中學生通訊解題第十六期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
901601

請問在 3^{2000} 與 3^{2001} 之間有多少個 37 的倍數？

參考解答：

考慮 $3^n \div 37$ 之餘數如下：

$3^1 \to 3$	$3^7 \to 4$	$3^{13} \to 30$
$3^2 \to 9$	$3^8 \to 12$	$3^{14} \to 16$
$3^3 \to 27$	$3^9 \to 36$	$3^{15} \to 11$
$3^4 \to 7$	$3^{10} \to 34$	$3^{16} \to 33$
$3^5 \to 21$	$3^{11} \to 28$	$3^{17} \to 25$
$3^6 \to 26$	$3^{12} \to 10$	$3^{18} \to 1$

$\Rightarrow$ 呈現 18 循環 $\therefore$ $3^{2000}\div 37$ 餘 9,$3^{2001}\div 37$ 餘 27

$\therefore$ 在 3^{2000}~3^{2001} 之間 37 的倍數最小為 $3^{2000}+28$，最大者為 $3^{2001}-27$

$\therefore$ 共有 $\dfrac{(3^{2001}-27)-(3^{2000}+28)}{37}+1=\dfrac{3^{2001}-3^{2000}-18}{37}$ 個 37 的倍數。

解題重點：

(1)尋找滿足此條件的第一個數，必須先知道 3^{2000} 除以 37 的餘數。

(2)由於數字太大，先從 3^1、3^2、…算起，觀察到 $3^n\div$ 37 之餘數 18 次一循環。

(3)依此規律性可求得 3^{2000} 與 3^{2001} 之間 37 的倍數之個數。

評析：

(1)本題數字龐大，難以直接計算解答，答對的同學中，大部分都是按照上述方法循序漸進求得答案，以觀察和推理去處理數字龐大的問題。

(2)答題優良者：北縣海山國中張源平同學、福和國中楊智寰同學

(3)本題答題人數共 15 人，平均得分為 2.47 分，得分率為 35%

問題編號
901602

某次棋賽有大人和小孩參加,任兩個參賽者都要比賽一場，規定勝者得 1 分，敗者得 0 分，和局各得 0.5 分。已知小孩人數是大人人數的 4 倍，而小孩總得分只有大人總得分的 1.5 倍，若大人總得分介於 70　100 之間，問參賽的大人與小孩各有多少人？

參考答案：

設有 x 個大人與 $4x$ 個小孩參賽；大人總得分 S，小人總得 1.5S 則總共比賽 $\dfrac{5x(5x-1)}{2}$ 場，每場雙方總得分為 1 分

$\Rightarrow$ $\dfrac{5x(5x-1)}{2}\times 1=S+1.5S$　$\Rightarrow 5x^2-x-S=0$, $70\le S\le 100$

$\therefore$ $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+20S}}{10}$ 為一個正整數 令 $\sqrt{1+20S}=k$ 為一正整數

$\therefore$ $x=\dfrac{1+k}{10}$, $k^2=1+20S\ge 9^2$

$\Rightarrow$討論 x	1	2	3	4	5	……
$k=10x-1\ge 9$	9	19	29	39	49	……
S	4	18	42	76	120	……

$\because$ $70\le S\le 100$ $\therefore$ 取 $x=4$　$\Rightarrow$ 小孩 16 人 ,大人 4 人

另解：

設有 x 個大人與 4x 個小孩參賽；大人總得分 S,小人總得 1.5S 則總共比賽$\frac{5x(5x-1)}{2}$場,每場雙方總得分為 1 分

$\Rightarrow \frac{5x(5x-1)}{2} \times 1=S+1.5S \quad 5x^2-x-S=0$，$70\le S\le 100$

$\Rightarrow 70\le 5x^2-x\le 100$

x	3	4	5
S	42	76	120

取 $x=4\Rightarrow$ 小孩 16 人 ,大人 4 人

注意：20 人之全部總分為 $\frac{20\times 19}{2}=190$ 分故大人得分為 $190\times\frac{2}{5}=76$ 小孩得分為 $190\times\frac{3}{5}=114$ 但大人無法得到 76 分

因大人與大人之間比賽為 $\frac{4\times 3}{2}=6$ 分，若大人與小孩之比賽全勝得分為 16 × 4=64 分

6 ＋ 64=70 分為大人總分的最大值但 70 <76，故本題的答案為無解

解題重點：

(1)依題意設未知數，並列出不等式，找出符合條件的解。

(2)須注意解是否合理，因此在計算之後仍須檢驗。

評析：

(1)本題利用不等式的性質來解題，題目較簡單，因此參與徵答的同學多能求出解答，其中思慮縝密者可發現此解不合理，故無解。

(2)答題優良者：北市大直高中陳俊曄、民生國中劉冠暐、民生國中黃彥豪、基隆銘傳國中林辰妙

(3)本題答題人數共 34 人，平均得分為 4.26 分，得分率為 61%

問題編號
901603

在任意給定的 2001 個數中，都可以找到若干個數（也可以是 1 個數）使它們的和可以被 2001 整除，試証之。

參考解答：

將給定的 2001 個數由小而大排列：$a_1,a_2,a_3,\cdots\cdots,a_{2001}$

從中造出 2001 個數：a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3,\cdots\cdots,a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{2001}$

如果上述造出的 2001 個數都不能被整除，則其中至少有 2 個數除以 2001 之餘數相同,將此二數相減所得之數,必為 2001 的倍數。

解題重點：

(1)依題意設 2001 個未知數及其和。

(2)對於整除和餘數要有清楚的概念，利用 " 不能整除 2001 的餘數只有 2000 個 " 來說明。

評析：

(1)本題主要在測驗同學整除的概念，以及除數和餘數的關係，然而並未給予具體的數字，因此答對人數較少，而且解法中甚至出現同餘的觀念。

(2)答題優良者：台南市建興國中黃信溢、高雄市立志中學蔡政江、台北縣江翠國中黃明山、新莊國中吳之堯。

(3)本題答題人數共 20 人，平均得分為 1.80 分，得分率為 26%

問題編號
901603

如圖所示，在 7 × 7 的方格紙中，有一五邊形 ABCDE 及五個角 ∠1,∠2,∠3,∠4,∠5，試求 ∠1-∠2+∠3-∠4+∠5 的角度。

參考解答：

∵ $\angle 3=45°$　∴只需算 $\angle 1-\angle 2$ 與 $\angle 4-\angle 5$

∴作△ AFG 使 $\angle FAG=\angle 1-\angle 2$

作△ CHQ 使 $\angle HCQ=\angle 4-\angle 5$

而△ AFE~△ CHD　∴所求 =45 °

△ AFE 與△ CHD 相似的證明：

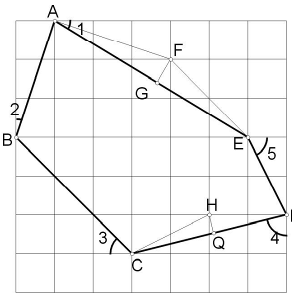
注意 F、 H 都在格點上，如圖所示

在△ AFE 、△ CHD 中

因為 $AF=\sqrt{10}$ ， $EF=\sqrt{8}$ ， $AE=\sqrt{34}$

$CH=\sqrt{5}$ ， $HD=2$ ， $CD=\sqrt{17}$

所以△ AFE~△ CHD(SSS 相似)



解題重點：

做輔助線，並利用相似形來求角度。

評析：

(1)本題答對的人數多，而且參與徵答的同學提供的解法有許多種，足見同學對於相似形的概念清楚並能應用。

(2)答題優良者：大直高中陳俊曄、敦化國中柯舒方、弘道國中魏群樹、民生國中劉冠暐、民生國中黃彥豪、北縣秀峰高中王思勻、明德國中王琨傑、板橋海山國中張源平、板橋海山國中黃冠捷、新莊國中吳之堯、新莊國中潘柏諺、福和國中楊智寰、新竹市光華國中賴俊儒、台南市建興國中黃信溢。

(3)本題答題人數共 25 人，平均得分為 4.60 分，得分率為 66%

問題編號 901605

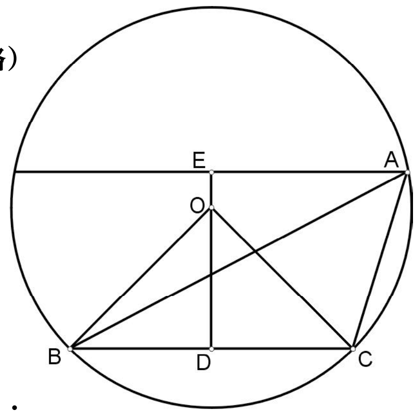
已知△ ABC 中，已知 $\angle A=45°$， BC=8 公分且 BC 上的高為 5 公分，試作出此三角形。

參考解答：

[作法]

以 8 公分為底邊作一等腰直角△ OBC 以 O 為圓心， $\overline{OB}$ 為半徑作圓，延長 $\overline{DO}$，並在 $\overrightarrow{DO}$ 取 E 使 $\overline{DE}$=5 公分，過 E 作 $\overline{BC}$ 之平行線交圓於兩點，取任一點設為 A，則△ ABC 即為所求。

[證明](略)



解題重點：

(1)利用圓心角和圓周角的性質。

(2)利用兩平行線間距離相等的性質。

評析：

(1)答題優良者：台南市建興國中黃信溢、北市永吉國中鄔至賢、台北縣江翠國中黃明山、高雄縣鳳西國中葉仲恆、基隆市銘傳國中吳誌恩、北縣新莊國中吳之堯、福和國中吳霽庭、福和國中楊智寰、福和國中賈士卜。

(2)本題答題人數共 35 人，平均得分為 2.37 分，得分率為 34%