

雷射對細線繞射的探討

*劉威志 **徐國誠

*國立臺灣師範大學 物理系

**臺北市立成淵高級中學

在高中物理教材裡面，有提到單狹縫繞射，以夫朗和斐繞射(Fraunhofer diffraction)的觀點來看，單狹縫繞射圖形的中央亮紋寬度是其他亮紋寬度的二倍，且中央亮紋寬度 $D = 2 \frac{r\lambda}{b}$ ， b 是狹縫的寬度， r 是狹縫到螢幕的距離。如果我們以已知波長的光源作繞射實驗，只需測量 D 和 r ，便可以求得狹縫的寬度 $b = 2 \frac{r\lambda}{D}$ 。

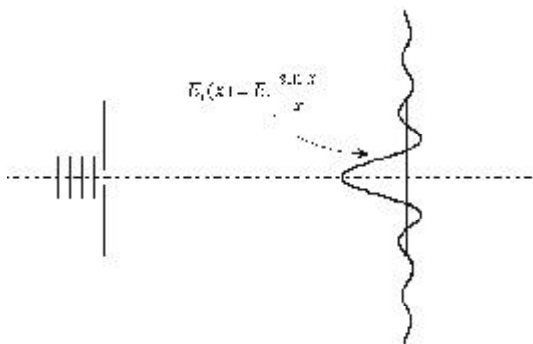


圖 1. 光通過狹縫到遠處螢幕上的電場分布

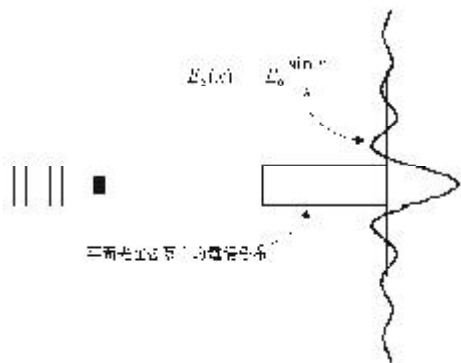


圖 2. 平面光通過細線後在螢幕上的電場分布

若我們做另外一種繞射實驗，就是將狹縫遮住，而讓原本被遮住的光通過，所得到的繞射圖形是否與原來的完全相同？答案似乎是肯定的，我們以平面波通過狹縫來說明：

1. 光通過狹縫到遠處螢幕上的電場函數分布是 $E_1(x) = E_0 \frac{\sin x}{x}$ ，如圖 1。
2. 將狹縫遮住，而讓原本被遮住的光通過，以波的重疊原理來看，在遠處螢幕上的電場分布應該是 $E_2(x) = -E_1(x) = -E_0 \frac{\sin x}{x}$ ，加上整個平面光到達螢幕的分布範圍，如圖 2。
3. 只要整個平面光到達螢幕的分布範圍，小於 $E_2(x)$ 的中央極值範圍，則繞射條紋的位置完全不改變，與原來的單狹縫繞射圖形幾乎一樣(Babinet's principle，註 1)。

我們以 He-Ne 雷射照射細長導線或頭髮(如圖 3)，預期在遠處螢幕上會產生一繞射圖形，與一相同寬度之單狹縫的繞射圖形相同，以 $b = 2 \frac{r\lambda}{D}$ 的式子就可以測出導線或頭髮的截面直徑。不過實地做了實驗之後，卻發現與預期的結果不盡相同。我們見圖 4 和圖 5，是實驗所做出來的繞射圖形，應該是一個單狹縫的繞射圖；但是在中央極大的地方，細導線沒有很明確的中央亮紋，頭髮雖然可以看出中央亮紋的所在，但在最中央的部

分，出現了一個環形的暗線。

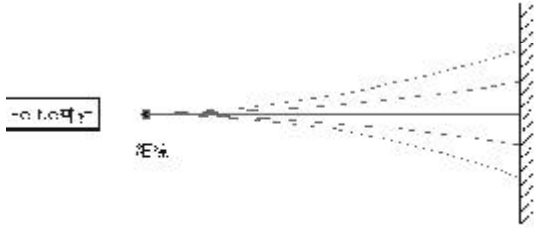


圖 3. 實驗簡圖

為了了解這些原因，後來將導線和頭髮移開，重新檢視雷射光的位置，才發現上述現象(中央亮紋部分出現了暗線)是因為雷射光和 $E_2(x)$ 干涉所造成的結果(在圖 6 和圖 7 有圈出雷射光在遠處螢幕上的位置所在)。前面我們以平面光通過狹縫來解釋繞射現象，但是雷射並不是平面光，雷射是光線在共振腔內多次反射之後所形成的高斯光束，也就是雷射光束的截面的強度分布約呈高斯分布(Gaussian distribution)，所以中央的光強度比外圍強；其電場為強度的平方根，因此電場亦為高斯分布。既然雷射不是平面光，所以雷射光在遠處螢幕上的電場函數分布，就不是均勻的，所以和 $E_2(x)$ 重疊時，就可能會出現完全抵消的情況，因而會出現像頭髮的繞射圖形一樣，在中央亮紋的部分，出現了一個環形的暗線。



圖 4. 細導線的繞射圖形



圖 5. 頭髮的繞射圖形



圖 6. 細導線繞射圖與雷射光在螢幕上的範圍



圖 7. 頭髮的繞射圖與雷射光在螢幕上的範圍

在圖 8 以細導線為例子，將雷射的高斯光束與 $E_2(x)$ 重疊相加後，就成為兩者干涉後的電場分布函數；取電場分布函數的平方值就成為二者干涉後的相對強度，再底下則是對應於相對強度圖的繞射圖形。圖中也指出中央亮紋範圍內出現了兩條暗線，則是上述的高斯光束與 $E_2(x)$ 做完全相消干涉的位置。

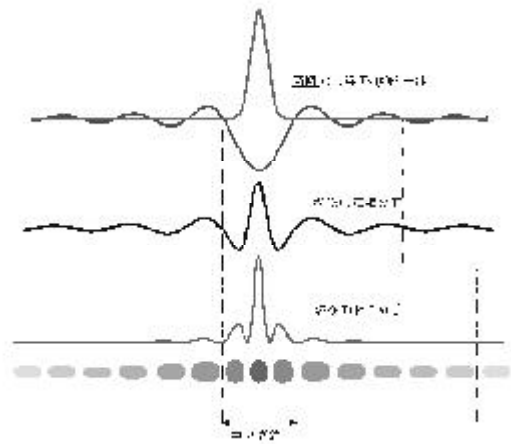


圖 8. 雷射對細導線繞射的分析圖

為了證實這個推論，我們可以利用 Fresnel-Kirchhoff diffraction equation :

$$U(x, y) = -\frac{i}{2\lambda} \iint_{\text{Aperture}} A(\xi, \eta) \cdot \frac{\exp(ikr)}{r} \left(1 + \frac{z_0}{r}\right) d\xi d\eta \quad (\text{註 2})$$

此方程式為光波通過狹縫後，在螢幕上的電場(或磁場)函數分布， $U(x, y)$ 即為螢幕上的電場分布。其中 (ξ, η, z) 為狹縫上的座標系統， (x, y, z) 為螢幕上的座標系統， $A(\xi, \eta)$ 是光波在狹縫上電場的振幅(Amplitude)， k 為波數($=2\pi/\lambda$)，見圖 9。

我們可以將 $A(\xi, \eta)$ 寫成高斯分布函數：

$$A(\xi, \eta) = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi^2 + \eta^2}{\sigma^2}\right)\right], \text{ 當成是雷射通過}$$

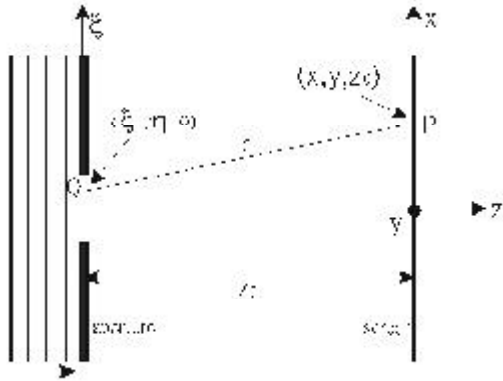


圖 9. 光波通過狹縫的繞射示意圖, y 軸為垂直紙面向上

細線時的振幅，然後用電腦程式計算雷射通過細線後，在螢幕上的電場分布函數 $U(x, y)$ ，螢幕上的繞射強度則為 $U^*(x, y)U(x, y)$ ，最後再畫出繞射的相對強度(Relative intensity)圖。然後再與雷射直接通過狹縫的繞射相對強度圖作一比較，見圖 10、圖 11，其中狹縫的寬度與細線的截面直徑相同，皆為 $100\mu\text{m}$ 。圖 11 則是圖 10 中虛線部分的高度(即 Relative intensity)放大圖，且在圖中可以清楚看出中央亮紋部分所出現的兩條暗線，而其他暗線與亮紋位置皆不改變，即可證實上述之推論。

不過需要一提的就是，圖 10 和圖 11 的相對強度是繞射強度 normalization(亦即將最大值定為 1)之後的結果；若將其還原回原來的積分值，再將這兩種繞射的結果放在一起，見圖 12、圖 13，讀者可自行比較此二種情況的差異。同時，在圖 13 當中，我們也可清楚看見：這兩種繞射除了中央亮紋之外，其他

亮紋不僅位置相同，且繞射強度也都相同(圖中兩條曲線重合)，這也符合了 Babinet's principle 的預測。

至於本實驗所測量的結果(測得細線的截面直徑)，以及用游標尺測量的數據皆列於表 1。最後，讀者亦可在圖 10 當中，觀察到雷射對狹縫繞射的相對強度圖，其實與平面波對狹縫繞射(稱為 Fraunhofer diffraction)的相對強度圖幾乎完全相同，那是因為狹縫只截取雷射光束(高斯光束)的一小部份，而那一小部份的光波相位差極小的緣故。平面波對狹縫的繞射也可以由上述的 Fresnel-Kirchhoff diffraction equation 去計算，只需將 $A(\xi, \eta)$ 令為 1，再加上一些數學上的近似即可，此部分的計算在此就不再詳述。

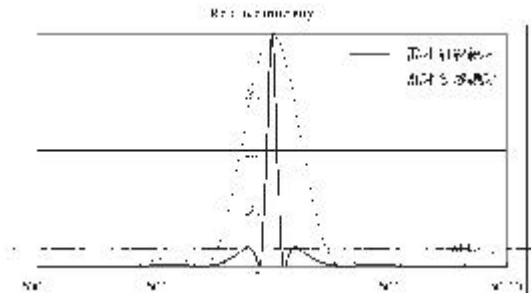


圖 10. 電腦模擬計算的繞射相對強度圖，狹縫寬度與細線截面直徑皆為 $100\mu\text{m}$ ，距離 $z_0=3\text{m}$ ，雷射分布範圍取 $1000\mu\text{m}$ ，約為高斯分布半高全寬的 2.832 倍(σ 取 $150\mu\text{m}$)

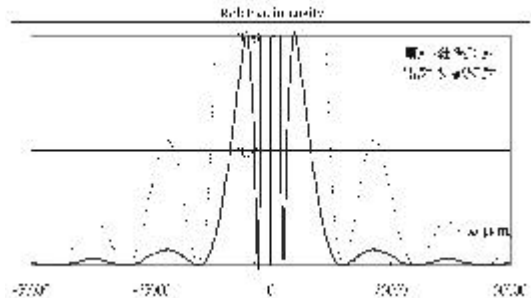


圖 11. 圖 10 中虛線部分的放大圖

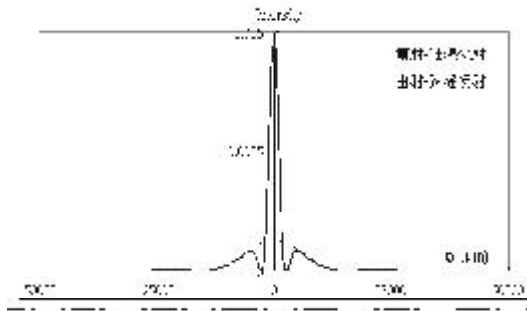


圖 12. 電腦模擬計算的繞射強度圖

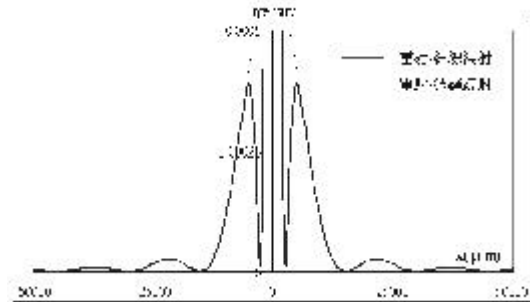


圖 13. 圖 12 中虛線部分的放大圖(重合部分兩者誤差 $< 1.68 \times 10^{-6}$)

	游標尺測量	電腦模擬計算	誤差
光柵光學量	0.53mm	0.49mm	0.04mm
游標尺測量	0.60mm	0.50mm	0.10mm

雷射波長為 6328A，使用的游標尺精密
度為 0.05mm

註：

- 1.E. Hecht , Optics , 3RD Edition , U.S.A , Addison Wesley Longman,Inc , P. 500~501 , 1998
- 2.Fred E. Lytle , An Introduction to Diffraction Part I : The Near Field , Focal Point , Volume53 , Number6 , P.217A~226A , 1999

參考文獻：

- 1.D.Halliday / R.Resnick /J.Walker , Fundamentals of Physics Extended , 5RD Edition , U.S.A , John Wiley & Sons,Inc , P.952 problem10 , 1997
- 2.E. Hecht , Optics , 3RD Edition , U.S.A , Addison Wesley Longman,Inc , P. 442~447 , 1998

(上承第 10 頁)

既然相減的結果的十位數已經知道是 9，個位數與百位數相加必定會等於 9，而由於個位數已被告知，因此只要將 9 減去個位數就得到百位數了。

參考資料

- 1.許介彥(2001) 推理大考驗, 俊傑書局。

- 2.Henry E. Dudeney, Amusements in Mathematics, New York, Dover, 1970.
- 3.David Wells, The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers, London, Penguin Books, 1997.

作者信箱：chs@mail.dyu.edu.tw