神奇的數字 9

許介彥
大葉大學　通訊與計算機工程學系

下面的式子中，A 代表了某一個阿拉伯數字，請於一分鐘內，在不能使用計算機的條件下，設法求出 A 的值：

$$386A5961 = (3 \times (2066 + A))^2$$

一個不可能的任務？不，只要懂得應用我們在小學學過的一些關於整數的性質，A 的值真的可以很快求出。我們在小學都學過，要判斷一個整數是否是 9 的倍數，只要將該數的每個位數相加，所得的結果如果是 9 的倍數，原來的數就一定是 9 的倍數。舉例來說，要判斷 57132 是不是 9 的倍數，我們只需計算$(5 + 7 + 1 + 3 + 2) = 18$，由於 18 是 9 的倍數，因此 57132 一定是 9 的倍數。請讀者再回頭想想，這個性質對解決我們一開始的問題有沒有幫助呢？

答案當然是肯定的，因為上式的等號右邊可以被 9 整除，因此等號左邊的數一定是 9 的倍數，也就是說，$(3 + 8 + 6 + A + 5 + 9 + 6 + 1) = (38 + A)$一定是 9 的倍數；如果上式是對的，那麼 A 一定等於 $45 - 38 = 7$。

數字 9 的上述性質其實只是一個更廣泛的性質的特例，這個更廣泛的性質是：任意一個整數除以 9 的餘數必定等於該數的各個位數相加的結果除以 9 的餘數。舉例來說，385 除以 9 的餘數為 7，而 $3 + 8 + 5 = 16$，16 除以 9 的餘數也是 7。

為什麼會這樣？

要解釋 9 具有這個特性的原因，必須對整數的某些性質有基本的瞭解。

「數論」（Number Theory）是數學的一個分支，專門研究整數的性質；數論裡面關於整數的一個基本的運算是「模」（mod）。簡單地說，如果 a 是一個整數且 n 是一個正整數，$a \bmod n$ 的值就是 a 除以 n 的餘數，其值必須大於或等於 0 而且小於 n。

舉例來說，$40 \bmod 17 = 6$，因為 $40 = 2 \times 17 + 6$；而 $-40 \bmod 17 = 11$，因為 $-40 = -3 \times 17 + 11$。

如果兩個整數 a 與 b 除以 n 所得的餘數相同，我們常將 a 與 b 的關係記為 $a \equiv_n b$，例如：$17 \equiv_5 7$，因為 17 與 7 除以 5 的餘數都是 2，而 $20 \equiv_{14} 76$，因為 20 與 76 除以 14 的餘數都是 6。讀者也許已經注意到，如果 $a \equiv_n b$，那麼 a 與 b 相減的結果一定是 n 的倍數；反之亦然。

整數的算術運算具有如下的性質：對任意整數 a 與 b 及正整數 n，a 與 b 相加的結果除以 n 的餘數必定會等於將 a 與 b 先分別除

以 n 所得的餘數相加的結果再除以 n 的餘數；也就是說，

$(a + b) \bmod n = ((a \bmod n) + (b \bmod n)) \bmod n$

當然，如果上式成立，下面的關係也會成立：

$$(a + b) \equiv_n (a \bmod n) + (b \bmod n)$$

除了相加以外，這個性質其實也適用於相減及相乘，也就是上式的兩個加號可以同時換成兩個減號或是兩個乘號。舉例來說，

$59 \bmod 8 = 3$

$87 \bmod 8 = 7$

$(59 + 87) \bmod 8 = 146 \bmod 8 = 2$

而$(3 + 7) \bmod 8$的結果也是 2。再舉個例子，如果我們想知道$48 \times 75 \times 94$除以7的餘數是多少，我們並不需要真的將此三數的乘積算出，只需將此三數分別除以 7 的餘數相乘再除以 7 取餘數即可，也就是可以這麼算：

$((48 \bmod 7) \times (75 \bmod 7) \times (94 \bmod 7)) \bmod 7$
$= (6 \times 5 \times 3) \bmod 7 = 90 \bmod 7 = 6$。

有了以上的認識，數字 9 的特殊性質就不難解釋了。首先，我們知道

$10 \equiv_9 1$

由此推得

$10^2 \equiv_9 (10 \bmod 9) \times (10 \bmod 9) \equiv_9 1$

$10^3 \equiv_9 (10 \bmod 9) \times (10^2 \bmod 9) \equiv_9 1$

$\vdots$

因此只要 y 是一個正整數，$10^y \equiv_9 1$，而且，只要 a 是一個正整數，$a \cdot 10^y \equiv_9 a$。

任意一個整數 $z = (a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_{10}$都可以表示成 10 的冪級數：

$$z = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n \cdot 10^n$$

而我們知道

$$\begin{aligned} a_0 &\equiv_9 a_0 \\ a_1 \cdot 10 &\equiv_9 a_1 \\ a_2 \cdot 10^2 &\equiv_9 a_2 \\ &\vdots \\ a_n \cdot 10^n &\equiv_9 a_n \end{aligned}$$

如果將以上各式相加，得

$$z \equiv_9 a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

因此，z 除以 9 的餘數與將 z 的各個位數相加的結果除以 9 的餘數是一樣的，這也就是我們熟悉的性質。

在電腦還不普遍的年代，數字 9 的這個特性提供了常需做數字計算的人員一個便捷的檢查計算結果的方法。舉例來說，如果我們計算(135273 + 261909 + 522044)的和：

$$\begin{array}{r} 135273 \\ 261909 \\ +\,522044 \\ \hline 919226 \end{array}$$

我們可以透過將三個數分別除以 9 的餘數相加來驗證上面的計算的正確性：

$$\begin{array}{rl} 135273 & \equiv_9 3 \\ 261909 & \equiv_9 0 \\ +\,522044 & \equiv_9 8 \\ \hline 919226 & \equiv_9 2 \end{array}$$

由於$(3 + 0 + 8) \equiv_9 2$，因此增強了我們對 919226 是正確答案的信心。

再以乘法為例：

$$\begin{array}{rl} 5327 & \equiv_9 8 \\ \times\ \ 659 & \equiv_9 2 \\ \hline 47943 & \\ 26635 & \\ 31962 & \\ \hline 3510493 & \equiv_9 7 \end{array}$$

由於$(8 \times 2) \equiv_9 7$，因此相乘的結果 3501493 有可能是對的。

當然，計算結果能通過這樣的檢查並不保証結果就一定正確，但是如果通不過就肯

定有問題了；因此這個技巧讓我們只花少量而簡單的計算就能為計算結果的正確性加上一層保障，相當實用。

幾個有趣的表

下表雖然一眼看來非常奇怪，不過如果您仔細檢驗，會發覺這些關係確實存在：

$$1 \times 9 + 2 = 11$$
$$12 \times 9 + 3 = 111$$
$$123 \times 9 + 4 = 1111$$
$$1234 \times 9 + 5 = 11111$$
$$12345 \times 9 + 6 = 111111$$
$$123456 \times 9 + 7 = 1111111$$
$$1234567 \times 9 + 8 = 11111111$$
$$12345678 \times 9 + 9 = 111111111$$
$$123456789 \times 9 + 10 = 1111111111$$

為什麼會這樣？如果您將整數以 10 **的冪級數表示就清楚了。舉例來說，上表的第** n **列的等號左邊相當於**

$$10^{n-1} + 2 \cdot 10^{n-2} + 3 \cdot 10^{n-3} + \ldots + n) \times (10-1) + (n+1)$$

經過乘開及化簡後，上式等於

$$\begin{aligned} & 10^{n} + 10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1 \\ = \quad & (10^{n+1} - 1)/9 \end{aligned}$$

由此可知表中的等號右邊為什麼會是一個全部由數字 1 **組成的**$(n+1)$**位數。**

以下是另一個有趣的表：

$$9 \times 9 + 7 = 88$$
$$98 \times 9 + 6 = 888$$
$$987 \times 9 + 5 = 8888$$
$$9876 \times 9 + 4 = 88888$$
$$98765 \times 9 + 3 = 888888$$
$$987654 \times 9 + 2 = 8888888$$
$$9876543 \times 9 + 1 = 88888888$$
$$98765432 \times 9 + 0 = 888888888$$

理由同樣簡單。上表等號左邊的一般式為

$$(9 \cdot 10^{n-1} + 8 \cdot 10^{n-2} + 7 \cdot 10^{n-3} + \ldots + (10-n)) \times (10-1) + (8-n)$$

經過乘開及化簡後，上式等於

$$\begin{aligned} & 9 \cdot 10^{n} - (10^{n-1} + 10^{n-2} + \ldots + 10 + 1) - 1 \\ = \quad & 8(10^{n+1} - 1)/9 \end{aligned}$$

由於$(10^{n+1}-1)/9$**是完全由數字** 1 **組成的數字，上表的等號右邊因此是完全由數字** 8 **組成的數字。**

以下是另一個有趣的表：

$$12345679 \times 9 = 111111111$$
$$12345679 \times 18 = 222222222$$
$$12345679 \times 27 = 333333333$$
$$12345679 \times 36 = 444444444$$
$$12345679 \times 45 = 555555555$$
$$12345679 \times 54 = 666666666$$
$$12345679 \times 63 = 777777777$$
$$12345679 \times 72 = 888888888$$
$$12345679 \times 81 = 999999999$$

上表中的 12345679 **等於**$(10^9-1)/81$**，因此當此數乘上一個** 9 **的倍數（例如** $9K$**），結果將是**

$$\begin{aligned} & 9K(10^9-1)/81 = K(10^9-1)/9 \\ = \quad & K(111111111) \end{aligned}$$

看了以上三個表，如果讀者覺得還不過癮的話，請自己試試看是否能找出下表中的規律是什麼道理：

$$1 \times 8 + 1 = 9$$
$$12 \times 8 + 2 = 98$$
$$123 \times 8 + 3 = 987$$

$$1234 \times 8 + 4 = 9876$$
$$12345 \times 8 + 5 = 98765$$
$$123456 \times 8 + 6 = 987654$$
$$1234567 \times 8 + 7 = 9876543$$
$$12345678 \times 8 + 8 = 98765432$$
$$123456789 \times 8 + 9 = 987654321$$

猜數字的魔術

許多與數字有關的魔術或謎題都是根據數字 9 的特殊性質發展而來；以下我們來看兩個「魔術」。

一、猜中被拿掉的數字

請你的一位朋友在一張紙上隨意寫下一個位數至少有三位的整數，這個數是多少只有他自己知道；然後請他告訴你這個數除以 9 的餘數是多少，接著請他將紙上的數的某個不是 0 的數字拿掉（如：8435 拿掉 4 得 835），然後將剩下的數除以 9 的餘數告訴你，這時候你馬上可以指出被他拿掉的阿拉伯數字是多少。

你的做法是將你的朋友告訴你的兩個數相減。如果他告訴你的前一個數比後一個數大，被拿掉的阿拉伯數字就是前數減去後數的結果。如果前數比後數小，被拿掉的阿拉伯數字就是前數加 9 再減去後數的結果。如果前數與後數相等，被拿掉的阿拉伯數字就是 9。

舉例來說，如果原來的數除以 9 的餘數為 7 而被拿掉一個數字後除以 9 的餘數為 2，那麼被拿掉的數字一定是(7 – 2) = 5；如果原數除以 9 餘 2 而被拿掉一個數字後除以 9 的餘數為 7，那麼被拿掉的數字一定是 9 + 2 – 7 = 4，也就是(2 – 7) mod 9 的值。

讀者應當不難看出其中的道理，因為任何一個整數除以 9 的餘數都等於該數的各個位數相加的結果除以 9 的餘數，因此某數被拿掉一個數字之前與之後除以 9 的餘數當然與被掉的數字有非常直接的關係。

二、猜中兩數的差

請你的朋友在心中想好一個三位數，此三位數的個位數和百位數不能相同，然後請他將該數與將該數前後翻轉所得的新數相減（大數減去小數，如：613 – 316 = 297），然後告訴你相減結果的個位數是多少，這時候你馬上可以指出相減結果的十位數和百位數各是多少。

其中的道理亦不難。首先，將一個三位數前後翻轉其實就是將個位數與百位數對調，因此翻轉之前與之後的兩個數的十位數會是同一個數字。另一方面，既然是大數減去小數，大數的百位數比小數的百位數大，因此大數的個位數會比小數的個位數小，相減時個位數必須向十位數借位，因此，相減結果的十位數可以肯定一定是 9。

由於任何一個整數除以 9 的餘數都等於該數的各個位數相加的結果除以 9 的餘數，而一個整數前後翻轉所得的新數的各個位數相加的結果與原數相比並不會改變，因此翻轉之前與之後的兩個數除以 9 的餘數一定相同，由此可知兩數相減的結果一定是 9 的倍數，也就是說，相減所得的數的各個位數相加的結果一定會是 9 的倍數。

既然相減的結果的十位數已經知道是 9，個位數與百位數相加必定會等於 9，而由於個位數已被告知，因此只要將 9 減去個位數就得到百位數了。

參考資料

1. **許介彥**（2001），**推理大考驗**，**俊傑書局**。
2. Henry E. Dudeney, *Amusements in Mathematics*, New York, Dover, 1970.
3. David Wells, *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, London, Penguin Books, 1997.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw