2000 年環球城市數學競賽
春季賽國中試題解析

葉洹君* 葉永南** 孫文先***

*臺北市實踐國民中學
**中央研究院　數學所
***九章數學教育基金會

簡　介

環球城市數學競賽(International Mathematics Tournament of Towns)肇始於1980 年，原只有前蘇聯的三個城市莫斯科(Moscow)、基輔(Kiev)及里加(Riga)市參加，現已成為國際性的比賽，由俄羅斯科學院主辦，有上百個城市，數十萬名學生參加。

比賽每年有二輪，秋季賽通常在每年十、十一月，春季賽通常在次年二、三月，全世界同步舉行。各城市自行初閱後，將試卷得分較高者依人口一定比例之數量呈交總主辦單位複核評比。競賽指定語文為英語、俄語、法語、德語、西班牙語、世界語，非使用上述語文之參賽城市必須自行翻譯試題及送交總部之答案卷。每輪競賽分為國中組(Junior)及高中組 (Senior)，國一及國一以下(在俄羅斯為 Years 8)學生參加國中組競賽以原始分數乘以 3/2 計分，國二學生(Years 9)則以原始分數乘以 4/3 計分；高一及高一以下(Years 11)學生參加高中組競賽，以原始分數乘以5/4計分。每組又分為初級卷(O-Level)及高級卷(A-Level) 競賽，間隔一週測試，參賽者可擇一或二者均參加，高級卷較難，但每題佔分較多。初級卷測試時間 4 小時；高級卷測試時間 5 小時。以參賽者每次試卷得分最高之三題總分為原始分數，以初級卷及高級卷較高之得分參加評比。參賽成績優異者將由俄羅斯科學院頒發證書，各城市之成績優異者由各地主辦單位頒發獎狀。

1992 年起，除了競賽之外，又多了二項活動。第一項是評比後成績優異的學生將獲邀請參加為期一週的夏令營，此夏令營通常在俄羅斯鄉間舉行，開營時即給營員一些分成若干主題的挑戰題(有些問題尚未有人解答)，由一位教授指導三位學生共同研討這些問題。在夏令營期間營員亦參加一些專題研討及聯誼活動。另一項活動是通訊指導優異的學生作進階研究及培訓，每位學生配置一位教授指導。這二項活動均由俄羅斯科學院挑選學生。

台灣地區從 1999 年秋天開始參加環球城市數學競賽，但是從 2000 年起，競賽的給獎辦法改為分年級給獎，並增加女生獎，而加權分數僅作為評比寄送俄羅斯的那些試卷用。

歐美的學生，特別是俄羅斯、匈牙利、

羅馬尼亞等東歐國家高年級的資優學生的數學的能力與低年級差別較大，但是國內高年級的資優學生的數學的能力與低年級差不多。主要我們高年級的數學課程老在某些知識點上打轉，而一般的考試只考測驗或選擇題來測驗學生能否迅速而精確的回答出制式的問題。他們沒有時間來思考問題應該如何入手，久而久之，便養成學生面對無法立即克服的問題時，輕易地就宣佈放棄的壞習慣。我們希望藉由參加環球城市數學競賽，讓參賽者有充足的時間來解這些趣味題目，進而能夠幫助國內學生提高數學的能力及增廣數學的知識。

給參賽者的一封信

環球城市數學競賽是僅次於國際奧林匹亞(IMO)第二個最具聲望的中學生國際數學競賽。環球城市數學競賽是一個較優越的競賽。這可以從兩個重要方向來看。首先，大多數的學生都能夠參與這個競賽，而在國際奧林匹亞競賽中，每個國家卻局限於最多六名學生有機會參加。因為環球城市數學競賽的試務是在各地自行舉辦的，所需的經費較少。這便允許大量的學生來參與並享受一次高水準的國際競賽。第二，試題由具傑出經驗的專家所命題的。它這題目純粹因數學才能、趣味等因素而被選出來，不受其他因素干擾。在 IMO 競賽中則常見到一些漂亮的備選題因涉及各國爭取獎牌的隱秘動機，而被人策劃否決了。

環球城市數學競賽比較像是一種數學的實驗而非考試。同樣也可以由兩方面來看。首先，它沒有可能贏得大獎，目前為止也沒有什麼相關的宣傳價值。因此參賽者不會感到任何不適的壓力。不像一般考試，當學生受測時已經被假設他應該了解考試內容的一切知識。環球城市數學競賽是被設計用來挑戰參賽者的創造力，如果他們不能解答任何題目，他們不該因而感到羞恥，因為這是被預料中的結果。反過來說，學生能設法征服任一個問題得到一點分數，他們應該是感到光耀的。再者，環球城市數學競賽給予參賽者充足的時間來解題，而一般的考試只測驗學生能否迅速而精確的回答出制式的問題。他們確實沒有時間來思慮問題應該如何入手，久而久之，便養成學生面對無法立即克服的問題時，輕易地就言放棄的壞習慣。這也就是許多學生在環球城市數學競賽中考的不好的主因。這並不是他們缺少天賦或者努力，而是缺乏了經驗。一般人通常無法在閱讀完問題後能立即把解答寫出來，他們必須學習去琢磨給定的條件，並試著去發現線索或產生靈感。這些都是成功的研究人員相當重要的基本功夫，學生應該盡快學習。

國中組

(1) 兩個連續正整數的乘積是否可以表示為兩個連續正偶數的乘積？(三分)

小淳：這一題是求滿足方程式 $x(x+1)=2y(2y+2)$ 的 x，y 之正整數解。我試著代入 y 值為 1,2,3,4,5，結果得到的 x 值都不是整數，不曉得該怎麼辦？

小地：其實你已經抓到一些重點了，我記得

我作過“求 $x^2-y^2=5$ 的 x，y 之整數解”。所以我依樣畫葫蘆

左邊 $=x(x+1)=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

右邊 $=2y(2y+2)=4y^2+4y=(2y+1)^2-1$

這樣題目變成求“ $(2y+1)^2-\left(x+\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$

或 $(4y+2)^2-(2x+1)^2=3$ 的 x，y 整數解”。利用平方差公式：

$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$，

我們得到

$(4y+2+2x+1)(4y+2-2x-1)=3$

也就是 $(4y+2x+3)(4y-2x+1)=3$。

$4y+2x+3$	3,	1,	-1,	-3
$4y-2x+1$	1,	3,	-3,	-1

將上式加減下式，我們可得到：

$8y+4$	4,	4,	-4,	-4
$4x+2$	2,	-2,	2,	-2

，

所以

y	0,	0,	-1,	-1
x	0,	-1,	0,	-1

因此滿足題意的整數解為：

$0\times1=0\times2$，$-1\times0=0\times2$，$0\times1=-2\times0$

及 $-1\times0=-2\times0$ 但是沒有正整數解。

小君：小地的說法和我的想法有些不同。求整數解通常利用任一整數有質因數乘積分解的唯一性。所以我把 $4y^2+4y-x^2-x$ 化成二個二元一次多項式的乘積再減去一個常數。即 $(2y+x+a)(2y-x+b)$ 利用比較係數法 $2a+2b=4$，

$b-a=-1\ \therefore b=\frac{1}{2},a=\frac{3}{2}$。

$x^2+x=4y(y+1)$ 等價於

$(2y+x+\frac{3}{2})(2y-x+\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$ 即

$(4y+2x+3)(4y-2x+1)=3$，以下的解法就和小地一樣了。

小承：我也會一種最基本的解法。考慮 $x\le 2y$，$x=2y+1$ 及 $x\ge 2y+2$ 三種情形。

(i) $x\le 2y \Rightarrow x+1\le 2y+1<2y+2$

所以 $x(x+1)\le 2y(2y+2)$，矛盾。

(ii) $x\ge 2y+2 \Rightarrow x+1>x\ge 2y+2>2y$

所以 $x(x+1)>2y(2y+2)$，矛盾。

(iii) $x=2y+1 \Rightarrow x+1=2y+2$，$x>2y$

$x(x+1)>2y(2y+2)$，矛盾。

所以不可能。

小淳：這種方法我喜歡！

小南：其實我只要一步就證明了，你們看：

$x^2<x^2+x+1=(2y+1)^2<(x+1)^2$，矛盾。

小淳、小地、小君、小承：這是什麼意思呢？

小南：x^2 與 $(x+1)^2$ 中間不可能有任何整數的平方。由於 $\begin{aligned}x(x+1)+1&=2y(2y+2)+1\\&=4y^2+4y+1=(2y+1)^2\end{aligned}$。

而 $(2y+1)^2$ 介於 x^2 與 $(x+1)^2$ 之間所以矛盾。

小淳：好難喔！你們的方法都太難了！

小承：我的方法比較簡單。

(i). 若 x，$x+1$ 中某一數與 $2y$，$2y+2$ 中某一數相等，則另一數也必須相等，但 x，$x+1$ 不可能是兩個連續正偶數得，出矛盾。

(ii). 若 $x+1>2y+2$，則 $2y+2$，$2y$ 都會比 $x+1$ 小但比 x 大，因為 x 與 $x+1$ 中間不可能有整數，得出矛

盾。

(iii).若 $2y+2>x+1$，則 x， $x+1$ 都比 $2y+2$ 小，但比 $2y$ 大，因為 $2y$ 與 $2y+2$ 中間不可能有二個整數，得出矛盾。

(2)設梯形 $ABCD$ 的面積為 1，其上底 $\overline{BC}$ 與下底 $\overline{AD}$ 的比值為 1:2，令 K 為對角線 $\overline{AC}$ 的中點， L 為直線 DK 與邊 $\overline{AB}$ 的交點，試求四邊形 $BCKL$ 的面積。(四分)

小淳：這題我是利用座標化來解，首先令 $A=(0,0)$， $B=(2,0)$， $C=(a,b)$ 再利用 K 是 $\overline{AC}$ 中點。所以 $k=\left(\frac{a+1}{2},\frac{b}{2}\right)$。由 $\overline{AB}$ 與 $\overline{DK}$ 的直線式求解，得到 L 的座標，再利用 B、L、K、C 四點坐標求面積，就可以了。可惜我把直線式的公式忘了。

小地：你用的是高中生解析幾何的作法，其實這題很容易的。先把 $\overline{CB}$ 延長為 2 倍成為 $\overline{CE}$ (如圖)。這樣四邊形 $ADCE$ 是平行四邊形。在 ΔACE 中，中線 $\overline{AB}$ 與另一中線 $\overline{EK}$ 交於 L，所以 L 是 ΔACE 的重心。這樣 $EL=2LK$，$BL=\frac{1}{2}AB$，四邊形$ABCD$的面積$=1=3$ 倍 ΔABE 的面積

$\Rightarrow \Delta ABE=\frac{1}{3}=3\Delta LBE$

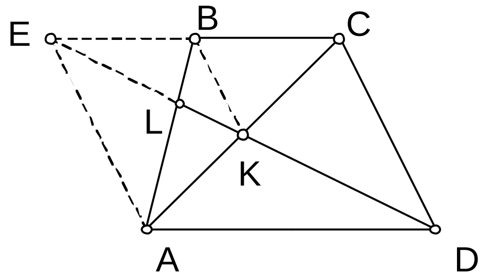
$\Rightarrow ?\ LBE=\frac{1}{9}=2?\ LBK \Rightarrow ?\ LBK=\frac{1}{18}$

又 $\Delta KBC=\Delta KBE=\Delta LBE+\Delta LBK=\frac{1}{9}+\frac{1}{18}=\frac{1}{6}$

因此四邊形 $KLBC=\Delta KBC+\Delta LBK=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}=\frac{2}{9}$。

小君：你為什麼想到延長 $\overline{CB}$ 為二倍呢？

小承：因為我對平行四邊形比較熟悉，作起來題目比較順手嘛！



ΔABE

小淳：我發覺在 $\overline{AD}$ 上取中點 F 連接 CF 好像也可以求出解答！

小南：對！您愈來愈能舉一反三了。其實，這個題目還有很多畫補助線的方法。

小承：在最後的步驟中，如果會用共角定理，答案一步就出來了。因為 ΔBEL 與 ΔKEC 共角，其面積比為 $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，所以四邊形 $BLKC$ 之面積為 $\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{9}$。

(3)(a)給定三種不同的顏色和一個 $3n$ 角柱，試證必可以將 $3n$ 角柱的頂點，塗上前述三種顏色之一，使得從任一頂點出發的三條稜邊所連的相鄰三個頂點上的顏色都不相同。(二分)（註：一個 m 角柱的兩個底為全等的 m 邊形。）

(b)給定三種不同顏色和一個 n 角柱，如果能將 n 角柱的頂點塗上前述三種顏色

之一，使得從任一頂點出發的三條稜邊所連的相鄰三個頂點上的顏色都不相同，試證 n 是 3 的倍數。(三分)

(a).小淳：當 $n=3$ 時，在上層三個頂點按順時針方向塗 1, 2, 3 顏色，下層頂點的顏色與它相鄰上層頂點的顏色相同。當 $n=6$ 時，上層 6 個頂點按順時針方向塗 1, 2, 3, 1, 2, 3 顏色，下層頂點的顏色與它相鄰上層頂點的顏色相同，依此下去，同樣作法即可。

小地：想法是對的，可是你的說法不嚴謹。同時，你也沒證明你的塗法符合題意。你必須證明你的作法是對的，不能要求老師們幫你檢查你的答案是對的。否則會被扣很多分。

小淳：那應如何寫呢？

小地：嚴謹的說明是應該用數學歸納法來證明，不然也應該用下列的說法。當 $n=3k$ 時，在上層的 n 的頂點，按順時針方向塗上顏色 R, B, G, R, B, G, ……，第 n 個點塗上顏色 G。它的順時針方向的下一個頂點是接著第 1 個頂點，在下層的頂點的顏色則與它相鄰上層頂點的顏色相同。這樣每個頂點在同層的左右頂點都與它本身顏色兩兩都不相同，所以每個頂點相鄰三個頂點都不相同。

(b).小淳：令三種顏色為 R, B, G。假設塗好顏色後使得任一頂點出發的三條稜邊所連的相鄰三個頂點上的顏色都不相同。令共有 a_x 個頂被塗上顏色 x，則 $a_R+a_B+a_G=2n$。我們令 R 的顏色號碼為 1，B 的顏色號碼為 2，G 的顏色號碼為 3，每一頂點相鄰頂點所塗顏色號碼總和為 $1+2+3=6$ 全部是 $6\times 2n=12n$，這樣每個頂點恰好被算 2 次，所以 $12n=a_R+2a_B+3a_G$。

如果我們改變 R, B, G 的顏色號碼為 2, 1, 3，同理我們有 $12n=2a_R+a_B+3a_G$

因此，我們得到 $a_R=a_B$。

同理 $a_B=a_G$，$\therefore 2n=a_R+a_B+a_G=3a_R$。

也就是說 n 是 3 的倍數。

小君：我的想法和你差不多，但是比較簡單。我只考慮塗上顏色 1 的個數為 a。則這 a 個頂點中每個頂點有 3 個相鄰的頂點，其中恰有 1 個是顏色 1。所以這 a 個頂點共有 $3a$ 個相鄰的頂點(它們不會重複，否則重複的那個頂點會與 2 個顏色 1 的頂點相鄰)。

又題意告訴我們 n 角柱的每個頂點都會與 1 個顏色 1 的頂點相鄰。所以 $3a$ 等於全部頂點的個數也就是說

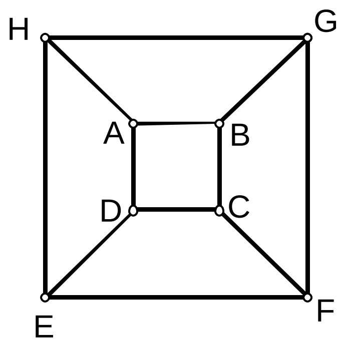
$3a=2n$，因此 n 是 3 的倍數。

(4)能否在立方體的所有頂點上都安置一個自然數，使得每條稜的兩端所安置的數對必有倍數關係(倍數關係是指其中的一個數是另外一個數的倍數)，但沒有稜邊相連接的數對則沒有倍數關係？(五分)

小淳：這題我試了很久都辦不到，例如 $A=2$，$B=4$，C 就沒法填了。另外 $A=2$，$B=6$，$C=3$。那 D 就無法繼續了。所以我猜答案是辦不到。

小地：假設 $A|B$。如果 $B|C$ 那就有 $A|C$。

這就矛盾了。所以 $C|B$ 但是 $(A,C)=1$。同理 $D|A$ 或者 $D|C$ 都會產生矛盾。所以 $A|D$，$C|D$。同樣的理由 $E|D$，$C|F$，$E|F$，$G|B$，$G|F$，……



小淳：也就是說先把 A 點塗黑色，與它相鄰的塗白色，再把與白色頂點相鄰的頂點塗黑。則黑色頂點有 A，C，E，G，白色頂點有 B，D，F，H，只要我們把黑點取不同的質數，那白色點是與它相鄰的黑色點上的數字乘積即可。

小地：別忘了，說明你的作法符合題意啊！

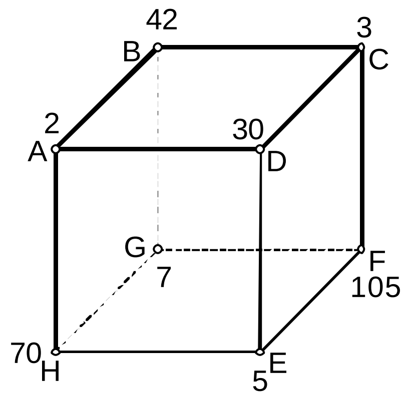
小淳：差點忘了，我取 $A=2$，$C=3$，$E=5$，$G=7$，則 $B=2\times3\times7=42$，$D=2\times3\times5=30$，$F=3\times5\times7=105$，$H=2\times5\times7=70$。這樣 A，C，E，G 兩兩互質，B，D，F，H，都不是倍數關係。

$(A,F)=(B,E)=(D,G)=(C,H)=1$

又 $A=(B,D,H)$，$C=(B,D,F)$，$E=(D,F,H)$，$G=(B,F,H)$。

小地：照你前面的說法答案有很多種：例如這 8 個頂點每個數同時乘上正整數 n 也可以。

小淳：嗯……，對！



國中組高級卷解析

(1).求方程式

$$(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+(x+1)^{19}(x-1)^2+\cdots+(x+1)(x-1)^{20}+(x-1)^{21}=0$$

的所有實數解。(三分)

小淳：我用公式

$$x^n+x^{n-1}y+\cdots+xy^{n-1}+y^n=\frac{x^n-y^n}{x-y}，則$$

$$0=(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+\cdots+(x-1)^{21}$$

$$=\frac{(x+1)^{22}-(x-1)^{22}}{(x+1)-(x-1)}=\frac{(x+1)^{22}-(x-1)^{22}}{2}$$

$$\therefore (x+1)^{22}=(x-1)^{22}$$

若 $|x+1|\neq|x-1|\Rightarrow|x+1|^{22}\neq|x-1|^{22}$，矛盾。

$\therefore |x+1|^{22}=|x-1|^{22}\Rightarrow x+1=x-1$ 或 $1-x$，又 $x+1=x-1$ 導致無解

$x+1=1-x\Rightarrow x=0$，代入原式符合。

小地：我先提出 $(x+1)^{21}$，再用公式

$$1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x}$$

$$0=(x+1)^{21}+(x+1)^{20}(x-1)+\cdots+(x-1)^{21}$$

$$= (x+1)^{21}\left(1+\frac{x-1}{x+1}+\cdots+\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{21}\right)$$

$$= (x+1)^{21}\,\frac{1-\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{22}}{1-\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\therefore 1=\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{22}$$

若 $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| \neq 1 \Rightarrow \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{22} \neq 1$，矛盾。

$\therefore \left|\frac{x-1}{x+1}\right| = 1 \Rightarrow x+1 = x-1$ 或 $1-x$

又 $x+1=x-1$ 導致無解

$x+1=1-x \Rightarrow x=0$，代入原式符合。

小君：我先把 2 項，2 項地結合起來

$0=(x+1)^{21}-(x+1)^{20}(x-1)+\cdots+(x-1)^{21}$

$=(x+1)^{20}[(x+1)+(x-1)]$

$+(x+1)^{18}(x-1)^{2}[(x+1)+(x-1)]+\cdots+$

$(x+1)^{2}(x-1)^{18}[(x+1)+(x+1)]$

$+(x-1)^{20}[(x+1)+(x-1)]$

$=2x[(x+1)^{20}+(x+1)^{18}(x-1)^{2}$

$+\cdots+(x+1)^{2}(x-1)^{18}+(x-1)^{20}]$

任意實數的偶次方均大於等於 0。令

$A=(x+1)^{20}+(x+1)^{18}(x-1)^{2}+\cdots+(x-1)^{20}$

如果 $x>0$，則 $A \geq (x+1)^{20}>0$；

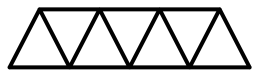
如果 $x<0$，則 $A \geq (x-1)^{20}>0$。

$\therefore 2xA=0 \Rightarrow x=0$，代入原式

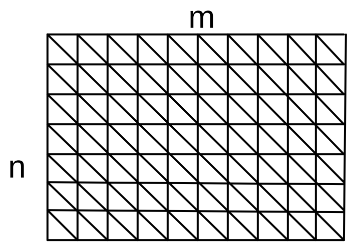
$1^{21}+(-1)+(-1)^{2}+\cdots+(-1)^{21}=0$ 成立。

(2).設梯形的上底與下底的長度都是整數，試證：這個梯形可以分割為若干個全等的三角形。(三分)

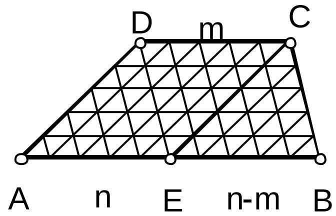
小淳：我會畫！例如上底長是 3，上底長是 4。那麼我就如圖 1a 所示，把梯形分割全等的三角形。



1a



1b



1c

小地：不對，你只是分割一個特殊的梯形。我知道邊長為整數的正方形、長方形或等腰直角三角形一定可以被分割成全等三角形(如圖 1b)。但是這題我不會。

小君：這題我會，其實你已經快作出答案了，你再仔細瞧瞧圖，如果它不是長方形而是平行四邊形呢？

小地：那一樣可以。您看，我用 GSP(動態幾何畫板)的軟體在電腦上畫出上圖，我只要拖動長方形的一頂點就變成平行四邊形了，可以清楚看出它可以被分割成許多全等的三角形。

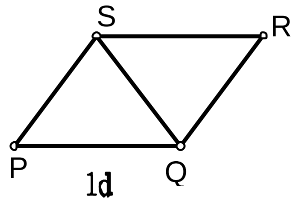
小君：如果每一個小平形四邊形格子的長、寬不同長度呢？

小地：嗯……，那也可以。喔！我會啦！在電腦上拖動自由點就可以了。設梯形

上底長為 m，下底長為 n (如圖 1c)，過 C 點作 $\overline{AD}$ 的平行線。且交 $\overline{AB}$ 於 E，因為 $\overline{EB}$ 長度為 $n-m$。所以我在 $\overline{CE}$ 取 $n-m$ 的等分點過這些點作 $\overline{CD}$ 的平行線，另外在 $\overline{EB}$ 上找 $n-m$ 等分點，過這些等分點作 $\overline{CE}$ 的平行線。(如圖 1c)就完成了。

小君：非常好，可是你別忘了要證明這些三角形都是全等的。否則被扣分就划不來了。

小地：我差點忘了。因為平行四邊形 $PQRS$(如圖 1d)。$\angle RSQ$ 與 $\angle PQS$，$\angle PSQ$ 與 $\angle RSQ$ 是二對內錯角，所以它們都互相相等。$\overline{SQ}$ 是公用邊。由 ASA 三角形全等定理得知 ? $PSQ\cong$? RQS。圖 1c 中的三角形都是全等平行四邊形中的右上三角形(三角形 RSQ) 或者左下三角形(三角形 PSQ)，所以它們都全等。



1d

(3).給定一個圓盤及內部一點 A，求所有可能形成矩形 $ABCD$ 中之頂點 C 的軌跡，其中 B 和 D 點在圓盤的邊上？(註：頂點 B 和 D 是變動的) (六分)

小淳：這一題點 A 在那裡都不知道，不曉得該怎麼辨？

小君：你忘了要先找幾個特例呀！如果 A 點是在圓心 O 上，令圓的半徑為 r，圓心為 O，則 $\overline{OC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AD}^2=2r^2$。所以 C 的軌跡是以 O 為圓心。半徑為 $\sqrt{2}r$ 的圓。

若 A 點不在圓心 O 上，我就不曉得該怎麼辨了，但是我猜 C 的軌跡是圓。

小承：小君表現非常好，若 A 點不在圓心 O 上，則過圓心 O 作直線 L 平行 $\overleftrightarrow{AD}$，延長 $\overleftrightarrow{BA}$ 與 L 的交點為 E，延長 $\overleftrightarrow{CD}$ 與 L 的交點為 F。則

$\overline{BE}^2=\overline{OB}^2-\overline{OE}^2=r^2-\overline{OE}^2$

$\overline{OF}^2=\overline{OD}^2-\overline{DF}^2=r^2-\overline{DF}^2$

又 $DFEA$ 為長方形(四個角都是直角)

$\therefore \overline{DF}=\overline{AE}$ 又

$\overline{OA}^2=\overline{OE}^2+\overline{AE}^2=\overline{OE}^2+\overline{DF}^2$

$\overline{OC}^2=\overline{BE}^2+\overline{OF}^2=2r^2-\overline{OA}^2$ (定數)，

$\therefore$ 所以 C 點的軌跡為以圓 O 為圓心，$\sqrt{2r^2-\overline{OA}^2}$ 為半徑的圓（檢查當 A 點是在圓心 O 上時，$\sqrt{2r^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{2}r$，答案相同）。

(4).強盜甲及強盜乙二人要分搶來的 100 個金幣，他們分贓的方法如下：每次由強盜甲抓一把金幣，並如實地報出金幣的數量，然後由強盜乙決定這一把金幣歸誰所有，這樣繼續下去，直到當中有一人得九次為止，所剩的金幣歸另一人所有(依照這樣的分法也有可能沒人分到九次，金幣就分完了)，強盜甲每次可按照自己的策略抓取若干個金幣。無論強盜乙如何決定，問強盜甲保證最多可以得到幾個金幣(除寫出答案外，請詳述強盜甲之策略，並證明他無法保證得到更多)？(七分)

小淳：這一題讓我想到媽媽處理我和姊姊爭蛋糕的情形。媽媽總是要分蛋糕的人後拿。分蛋糕的人必須要公平，否則吃虧的人是自己。但是這一題太難了。

小承：非常好，這一題觀念差不多。分金幣的強盜必須要公平，否則吃虧的人是自己。強盜乙的策略：只要強盜甲抓金幣的個數 ≥ 6，則強盜乙就分配給自己，否則分配給強盜甲。在上述強盜乙的策略下強盜甲可分得的金幣：

(i) 如果先分配給強盜乙 9 次，則強盜乙至少可分到 $6\times 9=54$ 個金幣。

(ii)如果先分配給強盜甲 9 次，則強盜甲至多分到 $5\times 9=45$ 個金幣。所以強盜甲最多分到不超過 46 個金幣。

強盜甲知道強盜乙聰明，分金幣的強盜必須要公平，分金幣直到當中有一人得九次為止，所以強盜甲的策略是把 100 個金幣分 17 次抓，每次儘量抓一樣多。也就是說: 甲抓 16 次 6 個金幣，1 次 4 個金幣，在強盜甲策略下

(i) 如果先分配給強盜乙 9 次，則強盜乙至多分到 $6\times 9=54$ 個金幣。

(ii)如果先分配給強盜甲 9 次，則強盜甲至少分到 $6\times 8+4=52$ 個金幣。

所以強盜甲最少分到 46 個金幣。

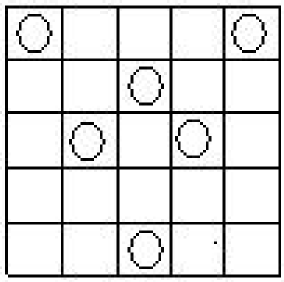
因此強盜甲保證最多可以得到 46 個金幣。

(5).在 5×5 的棋盤上，最多可以放置多少個西洋棋的“騎士”，使得每只棋子都恰可攻擊其它二個“騎士”(請繪出其配置圖，在符合題目所給條件下，試證：不可能放置更多的“騎士”)？(註：騎士在棋盤上可攻擊的位置為橫二縱一或橫一縱二的位置。) (七分)

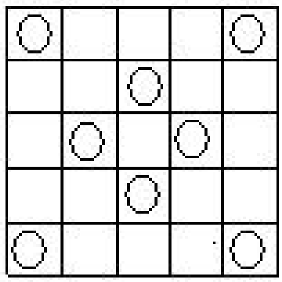
小淳：我可放置 6 個西洋棋的騎士，使得每只棋子都恰可攻擊其它二個騎士，配置圖如圖(一)。

小君：我可放置 8 個西洋棋的騎士，使得每只棋子都恰可攻擊其它二個騎士，配置圖如圖(二)。

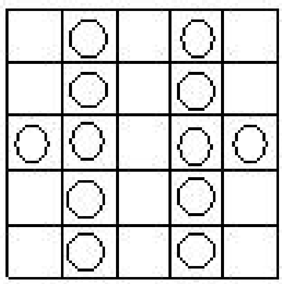
(一)



(二)



(三)



小承：我可放置 12 個西洋棋的騎士，使得每只棋子都恰可攻擊其它二個騎士，配置圖如圖(三)。但是我不知道最多市是否只可以放置 12 個騎士，也不會

證明。

紹倫: 我會證明最多可放置 16 個，配置圖如圖(四)。

證明：首先將棋盤塗成黑白相間，如圖(五)，由圖可看出在黑點的騎士只能攻擊白點的騎士，在白點的騎士只能攻擊在黑點的騎士。設在黑點的騎士有 k 個，由一個騎士可攻兩個騎士知被攻擊的白點有 $2k$ 個，但每個白點的騎士可攻兩人，即被兩人攻擊，故白點有 $\frac{1}{2}\cdot 2k = k$ 個。即在黑點的騎士數等於在白點的騎士數。

假如角落 x 有騎士，如圖(六)，顯然 a_1、a_2 的位置必有騎士，當 a_1、a_2 有騎士時，圖中標識 Δ 的點就可能有騎士，但 a_1、a_2 已與 x 有關，故 9 個標識 Δ 的位置中最多只有兩個騎士，其餘 7 個不能有騎士，即 7 個黑點沒有騎士，有騎士的黑點最多為 13-7=6 個，又白點 = 黑點，故所有騎士最多為 6+6=12＜16。

假設中心點 y 有騎士，如圖(七)，則所有標識 Δ 的位置都可能有騎士，但 y 只能與兩個騎士有關，故 Δ 中有 8-2=6 個點沒有騎士，有騎士的白點至多為 12-6=6，又白點 = 黑點，所有騎士至多為 6+6=12＜16。

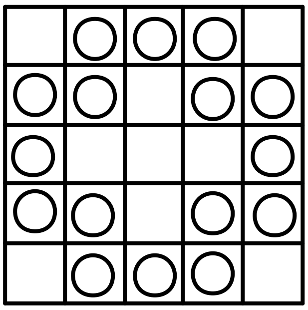
由(1)(2)可知角落與中心點如果有騎士，則所有騎士數小於 16，因此四個角落與中心點沒有騎士，黑點剩下 13-4-1=8，所有騎士最多為 8+8=16。

小淳、小君、小地、小承：哇！ 紹倫，你好聰明。作法好難喔 ！

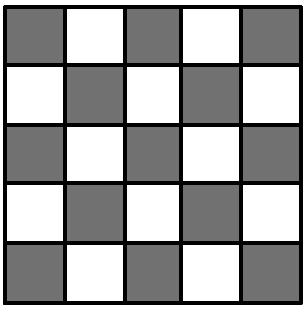
紹倫：謝謝你們誇獎！ 只要有耐心，慢慢推導就出來了。

(本解答為永吉國中一年級黃紹倫之解答；該解答榮獲國中組最佳解題獎)

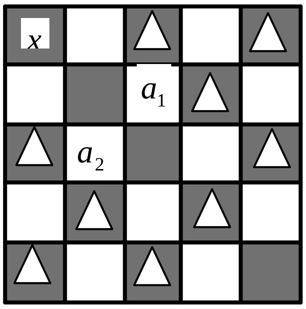
(四)



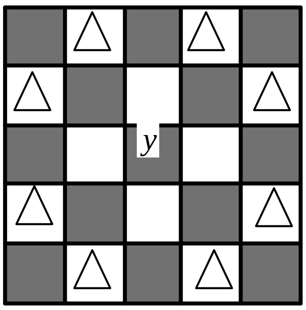
(五)



(六)



(七)



(6).某次棋賽中，參賽者恰好和其它每位參賽者比賽一次。規定每局勝者得一分，敗者得 0 分；平手各得 0.5 分。賽程全部結束後，我們稱“爆冷門”的賽局為總得分高者竟然輸給總得分低者。試證：無論比賽的結果如何，“爆冷門”的賽局局數小於全部賽局總數的 $\frac{3}{4}$。(十分)

小承：設 $2n$ 個參賽者的得分依高低排序為 $a_1 \ge a_2 \ge \cdots \ge a_n \ge a_{n+1} \ge \cdots \ge a_{2n}$。

$\forall 1 \le i \le n$，第 i 個人的 $2n-1$ 場比賽中，至少有 $a_i-(i-1)$ 場不爆冷門。

$\forall 1 \le j \le n$，第 $n+j$ 個人的 $2n-1$ 場比賽中，至少有 $(2n-1-a_j)-(n-j)$ 場不爆冷門。所有比賽中，不爆冷門的場數至少有

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[a_i-(i-1)\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[(2n-1-a_{n+j})-(n-j)\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{n^2+\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{n+i})\right\} \ge \frac{n^2}{2}$$

所以至少有 $\frac{n^2}{2} \div \binom{2n}{2} = \frac{n}{2(2n-1)} \ge \frac{1}{4}$ 場賽局不爆冷門。因此“爆冷門”的賽局局數小於全部賽局總數的 $\frac{3}{4}$

小君：我聽不懂！

小承：因為規定每局勝者得一分，敗者得 0 分；平手各得 0.5 分。$\forall 1 \le i \le n$，第 i 個人得 a_i 分，所以第 i 個人獲勝或平手的比賽場數至少 a_i 場，而這 a_i 場中，第 i 個人勝第 j 個人，$1 \le j < i$，才是爆冷門。因此至少有 $a_i-(i-1)$ 場不爆冷門。同樣道理，對於 $\forall 1 \le j \le n$，第 $n+j$ 個人得 a_{n+j} 分，所以第 $n+j$ 個人失敗或平手的比賽場數至少 $(2n-1-a_{n+j})$ 場，而這 $(2n-1-a_{n+j})$ 場中，第 $n+j$ 個人輸給第 $n+k$ 個人，$1 \le j < k$，才是爆冷門。因此至少有 $(2n-1-a_{n+j})-(n-j)$ 場不爆冷門。比賽一次都有二個人參加，所以不爆冷門的場數是每個人比賽中所有不爆冷門的場數之總數一半。因此不爆冷門的場數是

$$\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[a_i-(i-1)\right]+\sum_{j=1}^{n}\left[(2n-1-a_{n+j})-(n-j)\right]\right\}$$

。

再下去的計算就一樣了。

小君：謝謝！我懂了。

作者註：環球城市數學競賽，慣例主辦單位不公佈答案，由各城市承辦單位自行閱卷。其中有些題具有挑戰性而難度很高，適合資優中學生加以推廣，進一步分析和研究。