數學問題的過程中常常會與它們「不期而遇」，許多不同類型的計數問題都和它們有關；本刊第 243 期「遞迴關係在計數問題的應用」一文中的第六個例題就是另一個例子，該問題涉及為一個運算式安排運算順序的各種可能。看了這麼多例子之後，您是不是覺得自己也可以「製造」出更多的例子呢？試試看吧！

參考資料

許介彥（2001），遞迴關係在計數問題的應用，科學教育月刊，第 243 期。

J. A. Anderson, *Discrete Mathematics with Combinatorics*, Prentice Hall, 2001.

K. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 4th edition, McGraw-Hill, 1999.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw