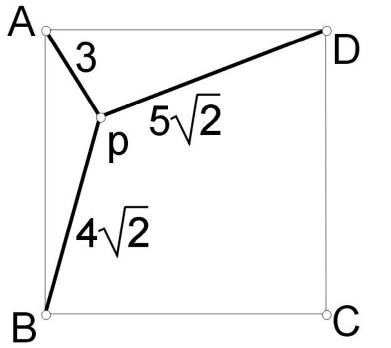
中學生通訊解題第十七期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

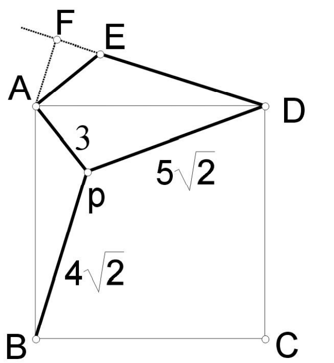
問題編號
901701

如圖，設正方形ABCD內部有一點P滿足$\overline{AP}=3$， $\overline{BP}=4\sqrt{2}$ ，$\overline{DP}=5\sqrt{2}$ ，試求正方形ABCD的面積。



參考解答：

如圖，作△AED≅APB所以∠EAP=90°且△AEP為等腰直角三角形可得$\overline{EP}=3\sqrt{2}$ 且∠AEP=45°，又在△DEP中，∠E=90°，所以∠AED=135°可得$\overline{AF}=\overline{EF}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$ ，$\overline{DF}=\frac{11}{2}\sqrt{2}$ 所以$\overline{AD}=\overline{AF}^2+\overline{DF}^2=\sqrt{65}$ 面積$\overline{AD}^2=65$



解題重點：

本題的解法有以下幾種類型：

(1)直接用代數法，取未知數，但要用到四次式，所以有點辛苦。

(2)利用"旋轉"的概念（高中幾何學），但是在解邊長時，大部分同學使用了餘弦定理（最好會證明），亦可利用等腰或延長線取高之國中作法。

(3)利用"旋轉"，並求出"正方形的面積＝4個三角形之面積或3個三角形之面積"，但E、C、F三點共線未證者則無法獲得滿分。

評析：

(1)答題優良者：本題答題優良者眾多，得到滿分者一共有33人，詳細答題情況已公布上網，可直接上網查詢。

(2)本題答題人數共50人，平均得分為5.94分，得分率為85%。

問題編號
901702

若$a_1,a_2,\cdots,a_{2001}$為2001,2002,2003,⋯4000,4001的任意一種重新排列，試求證

(1)$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\cdots\times(4001-a_{2001})$為偶數。

(2)$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\cdots\times(2001-a_{2001})$亦為偶數。

參考解答：

(1)假設$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\cdots$

$\times(4001-a_{2001})$為奇數則$(2001-a_1)$、$(2002-a_2)$、$(2003-a_3)$、…… $(4001-a_{2001})$皆為奇數但奇數個(共有 2001 個)奇數其和亦為奇數然而$(2001-a_1)+(2002-a_2)+(2003-a_3)+\cdots\cdots+(4001-a_{2001})=(2001+2002+\cdots\cdots+4001)-(a_1+a_2+\cdots+a_{2001})=0$ 與其和為奇數產生矛盾故假設錯誤所以$(2001-a_1)\times(2002-a_2)\times(2003-a_3)\times\cdots\cdots\times(4001-a_{2001})$為偶數

(2)假設$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\cdots\cdots\times(2001-a_{2001})$為奇數，則$(1-a_1)$、$(2-a_2)$、$(3-a_3)$、…… $(2001-a_{2001})$為 2001 個奇數，但$(1-a_1)+(2-a_2)+(3-a_3)+\cdots+(2001-a_{2001})=(1+2+3+\cdots+2001)-(a_1+a_2+\cdots+a_{2001})=(1+2+3+\cdots+2001)-(2001+2002+\cdots+4001)=\frac{2002\times2001}{2}-\frac{6002\times2001}{2}=2001\times(1001-3001)=-1000\times2001$ 與奇數產生矛盾故假設錯誤

所以，$(1-a_1)\times(2-a_2)\times(3-a_3)\times\cdots\cdots\times(2001-a_{2001})$為偶數。

解題重點：

瞭解奇數和偶數的性質，並利用反證法及鴿籠原理作證明。

評析：

(1)大部分的同學都知道用反證法及鴿籠原理，但能清楚地寫出證法者並不多。

(2)答題優良者：台北市民生國中呂信儀同學、台北市民生國中邱莉婷同學、台北縣新莊國中吳之堯同學、高雄縣鳳西國中葉仲恆同學。

(3)本題答題人數共 55 人，平均得分為 5.04 分，得分率為 72%。

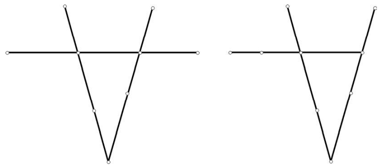
問題編號
901703

平面上有 9 個點，現在要將它們排成三行，要求每行恰好有 4 個點，如圖所示，就是兩種不同的排列方法。

(1)請儘量舉出不同的的排列方法。

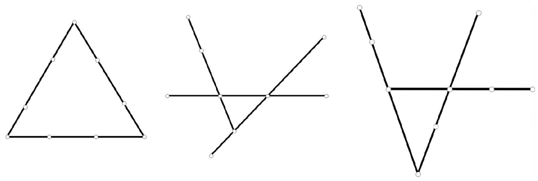
(2)在你舉例的過程中，你是否發現什麼規律？

而能將所有的排列方式找出來。



參考解答：

(1)可再舉出一些排列的方式，如下圖：

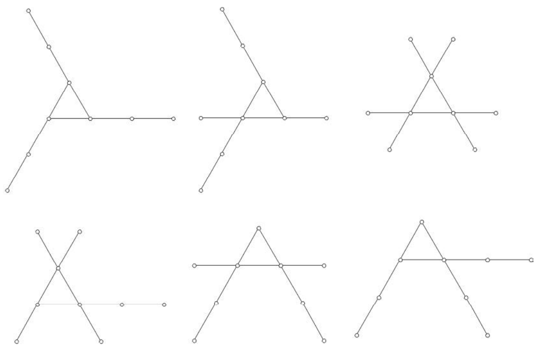


(2)觀察上面的圖形，可以發現上面每一個圖形都存在一個三角形，其中這些三角形的邊上都各有一些點(頂點一定算一點)，因此我們將這樣的三角形稱為基本三角形，假設基本三角形各邊上分別有 a,b,c 個點，其中($a\le b\le c$)，因為只有 9 個點，因此 $2\le a,b,c\le 4$，現在用(a,b,c)表示基本三角形的型式：我們可以找出 10 種如下所示：

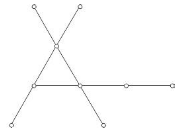
(2,2,2),(2,2,3),(2,2,4),(2,3,3),(2,3,4)(2,4,4),(3,3,3),(3,3,4),(3,4,4)(4,4,4)。

因為在不同的基本三角形上得出的排列方式必定是不同的，因此只要確定這 10 種形式可能產生的排列方式，就可以得出所有排列的方式。

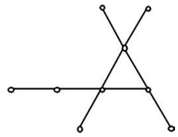
例：（2,2,2）的基本三角形有如下 6 種



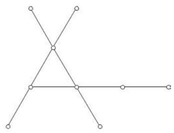
注意：其中



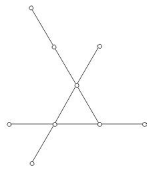
和



經水平翻轉為同一種



和



經旋轉為同一種

(3)下表是各種基本三角形所產生的排列方式;

基本三角形	(2,2,2)	(2,2,3)	(2,2,4)	(2,3,3)	(2,3,4)	(2,4,4)	(3,3,3)	(3,3,4)	(3,4,4)	(4,4,4)
排列方式個數	6	9	6	7	6	2	2	3	1	1

共有 43 種排列方式。

解題重點：

瞭解點和直線的關係，並能從觀察中發現滿足題目所設條件的排列之規律性， 進而利用分類找出排列方式的個數。

評析：

(1)幾乎所有答題的同學均能畫出幾種不同的排列方式，並找到其中的規律性，但是能夠懂得利用分類來找出所有排列方式者極少。

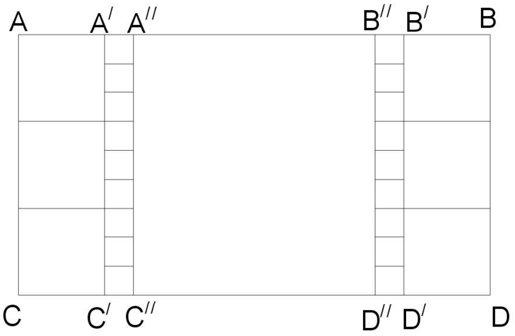
(2)答題優良者：台北縣江翠國中黃明山同學、莊智涵同學、台北縣秀峰高中陳郁涵同學、台北縣新莊國中潘遠信同學。

(3)本題答題人數共 73 人，平均得分為 4.33 分，得分率為 62%。

問題編號
901704

有一長方形 ABDC，已知 $\overline{AB}$ 長度為 x，$\overline{AC}$ 長度為 y，如圖所示

今在長方形兩邊分別取兩個長方形 $ACC'A'$、$BDD'B'$，使 $\overline{AC}=3\overline{AA'}$，$\overline{BD}=3\overline{BB'}$，如此可將長方形 $ACC'A$、$BDD'B'$，各分為 3 個正方形，再將長方形 $A'C'D'B'$ 兩邊分別取兩個長方形 $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$，使 $\overline{A'C'}=9\overline{A'A''}$、$\overline{B'D'}=9\overline{B'B''}$，如此可將長方形 $A'C'C''A''$、$B'D'D''B''$ 各分為 9 個正方形，照此規則分割下去，試問 $x：y$ 為多少時，恰能將長方形 ABDC 分為 6558 個大小不同的正方形。



參考解答：

正方形個數 $=2\times(3+3^2+3^3+\cdots+3^n)=6558$

$2\times\frac{3\times(3^n-1)}{3-1}=6558$　$3^n-1=2186$　所以 $3^n=2187$

即 n=7

而 $x=2\ [\frac{1}{3}y+(\frac{1}{3})^2y+(\frac{1}{3})^3y+\cdots\cdots+(\frac{1}{3})^7y]$

$x=[1-(\frac{1}{3})^7\ ]\times y$，所以 $\frac{x}{y}=1-(\frac{1}{3})^7=\frac{2186}{2187}$

解題重點：

本題是以等比級數公式來解題。

評析：

(1)以等比級數公式來作答者即可得到高分，許多同學均能掌握到此要領。

(2)答題優良者：板橋海山國中張源平同學、台北縣江翠國中莊智涵同學、台北縣福和國中楊智寰同學。

(3)本題作答人數 45 人，平均得分為 4.95 分，得分率為 71% 。

問題編號
901705

已知 $a_1,a_2,a_3,\cdots a_n$ 均為正數，若

$M=\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2}+\cdots\cdots+\sqrt{a_{n-2}^2+a_{n-1}^2}$
$\quad+\sqrt{a_{n-1}^2+a_n^2}+\sqrt{a_n^2+a_1^2}$

$N=\sqrt{2}\ (a_1+a_2+\cdots\cdots a_n)$

則 M 與 N 的大小關係為何？證明你的結果。

參考解答：

(方法一)

$N=\frac{\sqrt{2}}{2}[(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots\cdots+(a_n+a_1)]$

但 $\sqrt{a_i^2+a_j^2}\geq\frac{\sqrt{2}}{2}(a_i+a_j)$

$\Leftrightarrow a_i^2+a_j^2\ \geq\frac{1}{2}(a_i+a_j)^2$

$\Leftrightarrow 2(a_i^2+a_j^2)\geq(a_j^2+2a_ia_j+a_j^2)$

$\Leftrightarrow(a_i-a_j)^2\geq 0$ 但最後一式必然成立，故 $M\geq N$，

且當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 時， $M=N$ 。

(方法二)

令 $\overline{OA}=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}+a_n$

$\overline{OB}=a_2+a_3+a_4+\cdots+a_n+a_1$

則 $\overline{OA}=\overline{OB}$， ΔOAB 為等腰直角三角形。

$\therefore\ \overline{AB}=\sqrt{2}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=N$

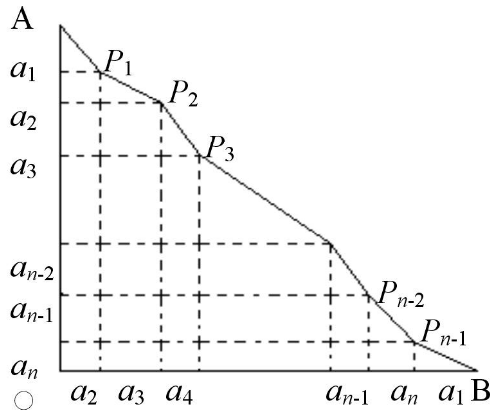
$\because\ \overline{AP_1}=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$， $\overline{P_1P_2}=\sqrt{a_2{}^2+a_3{}^2}$，…，

$\overline{P_{n-2}P_{n-1}}=\sqrt{a_{n-1}{}^2+a_n{}^2}$， $\overline{P_{n-1}B}=\sqrt{a_n{}^2+a_1{}^2}$

$\Rightarrow M=\overline{AP_1}+\overline{P_1P_2}+\overline{P_2P_3}+\cdots+\overline{P_{n-2}P_{n-1}}+\overline{P_{n-1}B}$

(折線段長之和)

由圖可知， $M\geq N$



解題重點：

本題作答可由代數及幾何互相驗證。

評析：

(1)答題優良者：以（方法一）作答較詳盡者包括北縣福和國中吳霽庭同學、北縣海山國中張源平同學、北市明德國中王琨傑同學、北市大直高中陳俊曄同學；以（方法二）作答較完整者包括高雄縣鳳西國中葉仲恆同學、台南市建興國中黃信溢同學、北縣江翠國中黃明山同學、北市民生國中張哲瑞同學。

(2)本題答題人數共 19 人，平均得分為 5.53 分，得分率為 79% 。