九十年度大學數學學力測驗試題與解答

編輯室

一、前言

九十年度大學數學系及應用數學系學生數學學力測驗已於今年九月二十二日(星期六)下午於東華大學、高雄師範大學、成功大學、彰化師範大學、中正大學、逢甲大學、清華大學、中原大學、大同大學及臺灣師範大學分部等十所大學同時舉行，此次考試科目及命題範圍仍如去年，考微積分及線性代數兩科。學生可報考兩科目或任選一科目報考。每科測驗時間為 100 分鐘。微積分包括：極限、單變數的微分、積分、級數、數列、偏微分、多變數的重積分(曲面積分除外)。線性代數包括：向量空間與線性變換、行列式與矩陣、線性方程組、特徵值與特徵向量、方陣的對角化、二次型。

二、微積分試題

第一部分：選擇題(每題恰有一個選項是正確的，答對得 5 分，答錯不倒扣，共 50 分，請將答案劃記在答案卡上。)

1.設 $f\,[0,10]\to\mathrm{R}$ 為一連續函數，則下列敘述哪些恆正確?

(甲)為有界函數

(乙)有絕對極大值及絕對極小值

(丙)為可微分函數

(丁)為可積分函數

(1)僅(甲)、(乙)、(丁) 正確；

(2)僅(乙)、(丙)、(丁) 正確；

(3)僅(甲)、(乙)、(丙) 正確；

(4) 僅(甲)、(丙)、(丁) 正確 。

2.設 $f(2)=1,\ f'(1)=0,\ f'(2)=2,\ f''(1)=-1,$ $f''(2)=3$則下列何者正確？

(1) $(f\circ f)'(2)=2$ ；

(2) $(f\circ f)'(2)=4$ ；

(3) $(f\circ f)''(2)=12$ ；

(4) $(f\circ f)''(2)=-4$ 。

3．設 $a_1=1$，且對每一個正整數 n，$a_{n+1}=\sqrt{5a_n}$，則下列哪一個敘述不正確?

(1) $\langle a_n\rangle$ 為一遞增數列；

(2) $\langle a_n\rangle$ 有下界但無上界；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=0$ ；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在。

4.設 $f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 為有理數}\\ x, & \text{若 } x \text{ 為無理數}\end{cases}$，$g(x)=[x]$，其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，則下列哪些敘述是正確的?

(甲) $\lim\limits_{x\to0}(f\circ f)(x)$ 存在

(乙) $\lim\limits_{x\to0}(g\circ g)(x)$ 存在

(丙) $\lim\limits_{x\to0}(f\circ g)(x)$ 存在

(丁) $\lim\limits_{x\to0}(g\circ f)(x)$ 存在

(1)僅(甲)、(乙)正確；

(2)僅(丙)、(丁)正確；

(3)僅(甲)、(丙)正確；

(4)僅(甲)、(丙)、(丁)正確 。

5.設 $f(x)=\begin{cases}x^4\sin\dfrac{1}{x}, & \text{若}x\neq0\\ 0, & \text{若}x=0\end{cases}$，則使得 $f^{(n)}(0)$ 存在的最大正整數 n 之值為何?

(1) 5 (2) 4 (3) 3 (4) 2

6.設 $f(x)=(2x+1)^{-1}$，則 $f^{(10)}(0)$之值為何?

(1)2^{-11}　(2)2^{11}

(3)$(10!)\times 2^{10}$　(4)$(11!)\times 2^{11}$

7.下列哪一個級數收斂?

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \sin\frac{1}{k}$

(2) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1^2\times 3^2\times\cdots\times(2k-1)^2}{(2k+1)!}$

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\ln k}{\sqrt{k}}$

(4) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k\ln k}$

8.下列哪一個敘述正確?

(1)若 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 為一正項級數且 $\lim_{n\to\infty} k\,a_k = 0$，則 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 為收斂級數；

(2)若 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ 為一收斂的正項級數，則 $\lim_{k\to\infty}\frac{b_{k+1}}{b_k}<1$；

(3)若 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ 為一收斂級數，則 $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ 亦為收斂級數；

(4)若 $\sum_{k=1}^{\infty} d_k$ 為一絕對收斂級數，則 $\sum_{k=1}^{\infty} \sin d_k$ 亦為絕對收斂級數。

9.設函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ 在 $x=4$ 時有相對極小值 0，且在 $x=1$ 時有反曲點，則下列哪一個正確?

(1)$a=-3, c=80$；　(2)$a=-3, b=24$；

(3)$a=3, b=24$；　(4)$b=24, c=80$。

10.下列四點都在橢球面 $2x^2+3y^2+4z^3=9$ 上，試問過其中哪一點的切平面會與平面互相平行?

(1) (1,1,1)　(2)(1,-1,1)

(3)(1,-1,-1)　(4)(-1,-1,1)

第二部分：填充題(甲至癸共十題，將答案依作答說明劃記在答案卡上所標示的列號11至27處。每題完全答對得5分，答錯不倒扣，未完全答對者不給分。如果答案是分數時，必須以最簡分數表示。)

甲. $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+4}(\sqrt{x+14}-\sqrt{x+6})$ 之值為⑪。

乙.若 $f(x)=\frac{360(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)}{(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)}$，則 $f'(2)$ 之值為⑫。

丙. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos 2x}$ 之值為 $\frac{⑬}{⑭}$。

丁.瑕積分 $\int_0^{\infty} x^2 e^{-3x}dx$ 之值為 $\frac{⑮}{⑯⑰}$。

戊.若 f 為一連續函數且對所有 $x\ge 0$，恆有 $\int_0^{x^4} f(t)\,dt = x^4(1+x^4)$，則 $f(16)$之值為⑱⑲。

己.若 f：[0, 8] → R 為一連續函數且 $\int_0^8 f(x)\,dx=21$，則 $\int_0^2 x^2 f(x^3)\,dx$ 之值為⑳。

庚.正弦曲線 $y=\sin x$ 與餘弦曲線 $y=\cos x$ 在 $-\frac{3}{4}p\le x\le\frac{5}{4}p$ 之間所圍成區域的面積為㉑$\sqrt{㉒}$。

辛.雙紐線 $r^2=8\cos 2\grave{e}$ 所圍成區域的面積為㉓。

壬.已知 $(1, 1, 2\sqrt{2})$ 為可微分函數 $z=f(x,y)$ 圖形上的一點，若此圖形與平面 $4\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-3z=0$ 相切於點$(1,1,2\sqrt{2})$，則函數 $z=f(x,y)$ 沿著向量 $\bar{u}=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ 之方向導數 $D_{\bar{u}}f(1,1)$ 為㉔。

癸.設Ω是由曲線 $y=4x^2, y=-5x^2$ 與直線 $x=1$ 所圍成的區域，若二重積分 $\iint_{\Omega} e^{x^3}dxdy$ 之值可表為 $Ae+B$，則數對(A,B)為(㉕,㉖㉗)。

三、線性代數試題

第一部分：選擇題 (每題5分，共60分，請將答案劃記在「答案卡」上。)

壹、單選題（每題恰有一個選項是正確的，答對得 5 分，答錯不倒扣。）

1.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 1 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$，則 A 的秩(rank)為何？

(1) 2　(2) 3　(3) 4　(4) 5

2.設 $V=\{(x,y,z,w)\in \boldsymbol{R}^4 : 3y+2z=0, 8y+2z+w=0, 2y-2z+w=0\}$，則 V 的維數為何？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4

3.設 A 為一個 7×6 階矩陣，$W_1=\{\bar{X}\in \boldsymbol{R}^6 : A\bar{X}=\bar{0}\}$ 且 $W_2=\{\bar{Y}\in \boldsymbol{R}^7 : \bar{Y}A=\bar{0}\}$。若 W_1 的維數為 4，則 W_2 的維數為何？

(1) 3　(2) 4　(3) 5　(4) 6

4.設 $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$，試問下列哪一個方陣與 A 相似？

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$　(2) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$　(3) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$　(4) $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

5.設 A 為二階實方陣且 $\det(A)=-1$，試問下列哪一個敘述不正確？

(1) $\det(-A)=-1$

(2) $\det(A^2)=1$

(3) A 為可逆矩陣

(4) A 不可對角化

6.設 A 為非零的實方陣，試問下列哪一個敘述不正確？

(1)若 A 為二階方陣且 $\det(A)=0$，則 A 的兩列向量線性相依；

(2)若 A 為二階方陣且 A 的兩列向量線性相依，則 $\det(A)=0$；

(3)若 A 為三階方陣且 $\det(A)=0$，則 A 中有兩列向量線性相依；

(4)若 A 為三階方陣且 A 中有兩列向量線性相依，則 $\det(A)=0$。

貳、多重選擇題（每題至少有一個選項是正確的。每個選項各自獨立，答對得 $\frac{5}{4}$ 分，答錯倒扣 $\frac{5}{4}$ 分；每題最低分數為 0 分；完全不答者得 0 分。）

7.設 $\begin{cases} ax_1+2x_2-x_3=1 \\ x_1-4x_2+x_3=-2 \\ 5x_1+2x_2=1 \end{cases}$ 為一線性方程組，試問下列哪些敘述是正確的？

(1)若 $a=0$，則此方程組無解；

(2)若 $a=1$，則此方程組有無窮多解；

(3)若 $a=3$，則此方程組有唯一解；

(4)不論 a 為何值，此方程組均有解。

8.設 T_i：$R^3\to R^3$ 為函數，$i=1,2,3,4$。對於任意(x_1,x_2,x_3)，$(y_1,y_2,y_3)\in R^3$，$T_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)$，$T_2(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_3,x_3-3x_1,x_2-x_3)$，$T_3(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2,x_2+x_3,x_3+1)$，$T_4(x_1+y_1,x_2+y_2,x_3+y_3)=T_4(x_1,x_2,x_3)+T_4(y_1,y_2,y_3)$。試問哪些函數是 R^2 上的線性變換？

(1) T_1　(2) T_2　(3) T_3　(4) T_4

9.設 V 為所有 n 階實方陣($n\geq 2$)所構成的向量空間，試問下列哪些集合是 V 的子空間？

(1) $W_1=\{A\in V : \mathrm{tr}(A)=0\}$，其中 $\mathrm{tr}(A)$ 表 A 的跡(trace)；

(2) $W_2=\{A\in V : \det(A)=0\}$，其中 det(A)表 A 的行列式(determinant)；

(3) $W_3=\{A\in V : A=-A^{\mathrm{T}}\}$，其中 A^T 表 A 的轉置矩陣(transpose)；

(4) $W_4=\{A\in V : AB=BA\}$，其中 B 為某一固定 n 階方陣。

10.設 $A=\begin{bmatrix}0&2&2\\2&0&2\\2&2&0\end{bmatrix}$ 且 $v\in \boldsymbol{R}^3$，試問下列哪些敘述是正確的？

(1) A 有三個相異的固有值(eigenvalue)；

(2) 若 $Av=5v$，則 v 是零向量；

(3) 若 $Av=4v$，則 $v=c\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$，其中 c 為實數；

(4) 若 $Av=-2v$，則 $v=c\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$，其中 c 為實數。

11.設 A 為一個三階實方陣，且其固有值為 1, -1 與 0，試問下列哪些敘述是正確的？

(1)A 可對角化

(2)A 為可逆方陣

(3)$A^2=A$

(4)$A^3=A$。

12.設 A 為一個非零的三階對稱實方陣且 $\det(A)=0$。試問下列哪些敘述是正確的？

(1)A 的秩不等於 3；

(2)若 A 的秩等於 1，則 A 恰有 2 個相異固有值；

(3)若 A 的秩等於 2，則 A 恰有 3 個相異固有值；

(4)0 必為 A 的固有值之一。

第二部分：填充題 (甲至辛題，將答案依作答說明劃記在「答案卡」上所標示的列號13至 35 處。每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對者不給分。)

甲.設 T 為 R^3 上的線性變換，$\{e_1,e_2e_3\}$為 R^3 上之標準有序基底(ordered basis)。

設 $\begin{cases}Te_1=e_1+e_2,\\Te_2=e_1+e_2,\\Te_3=e_1+e_3,\end{cases}$ 且設 $\begin{cases}u_1=e_1+2e_2+3e_3,\\u_2=e_1+2e_2,\\u_3=e_1.\end{cases}$

若 $\begin{cases}Tu_1=a_1u_1+a_2u_2+a_3u_3\\Tu_2=b_1u_1+b_2u_2+b_3u_3\\Tu_3=c_1u_1+c_2u_2+c_3u_3\end{cases}$，

則 $(a_1,b_2,a_3)=(\frac{⑬}{2},\frac{⑭}{2},\frac{⑮}{2})$。

乙.設 $A=\begin{bmatrix}1&0\\-2&1\end{bmatrix}$ 且 $A^{10}=\begin{bmatrix}*&*\\c&*\end{bmatrix}$，則 c= ⑯⑰⑱。

丙.設 $A=\begin{bmatrix}0&5&1&0\\5&0&5&0\\1&5&0&5\\0&0&5&0\end{bmatrix}$，且 A 有 a 個大於零的固有值和 b 個小於零的固有值，則(a,b)=(⑲,⑳)。

丁.設 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&0&1\end{bmatrix}$ 且 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$。若 $f(A)=aA^2+bA+cI_3$，其中 a,b,c 為實數，I_3 為三階的單位矩陣，則 (a,b,c)=(㉑㉒,㉓㉔,㉑㉕)。

戊.設 V 為由(1,0,0,0),(1,2,1,1)及(0,1,-1,2)所生成之 R^4 的子空間，W 為由(2,5,1,4)及(1,1,2,-1)所生成之 R^4 的子空間，且 $V+W$ 的維數是 a，$V\cap W$ 的維數是 b，則 (a,b)=(㉖,㉗)。

己.在 R^4 中，設 W 為由(0,0,1,1),(1,0,0,0)及(0,1,1,1)所生成之子空間，向量(2,3,3,1)在 W 上之正射影向量(orthogonal projection)為，(a,b,c,d)則 (a,b,c,d)=(㉘,㉙,㉚,㉛)。

(下轉第 39 頁)