數學解題中「分與合」的推演

許建銘
高雄市立龍華國民中學

一、前言：

一般人想到「分分合合」四個字，可能會聯想到人生際遇。不過若我們仔細想想自己的學習數學之路，難道不也是一段「分分合合」甚至還愛上「難分難合」的推演歷程。

高斯(Gauss 1777-1855)十歲解算術：「計算 1＋2＋3＋…＋100=？」他藉由數目的「配對結合」，快速而正確算出總和為 5050。

萊布尼茲（Leibniz 1646-1716）當年解連續「三角數」倒數和的無窮級數：「$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\cdots\cdots$」他將各項先除以 2 得到：「$\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots\cdots$」，改寫式子並「分項對消」成「$(1-\cancel{\frac{1}{2}})+(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}})+(\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}})+(\cancel{\frac{1}{4}}-\cancel{\frac{1}{5}})+\cdots\cdots$」因而輕易計算出總和為 2。

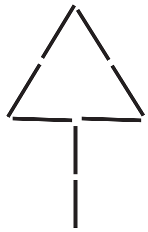
數學的解題世界裡，一切的思維與策略，沒有現實社會裡虛華而複雜的因素，「分與合」就考量其「分工合作」、「化繁為簡」。藉著解題推演中思想與習性的導正和陶冶，培養學習者解決問題的認「真」態度，進而豐富其「善」的機智並提升「美」的鑑賞力。

二、本文：

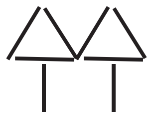
(一)我在上國三「相似形」時，設計了一道兩小題的問題隨堂問學生：

下雨天，小明撐了一把傘，如圖(一)由八根火柴棒拼成的圖是實傘的正視平面圖：

(1)小明在路上遇見忘記帶傘的小華，如何只移動四根火柴棒，使小華也有一把傘可以遮雨？



圖(一)



圖(二)

圖(三)

這樣的問題，班上大部分的學生不花半分鐘的時間都想得出將一把傘「分」成兩把傘如圖(二)的答案。

(2)承第(1)題，如果又來了 2 人，請由圖(二)再移動四根火柴棒，使四個人都有傘可以遮雨？

此時，部分同學開始交頭接耳，有些人忙著「分」傘。不久就有人講出如圖(三)四把開花雨傘的答案，但隨即惹來不少笑聲，不過我也鼓勵性的口頭肯定這個答案。最後我公佈答案：就是「合」成圖(一)的原圖傘，理由是：圖(一)和圖(二)都是「相似傘」，而圖(一)的實傘，其傘下的圓半徑是圖(二)任一把實傘的 2 倍，因此實傘下可以遮雨的圓面積是圖(二)任一把實傘下的圓面積的 4 倍。若圖(二)的一把傘可讓

一人撐來遮雨，則圖(一)的傘便可讓四人同時撐來遮雨。

(二)「合」與「分」並非對立，相反的，它們相依相生。「合」與「分」或可期許得到規律性、定理化以化繁為簡，而其完整思考的內涵也往往蘊含不同層次的解題智慧與思考價值，請比較以下四個問題的各個解法與想法。

【問題一】：

求 $(\frac{59}{60}+\frac{117}{120}+\frac{37}{40}+\frac{239}{240})\div 4$ 之值。

解一：

求值式 $=(\frac{236}{240}+\frac{234}{240}+\frac{222}{240}+\frac{239}{240})\div 4=$

$\frac{236+234+222+239}{960}=\frac{931}{960}$

解二：

求值式 $=1-(\frac{1}{60}+\frac{3}{120}+\frac{3}{40}+\frac{1}{240})\div 4=1-$

$\frac{29}{240}\div 4=1-\frac{29}{960}=\frac{931}{960}$

【問題二】：

計算 1+2-3+4+5-6+7+8-9+……+97+98-99 之值。

解一：

求值式 = (1+4+7+11+……+97)+(2+5+8+……+98)-(3+6+9+……+99)

$=\frac{33[(1+97)+(2+98)-(3+99)]}{2}=\frac{33\times 96}{2}=33\times 48$

$=1584$

解二：

求值式 = (1+2+4+5+7+8+……+97+98)-(3+6+9+……+99)=(3+9+15+……+195)-(3+6+9+……+99)= $\frac{33[(3+195)-(3+99)]}{2}$

$=\frac{33\times 96}{2}=33\times 48=1584$

解三：

求值式 = (1+2-3)+(4+5-6)+(7+8-9)+……+(97+98-99)=0+3+6+……+96= $\frac{32(3+96)}{2}$

$=16\times 99=1584$

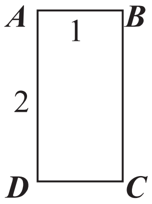
【問題三】：

矩形 ABCD(如圖(四))中，已知 $\overline{AB}=1$，$\overline{AD}=2$，若以 C 為圓心，整個矩形順轉 90°，求 $\overline{AD}$ 掃過的面積。

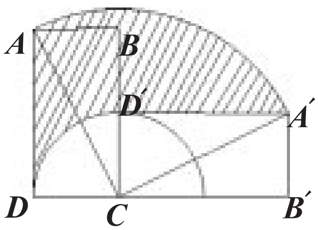
解一：

如圖(五)，$\overline{AD}$ 掃過的斜線面積= ΔACD 面積 + 扇形 ACA' 面積 - 扇形 DCD' 面積 - $-\Delta CD'A'$ 面積 $=1+\frac{1}{4}\times\pi(\sqrt{5})^2-\frac{1}{4}\times\pi(1)^2-1$

$=\frac{5}{4}\pi-\frac{1}{4}\pi=\pi$



圖(四)



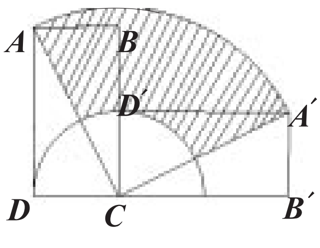
圖(五)

解二：

$\because \Delta ADC\cong\Delta A'D'C$

$\therefore$ 圖(五)的斜線面積 = 圖(六)的斜線面積

$=\frac{1}{4}\pi\left[(\sqrt{5})^2-1^2\right]=\pi$

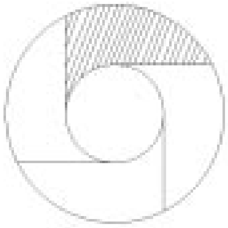


圖(六)

解三：

如圖(七)，$\overline{AD}$ 掃過的斜線面積

$=\frac{1}{4}\pi\left[(\sqrt{5})^2-1^2\right]=\pi$



圖(七)

【問題四】：

甲、乙兩人同時從一矩形游泳池的某水道兩端，用固定速度相向游泳，兩人第一次途中相遇處距離甲出發這端有 40 公尺，然後繼續前進，且都到達另一端立即折返，第二次相遇處距離乙出發一端 20 公尺，求水道長？

解一：

先分別考慮兩人在第一次相遇前與第一次到第二次相遇時所游的距離與時間。

設水道長 l 公尺，甲、乙游泳速率每分鐘分別是 x 與 y 公尺。

$$\begin{cases} \dfrac{40}{x}=\dfrac{l-40}{y} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{l-40+20}{x}=\dfrac{40+l-20}{y} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$\dfrac{(1)}{(2)} \Rightarrow \dfrac{40}{l-20}=\dfrac{l-40}{l+20} \Rightarrow l^2-100l=0 \Rightarrow l=0$ (不合)或 l =100

解二：

先分別考慮兩人在第一次相遇前與第二次相遇前所游的距離與時間。

設水道長 l 公尺，甲、乙游泳速率每分鐘分別是 x 與 y 公尺。

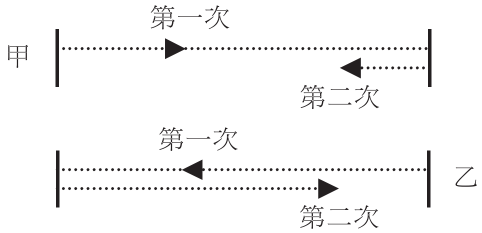
$$\begin{cases} \dfrac{40}{x}=\dfrac{l-40}{y} \cdots\cdots\cdots (1) \\ \dfrac{l+20}{x}=\dfrac{2l-20}{y} \cdots\cdots (2) \end{cases}$$

$\dfrac{(1)\text{式}}{(2)\text{式}} \Rightarrow \dfrac{40}{l+20}=\dfrac{l-40}{2l-20} \Rightarrow l^2-100l=0 \Rightarrow l=0$ (不合)或 l=100

解三：

考慮兩人「合」泳情形：第一次相遇兩人「合」泳的距離等於水道長；第二次相遇前兩人「合」泳的距離等於 3 倍水道長。所以甲第二次與乙相遇時游的距離是第一次相遇的 3 倍，意即第二次兩人相遇時甲游 $40\times3=120$(公尺)。

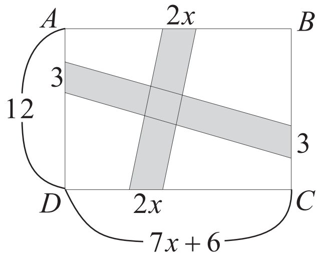
$\therefore$ 水道長 =120-20=100(公尺)。



(四)目前市售的學生用數學參考書籍多如牛毛，我在一本「數學講義」裡看到這道問題，因為是「教師用」的版本，所以附有解答。我將其問題連同「解答」一併抄寫如下，請讀者想一想各小題的「解答」內容，再看下段內容。

【問題】：

如圖，回答下列各問題：



(1)長方形 ABCD 的周長。(以 x 表示)

(2)長方形 ABCD 的面積。(以 x 表示)

(3)灰色以外部分的面積。(以 x 表示)

(4)灰色部分的面積。(以 x 表示)

解：

(1) $2\times(7x+6+12)=14x+36$

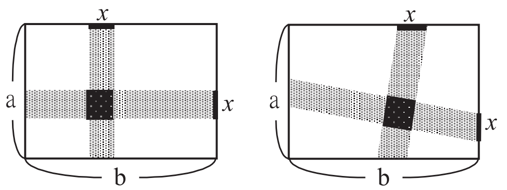
(2) $(7x+6)\times 12=84x+72$

(3) $(7x+6-2x)\times(12-3)=(5x+6)\times 9=45x+54$

(4) $(84x+72)-(45x+54)=39x+18$

以下這段內容，則是我在教學活動中與學生討論問題的片段實錄：

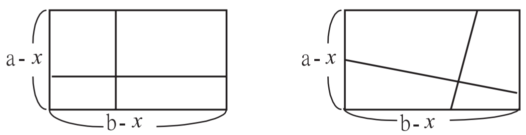
師：這裡有兩個圖，在兩個矩形中各有兩條平行的馬路，請同學比較馬路以外的面積大小。



生：相等。【以下所指的「生」不一定指同一學生】

師：這位同學能否說明你認為「相等」的理由。

生：馬路以外的四個部份合起來就知道了。【學生上台後在黑板畫了左、右兩圖】



師：有什麼理由說明馬路以外的四個部份可以拼成右圖呢？

生：因為馬路是平行四邊形，兩條馬路的交會處也是平行四邊形，所以兩邊都等長，可以確定去掉馬路後兩邊可以完全重合。

師：你的推論滿好的。不過這一條馬路的兩邊可以完全重合起來，另外這一條的兩邊也可以完全重合，如此便可以確認會同時重合成右圖嗎？

生：應該會吧！

師：只張開右眼可以看到東西嗎？

生：可以。【許多學生齊聲說出】

師：只張開左眼可以看到東西嗎？

生：可以。

師：兩眼都張開可以看到東西嗎？

生：可以啊！【學生以為老師引例失敗，忍不住發笑】

師：那只閉上右眼可以看到東西嗎？

生：可以。

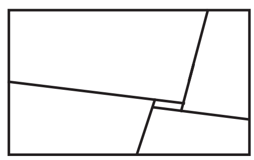
師：只閉左眼可以看到東西嗎？

生：可以。

師：兩眼都閉起來可以看到東西嗎？

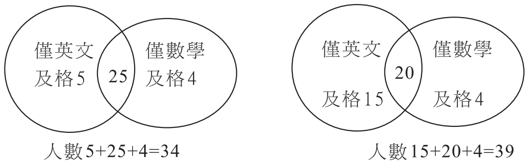
生：當然也……不可以。

師：所以說分開做得好的事，合起來就難說了！【拿出事先剪好的磁鐵板，將正確的拼圖(如下圖)貼在黑板】看圖再想一想面積會相等嗎？有沒有人願意表示其它看法？



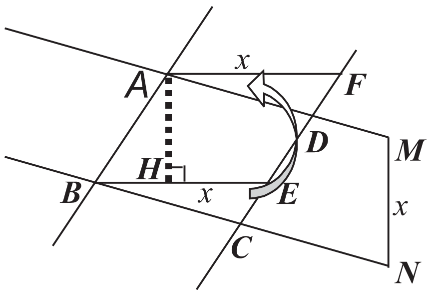
生：可是左、右兩圖的兩條馬路面積都分別相等，所以馬路的總面積相等，那麼馬路以外的面積也應該相等才對。

師：老師現在舉個例子：你們班段考英文及格有30人，數學及格29人；隔壁班英文及格有35人，數學及格24人，請問兩個班級中，英文或數學及格的人數有一樣嗎？【在黑板畫圖說明，如下圖】



師：所以說應該是不一定！問題就出在：雖然兩個班級英文及格的人數與數學及格的人數加起來都是 59 人，但是你們班這兩科都及格的人數是 25 人，而隔壁班這兩科都及格的人數是 20 人，所以兩個班級中，英文或數學及格的人數並不相同。

師：現在讓我們回到原問題中，並實際比較兩個矩形圖中馬路重疊處的面積大小。【在黑板畫出馬路重疊處的圖 (如下圖)，並比較說明】



作 $\overline{BE}$， $\overline{AF}$ 均與矩形的一邊平行(如圖)
$\Rightarrow \overline{BE}=\overline{AF}=x$ 因為 $\Delta BCE \cong \Delta ADF$

所以平行四邊形ABCD面積=平行四邊形ABEF 面積 $=\overline{BE}\times\overline{AH}<\overline{BE}\times\overline{MN}=x\cdot x=x^2$ = 原問題左圖馬路重疊處的面積⇒左圖馬路面積小於右圖馬路的面積。

因此左圖馬路以外的面積大於右圖馬路以外的面積。

三、結論：

台灣有句俗話說：「騙三歲囝仔！」話中意含著：三歲左右的小孩子是容易受騙的。不相信的話，將兩杯半滿與一杯滿杯的果汁，分別給愛喝果汁，一個三歲和一個四歲的兩兄弟，可能就有一場哭鬧戲看了！

可是，仍然有不少十三、四歲的國中生「搞不懂」下面這道問題：「各取 6% 與 12% 的食鹽水多少克，可以混合成 10% 的食鹽水 240 克？」其實，青少年學生對「吃東西」與「花錢」是富有感覺的。如果教師在教學講解此問題時能夠適時加入學生可以體驗的「動態情境」：「兩 杯食鹽水分開喝進肚子跟混合後再喝進肚子，喝下去的味道會不會不同？喝進去的食鹽水有沒有一樣多？喝進去的食鹽有沒有一樣多？」多了這道「加料」聯想的催化和啟發，一些有所茫然的學生可能會因為更明白題意、確立解題方向而列對類似問題的方程組。

大多數的數學教師都說數學簡單，可是卻有許多學生討厭數學。或許教師值得想想：有沒有必要把數學「教」得那麼艱澀與無趣！