遞迴關係在計數問題的應用

許介彥
大葉大學　通訊與計算機工程學系

前言

在本刊第 238 期「遞迴函數的求解技巧」一文中，筆者舉例說明了幾種特定形式的遞迴函數求解的方法，並曾提及「遞迴」(recurrence）的概念在許多演算法的設計及計數（counting）問題的求解上扮演著重要的角色。本文延續上文，將透過一些例子來說明遞迴在計數問題的應用。

數列的表示方式

一個數列（sequence）可以有許多不同的表示方式。常見的一種方式是列出數列的最前面幾項，後面的部分則以「. . .」表示，例如某個數列可能被表示成

3, 5, 7, . . .

這樣的方式很容易造成誤解；除非另外聲明此數列是等差數列或是滿足其他特定性質的數列，否則我們無法只根據一個數列的最前面幾項來推斷它往後的發展。以上面的例子而言，它除了可能是一個等差數列外，也可能是由 3 開始的所有質數形成的數列，或是其他性質較不明顯的數列，因此第四項有可能是 9，或是 11，或是其他的數。

數列的第二種表示方式是將數列的每一項都用「通式」來表示，例如將某個數列定義為

$a_n = 3n+5\times(-1)^n$, $n\geq 0$

以通式來定義數列的好處是數列的每一項都可以很明確地經由一定的算術運算求得；以上面的例子而言，此數列的第一項為

$a_0=3\times 0+5\times(-1)^0=5$

第三十項為

$a_{29}=3\times 29+5\times(-1)^{29}=82$

有些數列由於性質特殊，要求得通式非常困難，有時候甚至根本無法求得，不過它們卻可能可以用另一種方式——遞迴的方式——來加以定義。我們之前在介紹函數的遞迴定義時曾經提過，一個遞迴的定義必須包含遞迴關係（recurrence relation）及邊界條件（boundary condition）兩個部分。在以遞迴的方式定義數列時，遞迴關係表明了數列的某一項與其他項之間的關係，而邊界條件則是數列最前面幾項的值；由於涉及數列的頭幾項，因此邊界條件常又稱為「初始條件」(initial condition）。

舉例來說，以下是某個數列的遞迴定義：

$$b_n=\begin{cases}1 & n=1\\ 3 & n=2\\ b_{n-2}+b_{n-1} & n\geq 3\end{cases}$$

此定義包含了數列最前面兩項的值（初始條件），並且表明了往後的每一項如何由其他項的值求得（遞迴關係）。有了上面的定義，除了 $b_1 = 1$ 及 $b_2 = 3$ 為已知外，

$b_3 = b_1 + b_2 = 1 + 3 = 4$

$b_4 = b_2 + b_3 = 3 + 4 = 7$

$b_5 = b_3 + b_4 = 4 + 7 = 11$

⋮

依此類推，數列的最前面幾項依序為1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, . . .只要 n 是一個正整數，b_n 即可求得。

上面的遞迴關係中，由於必須先求得 b_{n-2} 與 b_{n-1} 才能求得 b_n，因此初始條件必須包含數列的最前面兩項的值，才可以作為往後一系列計算的起點；如果初始條件只包含數列的第一項的話是不夠的。讀者不難察覺這個概念其實和數學歸納法的証明原理相當類似，遞迴定義的初始條件就相當於數學歸納法的basis，而遞迴關係就相當於數學歸納法的inductive step。請讀者特別注意遞迴定義的初始條件必須包含「足夠」的資訊，否則是無法向後推的，至於要包含數列的最前面多少項才算「足夠」則要視遞迴關係而定。

例題

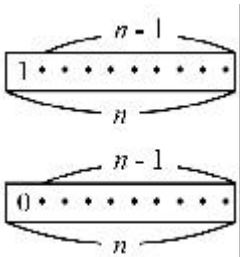
問題一：

一個位元（bit）可能是一個0或是一個1；由一連串位元排列而成的字串稱為位元字串（bit string），而一個位元字串所包含的位元個數稱為該位元字串的長度。長度為1的位元字串共有兩個：0與1；長度為2的位元字串共有四個：00、01、10、11；一般而言，長度為 n 的位元字串共有 2^n 個。

假設 a_n 代表長度為 n 的位元字串中，不包含連續兩個0的字串的個數，試用遞迴的方式定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$。

解：

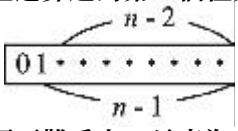
長度為 n 的位元字串可分為兩類，一類是以1開頭，另一類是以0開頭，如下圖所示：



如果我們能求出這兩類字串中不包含連續兩個0的字串各有幾個，那麼 a_n 應該就是這兩數的和。

由上圖不難看出，長度為 n 而且以1開頭的字串中，不包含連續兩個0的字串個數應該就等於長度為 n-1而且不包含連續兩個0的字串個數，也就是數列的第 n-1項（即 a_{n-1}）的值。

考慮任意一個長度為 n（$n\geq 3$）而且以0開頭的字串，如果此字串中不包含連續兩個0，那麼它由左邊算起的第二個位元必定是1：



由上圖不難看出，長度為 n 而且以01開頭的字串中，不包含連續兩個0的字串個數應該就等於長度為 n-2而且不包含連續兩個0的字串個數，也就是數列的第 n-2項（即 a_{n-2}）的值。

因此，我們已經找到了一個遞迴關係：$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$。由於 a_n 的計算牽涉到數列中的前兩項，因此初始條件必須包含數列的最前面兩項（也就是 a_1 與 a_2）的值。由題意很明顯可知 $a_1 = 2$ 且 $a_2 = 3$，因此完整的遞迴定義如下：

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ 3 & n = 2 \\ a_{n-1} + a_{n-2} & n > 2 \end{cases}$$

由於遞迴關係是將數列的某一項以其他項的值表示，因此當我們想要用遞迴的方式

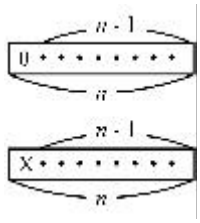
定義一個數列時，第一個必須問自己的問題是：如果這個數列的第一項、第二項、……、第 n-1 項的值都已知的話，對求出第 n 項有沒有幫助呢？也就是假設這個數列的第一項至第 n-1 項都已知，然後想辦法將第 n 項的值利用這些已知的值表示出來。如果這樣的遞迴關係真的能被找到，剩下的工作就只是求出數列最前面幾項的值來當做初始條件而已了，這通常要比找出遞迴關係容易得多。

問題二：

一個由阿拉伯數字（0 ~ 9）排列而成的字串中，0 出現的個數不是奇數就是偶數；例如：字串 503602 中，0 出現了兩次，因此 0 的個數為偶數；字串 120987045608 中，0 出現了三次，因此 0 的個數為奇數。假設 a_n 代表由 n 個阿拉伯數字排列而成的字串中，數字 0 出現的個數為偶數的字串的個數，試用遞迴的方式定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$。

解：

長度為 n 的字串可以分為兩類，一類是以 0 開頭，另一類不是以 0 開頭，如下圖所示（圖中的 X 是不等於 0 的任何一個阿拉伯數字）：



如果我們能求出這兩類字串中，0 出現的個數為偶數的字串各有幾個，那麼 a_n 應該就是這兩數的和。

由上圖不難看出，長度為 n 而且以 0 開頭的字串中，0 出現的個數為偶數的字串個數應該就等於長度為 n-1 而且 0 出現的個數為奇數的字串個數；由於長度為 n-1 的字串總共有 10^{n-1} 個而其中 0 出現的個數為偶數的字串共有 a_{n-1} 個，因此長度為 n-1 而且 0 出現的個數為奇數的字串總共有$(10^{n-1} - a_{n-1})$個。

接著考慮長度為 n 而且以 1 開頭的字串的情況。所有這種字串中，0 出現的個數為偶數的字串個數應該就等於長度為 n-1 而且 0 出現的個數為偶數的字串個數，也就是 a_{n-1}。依此類推，長度為 n 而且以由 2 至 9 的任意一個數字開頭的字串中，0 出現的個數為偶數的字串個數也都是 a_{n-1}，因此長度為 n 而且不以 0 開頭的字串中，0 出現的個數為偶數的字串總共有 $9a_{n-1}$ 個。

因此，我們已經找到了一個遞迴關係：$a_n = (10^{n-1} - a_{n-1}) + 9a_{n-1} = 10^{n-1} + 8a_{n-1}$。由於此遞迴只牽涉到數列中與 a_n 相鄰的前一項，因此初始條件只須包含數列的第一項（也就是 a_1）的值。

由題意很明顯可知 $a_1 = 9$，因為長度為 1 的字串總共有十個，這十個字串中除了 0 以外，其他九個字串的每一個所含的 0 的個數都是 0 個，而 0 為偶數。

因此完整的遞迴定義如下：

$$a_n = \begin{cases} 9 & n=1 \\ 10^{n-1}+8a_{n-1} & n>1 \end{cases}$$

讀者不難推導出此數列的通式為

$a_n = 5\times 10^{n-1} + 4\times 8^{n-1}$, $\forall n \geq 1$.

問題三：

假設平面上任意 n 條直線最多可將平面劃分為 a_n 個區域，試用遞迴的方式定義數列 $a_0, a_1, a_2, \ldots$。

解：

根據題意，很明顯，$a_0 = 1$ 且 $a_1 = 2$。

假設平面上已經有 n-1 條直線而且平面已經被它們依最大的可能劃分為 a_{n-1} 個區域。當我們再加上一條線，使得平面上有 n 條直線時，這條新的直線最多能讓平面上多出幾個區域呢？

為了讓區域數盡量多，新加入的直線不能與任何舊的直線重合，否則對增加區域數沒有任何幫助。由於任意兩條不重合的直線最多只有一個交點，因此新加入的直線與原有的 n-1 條直線最多可能交於 n-1 個不同的點（這個情形發生在新線不與任何舊線平行而且沒有三線共點的情形時），新的直線因此最多可以被這 n-1 個不同的點分為 n 段；由於這 n 段的每一段都將一個舊的區域一分為二，因此第 n 條線最多可以為平面增加 n 個區域；至此，我們有了一個基本的遞迴關係：$a_n = a_{n-1} + n$。

由於此遞迴只牽涉到數列中與 a_n 相鄰的前一項，因此初始條件只須包含數列的第一項（也就是 a_0）的值。完整的遞迴定義如下：

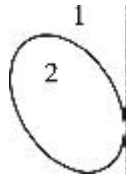
$$a_n = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ a_{n-1} + n & n > 0 \end{cases}$$

讀者不難推導出此數列的通式為

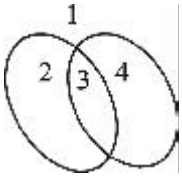
$$a_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1 \quad , \quad \forall n \geq 0.$$

問題四：

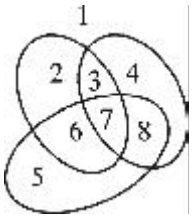
平面上有 n 個橢圓，這些橢圓中，任意兩個橢圓都不多不少正好有兩個交點，而且沒有三個橢圓相交於同一點的情形。假設這 n 個橢圓將平面劃分為 a_n 個區域，試用遞迴的方式定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$.（下圖為 n 的值分別為 1, 2, 3 時的情形）。



一個橢圓，$a_1 = 2$



兩個橢圓，$a_2 = 4$



三個橢圓，$a_3 = 8$

解：

假設平面上已經有 n-1 個橢圓而且平面已經被它們劃分為 a_{n-1} 個區域。當我們再加上一個橢圓，使得平面上有 n 個橢圓時，由於這個新的橢圓與每個舊的橢圓有兩個交點，因此新的橢圓與舊的 n-1 個橢圓交於 $2(n-1)$ 個不同的點，新的橢圓被這些點分成了 $2(n-1)$ 段。由於這 $2(n-1)$ 段的每一段都會將一個舊的區域一分為二，因此第 n 個橢圓可以為平面增加 $2(n-1)$ 個區域；至此，我們有了一個基本的遞迴關係：$a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$。

由於此遞迴只牽涉到數列中與 a_n 相鄰的前一項，因此初始條件只須包含數列的第一項（也就是 a_1）的值。完整的遞迴定義如下：

$$a_n = \begin{cases} 2 & n = 1 \\ a_{n-1} + 2(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

讀者不難推導出此數列的通式為

$$a_n = n^2 - n + 2, \quad \forall n \geq 1.$$

問題五：

假設 a_n 代表每一項皆為整數而且首項與

末項分別為 1 與 n 的嚴格遞增數列的個數，試用遞迴的方式定義數列 $a_1, a_2, a_3, \ldots$。

解：

所有首項為 1 且末項為 n 的嚴格遞增數列中，末項的前一項共有$(n-1)$個可能的值；它可能是$(n-1)$，或是$(n-2)$，或是任何一個介於 1 與$(n-1)$(包括 1 與$(n-1)$)之間的數。

由於所有首項為 1 且末項為 n 的嚴格遞增數列中，末項的前一項為 $n-1$ 的數列共有 a_{n-1} 個，末項的前一項為 $n-2$ 的數列共有 a_{n-2} 個，……，末項的前一項為 1 的數列共有 a_1 個，因此，我們有了以下的遞迴關係：

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1 = \sum_{i=1}^{n-1} a_i$$

根據題意，很明顯地，$a_1=1$，因此完整的遞迴定義如下：

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ \sum_{i=1}^{n-1} a_i & n>1 \end{cases}$$

請讀者注意上面的遞迴關係中，雖然 a_n 的計算涉及數列中位於 a_n 之前的全部$(n-1)$項，但是起始條件只需包含 a_1 的值就夠了，因為由 a_1 可算出 a_2，由 a_1 與 a_2 可算出 a_3，由 a_1、a_2 與 a_3 又可算出 a_4 等；只要 n 是正整數，a_n 即可求得。

上面的遞迴定義並不是唯一的方式；當 $n>2$，經由簡單的推導：

$$\begin{aligned} a_n &= a_{n-1} + a_{n-2} + \cdots + a_1 \\ &= a_{n-1} + (a_{n-2} + \cdots + a_1) \\ &= a_{n-1} + a_{n-1} \\ &= 2a_{n-1} \end{aligned}$$

我們發現同樣的數列可以用以下更簡潔的方式來定義：

$$a_n = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 2a_{n-1} & n>2 \end{cases}$$

由這個定義不難推導出當 $n \geq 2$，$a_n=2^{n-2}$。這麼簡單的式子當然值得我們探尋是否存在著一個簡單的解釋；仔細一想，讀者很容易就能看出其中的道理，因為每個大於 1 且小於 n 的整數(這樣的整數總共有$(n-2)$個)都可能出現或是不出現於一個首項為 1 且末項為 n 的嚴格遞增數列中，因此總共有 2^{n-2} 種不同的情形。

建議讀者試試看從數列的觀點解釋為什麼 $a_n=2a_{n-1}$ 成立。

問題六：

四個數相乘：$x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$，如果用小括號括出可能的計算次序，共有以下 5 種不同的括法：

$((x_0 \cdot x_1) \cdot x_2) \cdot x_3$

$(x_0 \cdot x_1) \cdot (x_2 \cdot x_3)$

$(x_0 \cdot (x_1 \cdot x_2)) \cdot x_3$

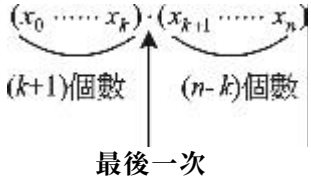
$x_0 \cdot ((x_1 \cdot x_2) \cdot x_3)$

$x_0 \cdot (x_1 \cdot (x_2 \cdot x_3))$

假設 C_n 代表 $n+1$ 個數相乘（$x_0 \cdot x_1 \cdots\cdots x_n$）時，不同的括法有幾種，試用遞迴的方式定義數列 $C_0, C_1, C_2, \ldots$。

解：

不管小括號怎麼括，$n+1$ 個數相乘必定牽涉到 n 次的乘法運算。假設最後一次相乘是發生在 x_k 與 x_{k+1} 之間：



最後一次

將這 $n+1$ 個數依最後一次乘法的位置看

成是由前後兩段組成，前段有 k+1 個數相乘，後段則有 n-k 個數相乘。由於 k+1 個數相乘有 C_k 種不同的括法且 n-k 個數相乘有 C_{n-k-1} 種不同的括法，因此如果最後一次相乘是發生在 x_k 與 x_{k+1} 之間，共有 $C_k \times C_{n-k-1}$ 種不同的括法。

最後一次相乘可能發生在許多位置，可能在 x_0 與 x_1 之間、x_1 與 x_2 之間、x_2 與 x_3 之間、……、x_{n-1} 與 x_n 之間等，因此 k 可能的值最小為 0，最大為 n-1；n+1 個數相乘，不同的括法數應該就是以上各個不同位置所對應到的不同的括法數的總和。因此，

C_n =（k = 0 時的括法數）+（k = 1 時的括法數）+ …… +（k = n - 1 時的括法數）

$= C_0C_{n-1} + C_1C_{n-2} + \cdots\cdots + C_{n-1}C_0$

$= \sum_{k=0}^{n-1} C_k C_{n-k-1}$

至此，我們已經找到了一個遞迴關係；至於初始條件，只須包含數列的第一項 C_0 = 1 即可，往後的每一項可以由此為起點陸續算出，例如：

$C_1 = C_0C_0 = 1$

$C_2 = C_0C_1 + C_1C_0 = 1 + 1 = 2$

$C_3 = C_0C_2 + C_1C_1 + C_2C_0$

$= 2 + 1 + 2 = 5$

$C_4 = C_0C_3 + C_1C_2 + C_2C_1 + C_3C_0$

$= 5 + 2 + 2 + 5 = 14$ 等。

以上由 $C_0, C_1, C_2, \ldots$ 形成的數列在數學上稱為 Catalan numbers，這個數列的最前面十項依序為 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796，通式則為

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}, \quad \forall n \geq 0.$$

結語

用遞迴的方式定義數列其實和用遞迴的方式定義函數很類似；數列可以看成是由{0, 1, 2, ...}(或{1, 2, 3, ...}）對應到實數或整數的函數。

數列的遞迴定義方式雖然沒有像用通式那麼直接了當，但是這種方式可以表示的數列種類卻比用通式更多，而且在許多情況下更方便，因為有許多數列的通式是很難求得的；對於這類數列，當我們想要知道數列的某一項是多少，常可迂迴地先將該數列以遞迴的方式定義，再由起始條件開始逐項往後算出所要的值。

當然，如果我們想要很快地算出數列的某一項（例如：第一百項）的值，我們會比較希望該數列是用通式的方式表示，因為這樣的話只要經過一定數量的計算就能得到結果；如果是用遞迴的方式定義，一個表面上看起來不複雜的遞迴關係背後卻可能隱含著可觀的計算量，使得即使是透過電腦快速的計算能力都不能在短時間內算出結果；因為這個原因，數學家發展出了許多由遞迴的定義推導出通式的方法；上篇文章中筆者已經介紹了一部分這方面的技巧，有機會將另文介紹。

參考資料

1.許介彥（2001），遞迴函數的求解技巧，科學教育月刊，第238期。

2.Susanna. S. Epp, *Discrete Mathematics with Applications*, 2nd edition, Brooks/Cole, 1995.

3.Kenneth. H. Rosen, *Discrete Mathematics and Its Applications*, 4th edition, McGraw-Hill, 1999.

作者信箱：chsu@mail.dyu.edu.tw