數學解題中「虛與實」的思考

許建銘
高雄市立龍華國民中學

一、前言：

有一個「頭腦體操」的問題：大小兩幅正方形的畫，大幅的面積是小幅的四倍。小幅的畫剛好可以嵌入畫框(如圖 1-1)的點方孔內，如欲將此畫框切開，做出能使大小兩幅畫都可以嵌入的兩個畫框，應該怎麼做？

上面的問題曾經考倒不少年輕學生，而答案是沿著點狀線(如圖 1-2) 切開，就可以得到兩個畫框(如圖 1-3)。

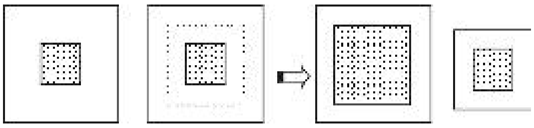
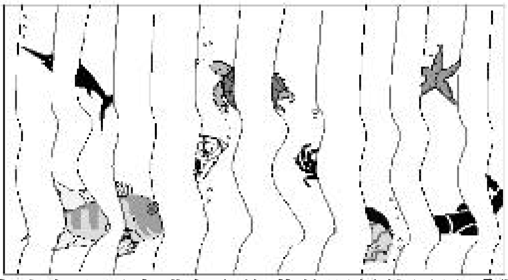


圖 1-1　　圖 1-2　　圖 1-3

人們會對自己身處的周遭環境或事物，以一些用語形容如：「真假不明」、「是非不分」、「虛實難辨」。其實，在數學的解題世界裏，「真假」是絕對的、客觀的，它是邏輯推論與運思轉換的「是非」判定依據。

而「虛實」是相對的、主觀的，它可以被認定成某一完整思考的一體兩面，而這兩面可能互斥對立，可能互有包含包容，更可以有真假和正反。若僅以解題的思考角度而論，「虛實相依」可能是佈題者的精心傑作，也可能是解題者的策略規劃。我約略記得一個思考性問題：在扶搖茂盛的海藻間，有各式魚類穿梭其中，但圖中有一個嚴重錯誤，請讀者儘快將它找出來。



左上角那尾尖嘴魚和海藻的關係位置是「與眾不同」的，您看出來了嗎？

二、本文：

(一)國中數學課本：「生活中的平面圖形」中有一題十字形剪拼成正方形的問題。

我在上這個問題時，補充兩個相關問題讓同學當成假日作業思考：

問題一：請用兩種方式將以下的圖形(如圖 2-1) 只剪一次，拼出一個十字形。

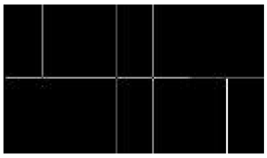


圖 2-1

解答：如圖 2-2 與 2-3，沿虛線剪開再拼合就可以了，大部分學生只想出圖 2-2 的剪拼法。

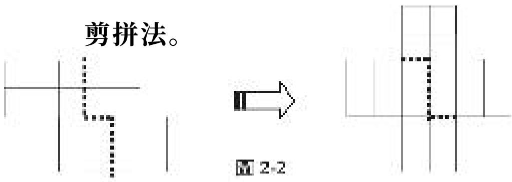


圖 2-2

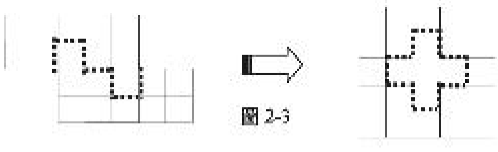


圖 2-3

問題二：從十字形中可否同時剪拼出正方形與十字形各一個的圖形？

解答：如圖 2-4 與 2-5 皆可，只要沿虛線剪開再拼合就可以了。

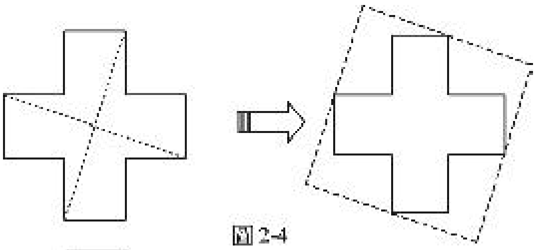


圖 2-4

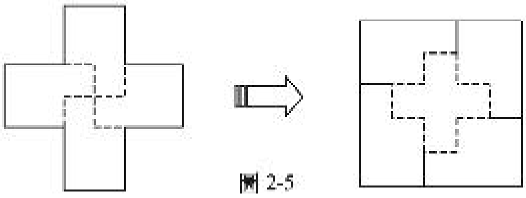


圖 2-5

(二)或許是出題者有心，也可能是解題者不小心，於是我們常常可以見到解題者輕易追逐題意的強勢波流，而深陷「擇善固執」的漩渦。如果可以讓心沉靜一下，思慮「虛實相依」的萬物通則和「大事化小」的解題原則，就可能有意想不到的巧思妙解。

以下三個數學問題的解題中，一些解法可能就是因為解題者自迷於「酒、色、財」而錯失「眼明手快」和「四兩撥千斤」的例子，提供給讀者作為參考。

問題三：10 公升的純酒精，倒出 1 公升後加水 1 公升；再倒出 1 公升後加入水 1 公升，如此重覆倒出 1 公升後加水 1 公升的動作共作 5 次，問總共倒掉多少公升的酒精？

解一：著眼於每次倒掉的酒精成等比級數的算式：

$$S_5 = 10\times\frac{1}{10}+10\times\frac{9}{10}\times\frac{1}{10}+10\times\left(\frac{9}{10}\right)^2\times\frac{1}{10}+10\times\left(\frac{9}{10}\right)^3\times\frac{1}{10}+10\times\left(\frac{9}{10}\right)^4\times\frac{1}{10}$$

$$=10\times\frac{1}{10}\times\left[1+\frac{9}{10}+\left(\frac{9}{10}\right)^2+\left(\frac{9}{10}\right)^3+\left(\frac{9}{10}\right)^4\right]$$

$$=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{9}{10}\right)^5\right]}{1-\frac{9}{10}}$$

$$=10\times\left(1-\frac{59049}{100000}\right)=10\times\frac{40951}{100000}=\frac{40951}{10000}\ (\text{公升})$$

解二：著眼於每次倒掉 1 公升後剩下酒精成等比數列的算式：

$$a_5=10\times\left(\frac{9}{10}\right)^5=\frac{59049}{10000}$$

所以共倒掉酒精

$$10-\frac{59049}{10000}=\frac{40951}{10000}\ (\text{公升})$$

問題四：一個面積為 1 的正三角形，將其三邊中點連成一正三角形並將內部塗黑，再將另三個內部未塗黑的正三角形的三邊中點連成一正三角形並將內部塗黑，又將九個內部未塗黑的正三角形的三邊中點連成一正三角形並將內部塗黑(如圖 2-6)，若再重覆以上動作兩次(即共作 5 次)，求最後塗黑的三角形面積總和？

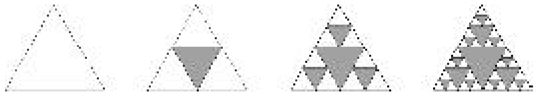


圖 2-6

解一：著眼於黑色三角形的總面積成等比級數的算式：

$$S_5=\frac{1}{4}+3\times\left(\frac{1}{4}\right)^2+3^2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3+3^3\times\left(\frac{1}{4}\right)^4+3^4\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\times\left[1-\left(\frac{3}{4}\right)^5\right]}{1-\frac{3}{4}}=1-\frac{243}{1024}=\frac{781}{1024}$$

解二：著眼於白色三角形的總面積成等比數列的算式：

$$a_5=1\times\left(\frac{3}{4}\right)^5=\frac{243}{1024}$$

所以黑色三角形的總面積為

$$1-\frac{243}{1024}=\frac{781}{1024}$$

問題五：請將 18 個硬幣放入 4 × 6 格的方格紙上，且每格最多放一個，且使每列和每行的硬幣數皆是偶數。(只要找出一個解就可以了)

解答：若從 18 個硬幣去想，恐怕真的要拿硬幣來試。如果從 6 個空格不放硬幣的方向去想，問題便簡單多了：4 列和 6 行都有偶數個空格，每列每行的硬幣數要偶數，所以每列每行都必須有偶數個空格不放硬幣，所以只要在圖 2-7 作「 ×」號以外的每個空格中各放一個硬幣就可以了。

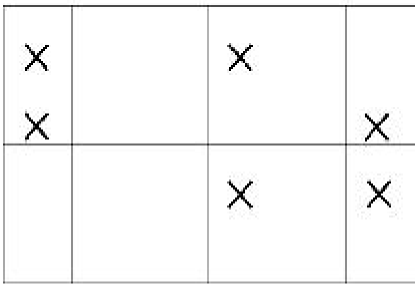


圖 2-7

(三)課堂中我發給每位學生一張 A-4 的白紙，並提示學生先摺出較長的一條中心線，然後再與學生共同討論如何用較少的摺痕線，在矩形紙上找出一個正三角形，並且試著說明摺法的正確性。

1. 大部分學生可以摺出或說明以如下步驟(用 4 條摺痕線)找出的三角形為正三角形(如圖 2-8)：

(1)摺出中心線 $\overline{MN}$。

(2)將 B 點摺疊到 $\overline{MN}$ 上，並使摺痕線為 $\overline{CE}$ (即通過 C 點)。

(3)以 $\overline{B'C}$ 的紙緣，摺出摺痕線 $\overline{CF}$。

(4)將紙攤開。

(5)摺出過 B 和 B' 的摺痕線 $\overline{BG}$，則 $\Delta B'BC$ 與 $\Delta B'FG$ 皆為正三角形。

說明：因為 $\overline{BC}=\overline{B'C}$，且 $\overline{MN}$ 為 $\overline{BC}$ 的中垂線，$\therefore\ \overline{B'B}=\overline{B'C}\ \Rightarrow\ \overline{B'B}=\overline{B'C}=\overline{BC}\ \therefore\ \Delta B'BC$ 為正三角形。由 $\overline{AD}\ /\!/\ \overline{BC}\Rightarrow \Delta B'FG\sim\Delta B'CB\ \therefore\ \Delta B'FG$ 為正三角形。

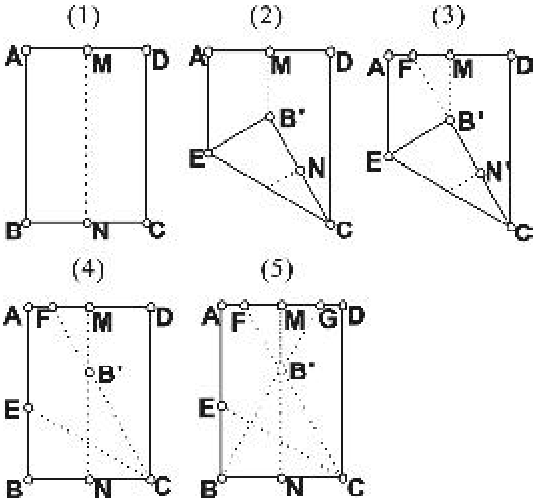


圖 2-8

2. 若把問題的相關要素由紙的本身擴展至紙以外的部份，意即認為問題的整體環境並非只有一張紙，由虛與實「如影隨形」所擴充出來的觀念與條件，將會使摺痕線數量減少至 3 條而找到正三角形，然而這種操作解題的能力，大多數國中生是乏善可陳且缺少訓練的。以下的說明，即先對圖 2-8-(2)作「虛實相依」的環境分析(如圖 2-9)，然後列舉的四種摺法(如圖 2-10~2-13)，即

再摺 1 條摺痕線就可找出正三角形的方法：

說明：因為$\overline{CN}=\frac{1}{2}\overline{BC}=\frac{1}{2}\overline{B'C}$， $\angle B'NC=90°$

$\therefore \angle NB'C=30°$， $\angle B'CN=30°$ 又 $\angle EB'C=90°$

$\Rightarrow \angle EB'P=60°$， $\angle B'CE=\angle BCE=\frac{1}{2}\times\angle B'CN$

$=30°\Rightarrow\angle B'EC=60°$，$\angle BEC=60°$，$CPN'=60°$

， $\angle ECD=60°$

以下(1)~(4)的摺法皆用 3 條摺痕線找出了正三角形：

(1)以$\overline{MP}$ 的摺痕摺出摺痕線$\overline{B'P}$，則$\Delta B'EP$ 為正三角形(如圖 2-10)。

(2)以$\overline{B'E}$ 的紙線摺出摺痕線$\overline{EF}$，則ΔFEC 為正三角形(如圖 2-11)。

(3)以$\overline{PN'}$ 的摺痕摺出摺痕線$\overline{PQ}$，則ΔPQC 為正三角形(如圖 2-12)。

(4)將圖 2-8-(2)的紙攤平，摺出過 B 和 P 的摺痕線$\overline{BR}$，則ΔBPE 與ΔCPR 皆為正三角形(如圖 2-13)。

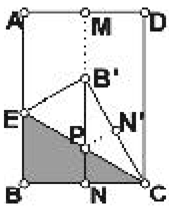


圖 2-9

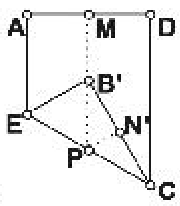


圖 2-10

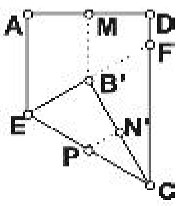


圖 2-11

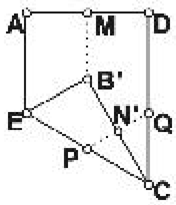


圖 2-12

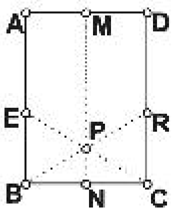


圖 2-13

(四)讓我們來看看最後一道問題以及甲、乙兩位老師的解答過程：

問 題：求 $(0.5)^1+(0.5)^2+(0.5)^3+(0.5)^4+(0.5)^5$ 的值。

甲師解答：目前尚未學到「等比級數」公式，所以只好慢慢通分：

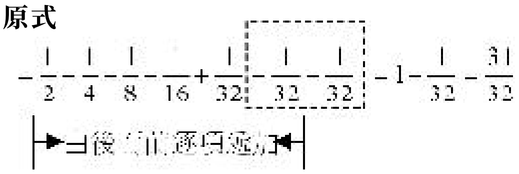
原式$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

乙師解答：這個問題可以先轉換成分數再通分：

原式$=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}=\frac{16}{32}+\frac{8}{32}+\frac{4}{32}+\frac{2}{32}+\frac{1}{32}=\frac{31}{32}$

但我們發現原式的任一後項都是其前項的一半，所以也可以這樣算：

原式



三、結語：

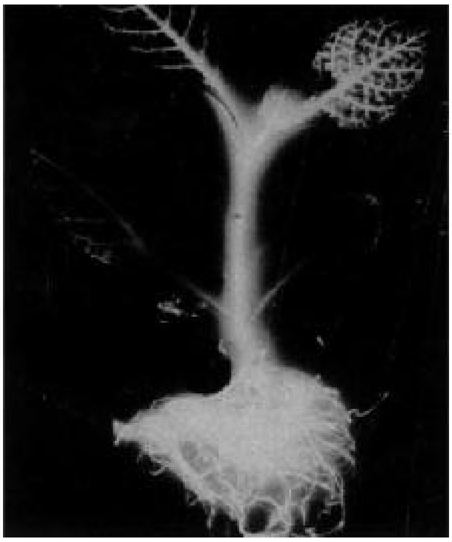
有一句閩南俗話說：「有山就有水，有神就有鬼；有天就有地，有高就有低；有黑就有白，有長就有短……」意謂天地間萬事萬物都存在著相生相剋的一體兩面，而人們也可能隨著不同時空去賦予不同的意義解釋與評價。就如同以前傳統市場裡，或許會聽到一些婆婆媽媽嫌說：「這種菜怎麼生那麼醜，葉子一個洞一個洞！」可是這種連蟲都敢吃，保證無農藥的蔬菜，現在卻是許多菜籃族的最愛。

台灣的中學數學教育，長期過度重視以紙筆測驗為導向之應考能力的培訓教學，而忽略學生「活學活用」的數學思維能力的啟發養成。「九年一貫」的教育理念是新時代中不可逆轉的教育思潮，也是「尊重思考」的民

主、人性教育觀，更值得所有關心教育的大眾支持肯定，並期待在漸進革新的環節上集思廣益，群策群力，使教改能更理性而成功。

在數學教學上，教學者不須刻意為解題冠上各式奇招怪名，也不必在過程中作太多華麗而空洞的解釋，因為這樣反而容易遮掩學生想像與思考的空間，甚至誤導學生錯誤的學習觀念。既然學習數學可以增進解決問題的能力，並提升面對問題的情意，那麼何不「隨心教育」學生看待事物「虛虛實實」的寬宏氣度，以啟迪他們更多元的生活智慧。

(上承第 37 頁)



(b)夜間發光之菸草(取自美國時代雜誌,No.46,Nov.47,Nov.17,1986 P46)

(圖三)　科學家巴契爾手中的基因改造鼠之生物發光(由德國攝影師麥克斯與歐塔娃伉儷所拍攝)(美聯社)