所羅門寶藏

葉洹君*　顏德琮**　連信欽**
*臺北市立實踐國民中學
**國立臺灣師範大學　科學教育研究所

一、前言

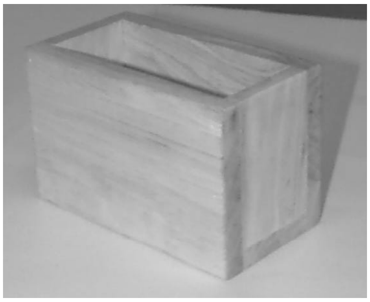
市面上有許多的益智玩具，看得令人眼花撩亂，當我們開始玩這些遊戲的時候，往往都是毫無策略地嘗試，在一次又一次的嘗試中期望找到達成目標的途徑，或許有時候的結果可以讓我們覺得離目標相當接近，但是這些經驗卻始終無法累積成一必勝策略，甚至好不容易的成功我們也只能歸因於運氣、碰巧罷了，因為這樣的成功確實不代表我們可以反覆操作，一試便能成功；而當自己身為旁觀者觀看別人玩這些遊戲時，也可以發現自己的經歷同樣也發生在別人身上，難道這些所謂的益智遊戲，其價值僅僅是在於考驗我們的運氣和記憶力嗎？有人說：「玩這些益智遊戲，對我們的頭腦訓練有很大的幫助，同時也能提升我們的數學程度」。故我們決定靜下心來，好好分析這些益智遊戲背後到底隱含了什麼數學知識，並從中找尋致勝的秘訣。

本篇文章就是我們探討「所羅門寶藏」玩具中的數學意涵並進一步探討此玩具帶來的學習為何。

二、認識玩具

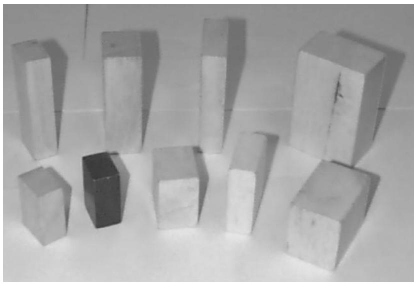
這些益智遊戲多是一些數學家的創作或者是取材於歷史上有名的遊戲，因此遊戲背後一定有其值得探討的奧秘之處，為了揭開這神秘的面紗，本節先從玩具的材料認識起。

1.遊戲材料：（1）木盒子（見圖一）



（圖一）

(2)九個木塊（見圖二），其中有兩塊形狀大小一樣而顏色不同(一塊為黃色、一塊為紅色)



（圖二）

2.遊戲任務：

(1)將八塊形狀不同的長方體裝入一個木製的方盒子中

(2)加了一小塊紅色長方體，將此九塊長方體放入盒內

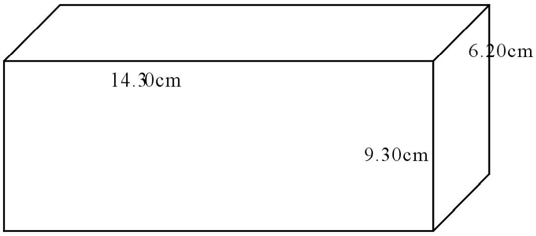
說明：所謂木塊放入盒內是指木塊不能超出盒子的頂端，且所有木塊也要能組合成一長方體。

三、研究過程：

1.材料分析

由於在反覆試驗探索的過程中，我們發現木塊之間有倍數關係，也就是說較大的七個長方體都可以用數個最小的長方體來組合而成。因此我們便想進一步以測量的方式來了解這遊戲的材料，以證實我們在操作過程中的發現的現象；而在測量的過程中，本文三位作者所測得的結果部分是有些許的差距，經多次的測量後取其平均所得的結果如下：

●盒子內部經測量結果（最小單位 0.1cm）得長 14.30cm　寬 6.20cm　高 9.30cm（圖三）



（圖三）

●九個木塊分別加以測量的結果如表一所示（最小單位 0.1cm）：

長	寬	高	個數
2.00	3.00	4.60	2
4.00	3.00	4.60	1
2.00	6.00	4.60	1
2.00	3.00	9.30	1
2.00	6.00	9.30	1
4.00	6.00	4.60	1
4.00	3.00	9.30	1
4.00	6.00	9.30	1

（表一）單位：公分

根據以上的測量結果，若仔細觀察每一小塊長方體邊長的關係，再加以比較長方體間的體積大小關係，便可以發現八種長方體邊長間都有接近整數倍的關係，而雖然有一點點的誤差，但可以把他視為是測量時造成的誤差或材料製作時不可避免的誤差。

由於這樣的測量結果與先前操作發現長方體間的關係，為便於進一步分析及排除些微數字的誤差，我們先把每個長方體編碼並把最小的長方體三邊長定為 a、b、c 及體積大小為 V(V= a × b × c)，因此所有的長方體大小及邊長關係則可以從（表二）一覽無遺：

木塊代號	長		寬		高		體積
A（黃色）	2.00	a	3.00	b	4.60	c	V
A'（紅色）	2.00	a	3.00	b	4.60	c	V
B	4.00	2a	3.00	b	4.60	c	2V
C	2.00	a	6.00	2b	4.60	c	2V
D	2.00	a	3.00	b	9.30	2c	2V
E	4.00	2a	6.00	2b	4.60	c	4V
F	4.00	2a	3.00	b	9.30	2c	4V
G	2.00	a	6.00	2b	9.30	2c	4V
H	4.00	2a	6.00	2b	9.30	2c	8V

（表二）單位：公分

2.任務分析

【分析方法一】

由以上觀察與分析知道每個長方體可以由最小的長方體組合而成，觀察木盒子內緣邊長似乎與最小長方體三邊長（a、b、c）也有接近整數倍的關係（接近 7a、2b、2c，因為放入的木塊實際上不可能完全密合，所以盒子比整數倍多了一些應是合乎情理的），所以整個盒子也可以用整數個小長方體裝滿；但我們考慮最後放進所有長方體之後也要成為一個長方體的限制之下，兩種任務的分析分別如下：

(1)若要放入八塊，則八塊的體積和為 27V(即 27abc)，其三邊長可能為下列情形

①$27a \times b \times c$　②$a \times 27b \times c$

③ $a \times b \times 27c$ ④ $9a \times 3b \times c$

⑤ $9a \times b \times 3c$ ⑥ $3a \times 9b \times c$

⑦ $a \times 9b \times 3c$ ⑧ $3a \times b \times 9c$

⑨ $a \times 3b \times 9c$ ⑩ $3a \times 3b \times 3c$

由於盒子的邊長已受到限定，只要任一邊長大於14.30公分，則無法放進木盒，因此只剩下第10種情形可能發生，而且各邊對應關係為3a對應6.20cm， 3b對應9.30cm， 3c對應14.30cm才有可能發生。

(2)若要放入九塊，則九塊的體積和為28V，仿照上一任務分析結果，對應的三邊長只有可能是 $7a \times 2b \times 2c$ 且7a對應的是14.30cm， 2b對應的是6.20cm， 2c對應的是9.30cm才有可能發生。

【分析方法二】

由於盒子本身的長、寬、高已受到限定，若從盒子本身的限制開始分析也是一種策略，考慮盒子的三邊分別可以與長方體的三邊對應，其對應方式有下列六種（表三）：

	a（2.0cm）	b（3.0cm）	c（4.6cm）
1	6.20	9.30	14.30
2	6.20	14.30	9.30
3	9.30	6.20	14.30
4	9.30	14.30	6.20
5	14.30	6.20	9.30
6	14.30	9.30	6.20

（表三）單位：公分

在每種對應關係下所能夠組合出的最大長方體體積及其邊長關係如（表四）所示：

	a（2.0cm）	b（3.0cm）	c（4.6cm）	體積
1	3a	3b	3c	27V
2	3a	4b	2c	24V
3	4a	2b	3c	24V
4	4a	4b	C	16V
5	7a	2b	2c	28V
6	7a	3b	c	21V

（表四）

由表三的六種情形可以看出，本遊戲的任務即是要完成第一及第五種情形，由此分析亦可知道若要完成這兩種任務，盒子的邊長應對應的關係與分析方法一的結果一致。

3.問題解決

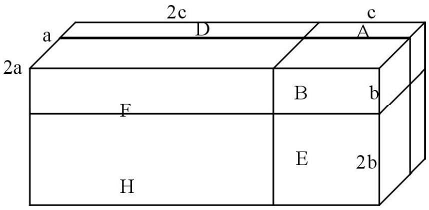
(1)放入8塊

[思考]：當我們的目標是要組合成 $3a \times 3b \times 3c$ 的長方體時，考慮 $3a \times 3b \times 3c = 3a \times 3b \times c + 3a \times 3b \times 2c$，進一步分析其意義為原長方體可由 $3a \times 3b \times c$（體積為9V）及 $3a \times 3b \times 2c$（體積為18V）兩個長方體組合而成。

[操作]：首先我們試著將木塊依高度為c（即A、B、C、E木塊）與2c（即D、F、G、H木塊）分成兩類，此時的目標為組成一 $3a \times 3b$ 的面，結果發現目標很快即可達成。

[思考]：分析此二類木塊的體積關係發現 $A + B + C + E = 9V$， $D + F + G + H = 18V$，恰與目標吻合。

進一步猜測若一開始是將依長度a及2a或寬度b及2b分類，是否也可行，分類後其體積也有上述關係(9V與18V)，因此分析此一現象，結果發現原因乃是 $27V = 3a \times 3b \times 3c = (a + 2a) \times (b + 2b) \times (c + 2c)$，其意義即為三邊長分別為3a、3b、3c的長方體，在其長、寬、高上分別於其三等分點上切割（如圖四）， A　H即為切割後所形成的長方體，故不論最初以哪一邊分類都是可行之道。

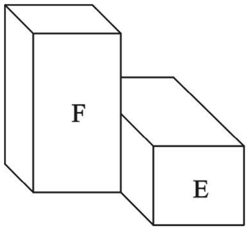


（圖四）

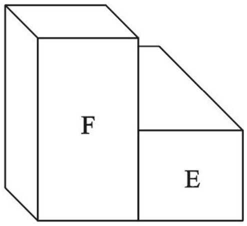
變化：由於只要遇到長、寬、高三邊中有兩者相等時即可以加以對調，因此 A、B、C、E 和 D、F、G、H 間各自可再對調，形成更多種的組合情形。

(2)放入 9 塊

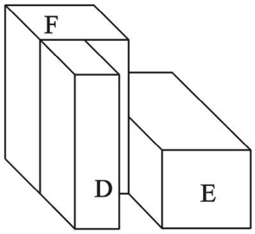
[思考]：由於要組合的長方體是 7a × 2b × 2c 的邊長關係，G（a × 2b × 2c）、H（2a × 2b × 2c）別無選擇只能一種放法（當然然位置可以再對調、旋轉），7a × 2b × 2c 扣除 G（a × 2b × 2c）、H（2a × 2b × 2c）之後，其他七塊必須要能形成一 4a × 2b × 2c 的長方體（7a × 2b × 2c － a × 2b × 2c－2a×2b×2c＝4a×2b×2c），任務才可能達成。若再由 E（2a × 2b × c）、F（2a × b × 2c）的邊長關係看出這兩個木塊只有一種組合關係（如圖五），當然 F 的位置可再加以調整（如圖六），現僅以圖五作為基本型的討論，若再考慮限制較多的方塊 D（a × b × 2c），發現 D 只有兩種擺法（圖七及圖八），而若是圖八的情形，唯一能用 A 和 A' 填滿左前方的缺口，但如此一來 B、C 方塊便無法順利填滿右上缺口，因此只剩下圖七情形可能成功。



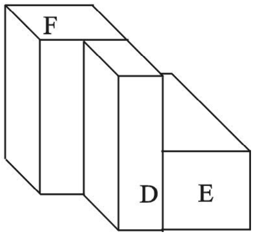
（圖五）



（圖六）

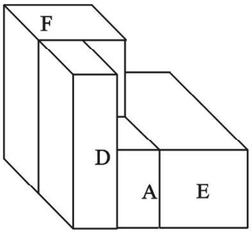


（圖七）

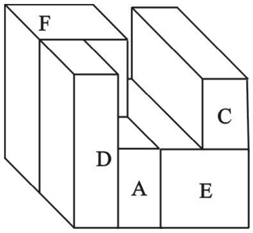


（圖八）

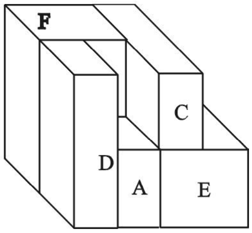
當完成了圖七的組合後先以 A（或 A'）填滿 D 旁的缺口（如圖九），則 C 的位置便僅剩下圖十和圖十一可以考慮，但因為要放入 B 方塊的關係故刪除圖十一的情形；若完成了圖十的情形，方塊 B 及方塊 A'（或 A）就能成功放入。



（圖九）



（圖十）



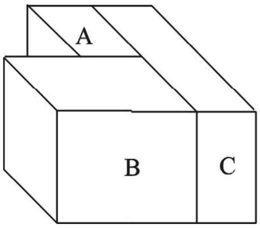
（圖十一）

變化型：

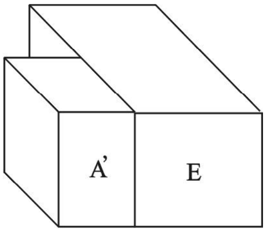
1.因為 a ＝ 2， b ＝ 3，所以我們可以推得 3a=2b的關係，這關係或許可以創造出不同

的組合方式，例如把 $7a \times 2b \times 2c$ 分解成 $4a \times 2b \times 2c + 3a \times 2b \times 2c$， $3a \times 2b \times 2c$ 便可以轉換成 $2b \times 3a \times 2c$，而此情形即為在基本型中的 G、 H 經旋轉九十度後的情形。

2. A、 B、 C 三塊可以組合成與 E、 A' 完全一樣的形狀（如圖十二和圖十三），故排出一種後其可以再加以交換，若再加上左右對調並考慮 G、 H 位置，則可以搭配出許多不同的組合方式。



（圖十二）



（圖十三）

四、討論

當達成了遊戲所賦予的任務固然是一件令人欣喜的事，但若我們也期望在學生或孩子玩遊戲的過程之中學習到數學知識，教師或家長是該比孩子更清楚遊戲背後的數學意涵，本節重點即在探討此玩具究竟能訓練孩子何種能力。

在現行的中小學科學教育中，對學生的測量訓練還不是很好，而測量為何對一個學生如此重要呢？藉由測量可以掌握數與量的關係，從中還可以培養動手、動眼睛的主動探索精神，學生若在長期的訓練下除了養成良好的科學態度外，還可以訓練熟練的測量技術，這對科學研究人才的培養是非常重要的。而這樣的精神也與九年一貫十大課程目標契合（謝新傳，民 89），教師並非是不斷地灌輸學生知識，而應是培養他能因應未來生活的能力，許多的益智遊戲活動，不正是提供訓練學生「主動探索與研究」與「獨立思考與問題解決」能力的題材嗎？

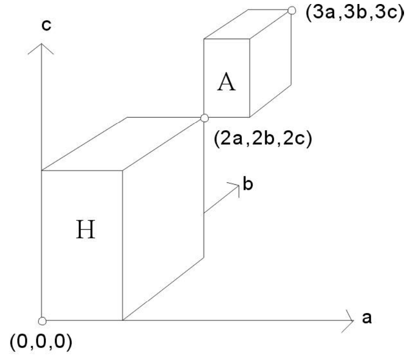
學生在這個遊戲中，除了精熟其測量技術外，也能從所得到的數據中培養對數字的敏銳度，一旦能洞察數字之間的關係，就不會覺得的這個遊戲的成功與否僅取決於運氣本身了！在本研究過程中，並利用符號來記錄，這對學習還具有兩種意涵。

第一，測量總無法避免誤差，學生若要歸納出邊長間的關係就必須瞭解測量是怎麼一回事，允許在些許的誤差或不準確中探討問題的解決之道，這不更加符合生活情境中的問題嗎？若學生學到的都是死板、缺乏彈性的數學知識，我們又如何期望學生能以數學方式來思考生活中的問題呢？

第二，利用符號簡記，在數學發展史上是一個重要的突破， Skemp（1987）曾提出符號的多種功能，在本遊戲中藉由符號化的過程除了達到Skemp所說的「能反映活動」、「助於顯示結構」之外，更便於進行操作與分類的活動。而學生若能從中獲得「使用符號將助於問題解決」的成功經驗的話，便不會將符號只是視為抽象的記號，錯失了一個有力的解題工具。

當任務達成的時候，我們可以用立體圖或具體操作的方式讓別人瞭解最後的組合方式，但除了這兩種方法之外，我們如何在書面上透過文字或其他的敘述方式讓讀者瞭解呢？尋找一適切的表達方式對學生而言也是

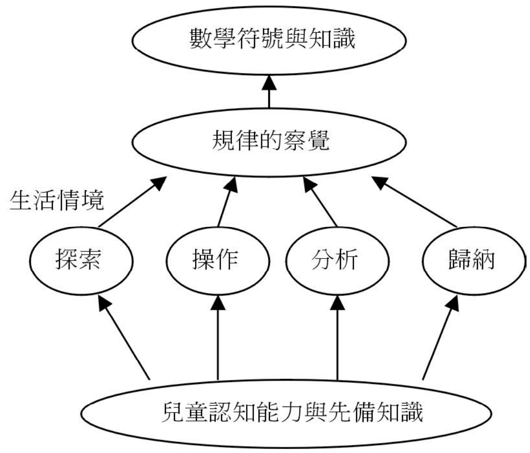
一種挑戰，本研究提出與學生在學習過程中相關的「座標法」，例如：放入八塊的時候，在（0,0,0）與（2a,2b,2c）之間放入方塊 H，（2a,2b,2c）與（3a,3b,3c）之間放入方塊 A（如圖十四）。



（圖十四）

另外就數學知識而言，這個遊戲中至少隱含了「數」與「形」的觀念，以及「數」與「形」之間的互動，亦即操作者可藉由實體的操作（測量或比較）洞察「數」的關係，另外再由「數」之間的關係推測出「形」的可能，因數、倍數、因數分解、使用符號式子溝通表達及排列組合的知識都蘊含其中，當然對許多學生猶如夢魘般的空間概念亦可以從中培養。

總之，簡單的一個遊戲若在老師或家長的細心引導之下，一個遊戲就不只是玩玩而已了，他的價值將是無限的，這種情境的安排與「真實數學（realistic mathematics)」的學習理論架構是不謀而合的（如圖十五，），除了重視數學問題與生活情境脈絡的連結、發現探索合理的解答外，亦強調從實作與解題過程中發現數學的規律與關係。

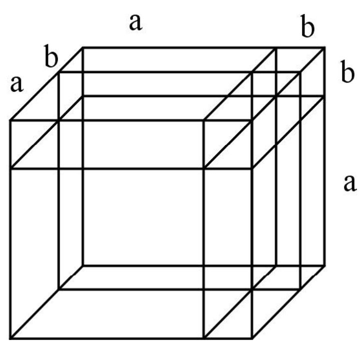


（圖十五）真實數學的學習過程（引自黃幸美，民 90）

五、應用

相同於此遊戲的操作，更直接可應用於數學教學，如在學習乘法公式的時候，當遇到二次方的時候我們便會以圖形表徵讓學生與代數方法連結，同樣若要學習到三次方的展開時，雖然難度增加，但藉由具體物的操作將有助於學生學習，如：

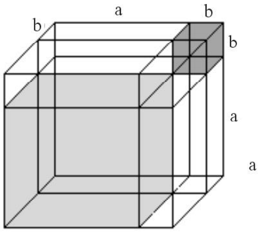
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ 的乘法公式就可以看成一邊長為 a+b 的立方體的分解（圖十六）



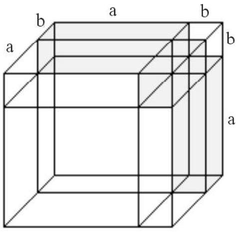
（圖十六）

可以藉由操作分別看出以下有色長方體的體積與邊長關係（圖十七至十九），更有寓教於樂的意涵，同時也是一個很好的空間概

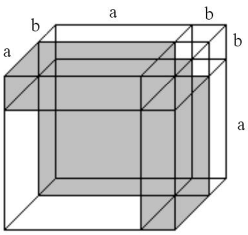
念訓練教材。



(圖十七)



(圖十八)



(圖十九)

教師亦可進一步將更繁瑣的乘法公式設計成積木操作的活動，如：

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3(a^2b + a^2c + b^2c + ab^2 + ac^2 + bc^2) + 6abc$

諸如此類將符號與具體物操作相結合的活動，也可以應用在教師要引入代數的課程當中，一般而言，學生在初學代數的時候，造成許多錯誤的來源是在於學生還無法改變過去慣用的具體操作思考方式，然而國中的教材卻大多是以形式運思期的抽象思考或邏輯推理為主（張景媛，民 83），因此在具體操作與形式運思兩種思考方式的轉變之間，教師的角色就更加重要，需提供一過渡化的學習方式給學生，融合抽象思考於具體操作之中，積極學習使用符號幫助思考及解決問題，以進行更抽象化的思考。

具體來說，本研究分析、探索整個遊戲的過程亦可提供學生在遇到一個新問題時的思維方式，例如本文作者之一(葉洹君同學)，目前為國二學生，當他遇到下述因式分解的問題：

$x^2y^2 - x^2 - 4y^2 + 2xy + 9$

開始她也不知道從何處著手，但她回想她目前所學得的公式只有下述三種：

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

就像本研究所述之認識玩具及瞭解玩具的特性一般，她慢慢的觀察題目的每一項，認為這個題目不太可能是完全平方，很可能是 $(a \pm b)^2 - (c \pm d)^2$ 之類，所以她想到將原題目分成兩類，一個是 $(a \pm b)^2$，一個是 $(c \pm d)^2$，所以從題目中，她知道可以把 $(x^2y^2 \pm 6xy + 9)$ 及 $(x^2 + 4y^2 \pm 4xy)$ 配成兩個完全平方式，分別是 $(xy \pm 3)^2$ 及 $(x \pm 2y)^2$，再經過 xy 項係數的比較得知，原題等於 $(xy+3)^2$ - $(x+2y)^2$ 則可完成此題因式分解：$(xy+3-x-2y)(xy+3+x+2y)$，這過程這就像本研究的解題歷程一般，先藉由材料分析，再加以分類之想法類似。

此外，老師除了可以將遊戲本身的任務融入教學之中外，老師還可以利用這些遊戲器材料發展出新的遊戲，如透過本文第三節研究過程中的分析方法二，教師可以進一步給學生其他任務：利用這些木塊是否可以組合成 16V 、 21V 及 24V 的長方體？甚至可以鼓勵學生自行設計題目互相考驗，將遊戲的價值發揮至極致。

(下轉第 10 頁)