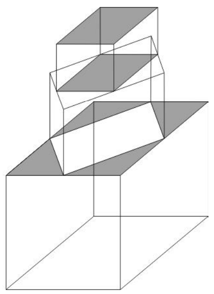
中學生通訊解題第十五期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
901501

有若十個大小不同的正立方體積木，由下而上堆成如右所示之塔形，使上面正方體底部的四個頂點，恰是下面正方體頂部各邊之中點。

已知最下面正方體的體積為 1，且從四周或上面能看到的表面積超過 8.9，試求這些正方體之個數至少有幾個？



參考解答：

假設有 k 個正方體，得其側面積的和為

$4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}})$

又由上方向下所看得面積恆為 1，由題意知 $4(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{k-1}})+1>8.9$

$\Rightarrow \dfrac{1-\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}>1.975 \qquad \Rightarrow 1-\frac{1}{2^k}>0.9875$

$\Rightarrow 0.0125>\frac{1}{2^k} \qquad \Rightarrow 2^k>80$

故 k 之最小值為 7，即上述正方體最少有 7 個。

評析：

1. 本題之關鍵在於 " 俯視面積 =1"，再加上四方側表面積，即可得一個不等式，解此不等式即得 " 至少 7 個 "。
2. 來函同學共 34 位。其中以台北縣福和國中 217 吳霽庭，台北市民生國中 202 張哲瑞，基隆市銘傳國中 210 呂敏中，台南市建興國中 215 黃信溢，之解答最完整詳盡。

問題編號
901502

設 $a=1+2+\cdots+10$， $b=1^2+2^2+\cdots+10^2$，$c=1^3+2^3+\cdots+10^3$ 及 $d=1^4+2^4+\cdots+10^4$ 自 1~10 中任選 2 個相異的數相乘，S 代表所有可能情形的和；自 1~10 中任選 4 個相異的數相乘，T 代表所有可能情形的和。

即 $S=1\times2+1\times3+1\times4+\cdots+8\times10+9\times10$，

$T=1\times2\times3\times4+1\times2\times3\times5+1\times2\times3\times6+\cdots+6\times8\times9\times10+7\times8\times9\times10$，

試以 a,b,c,d 的式子表示 S 、 T 。

參考解答：

＜解法一＞

$S=\frac{1}{2}(a^2-b)$，$T=\frac{1}{24}[a^4-6a^2b+8ac+3b^2-6d]$

1. 將 1,2,⋯⋯,9,10 任選二數 x 與 y 填入□×□中，亦即 $(1+2+\cdots+10)(1+2+\cdots+10)$ 的任一項，而當 $x=y$ 時即為 $1^2+2^2+\cdots+10^2$ 的任一項，注意 $x\le y$ 或 $x\ge y$，故可得
   $S=\frac{1}{2}\{(1+2+\cdots+10)(1+2+\cdots+10)-(1^2+2^2+\cdots+10^2)\}=\frac{1}{2}(a^2-b)$
2. 將 1,2,⋯⋯,9,10 任選 4 數 x,y,z,與 u 填入□×□×□×□中，亦即

$(1+2+\cdots\cdots+10)(1+2+\cdots\cdots+10)(1+2+\cdots\cdots+10)(1+2+\cdots\cdots+10)$的任一項，而當

(1) $x=y=z=u$ 時，表 $1^4+2^4+3^4\cdots\cdots+10^4$ 的任一項

(2) $x=y=z\neq u$ 時，表 $(1^3+2^3+\cdots\cdots+10^3)(1+2+\cdots\cdots+10)-(1^4+2^4+\cdots\cdots+10^4)$ 任一項

(3) $(x=y)\neq(z=u)$ 時，表 $(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)-(1^4+2^4+\cdots\cdots+10^4)$ 的任一項

(4) $x=y$ 且 x,z,u 兩兩不同時，表 $[(1^2+2^2+\cdots+10^2)(1+2+\cdots+10)^2-(1^2+2^2+\cdots+10^2)2-2(1^3+2^3+\cdots+10^3)(1+2+\cdots+10)+2(1^4+2^4+\cdots+10^4)$ 的任一項

（即扣除 $x\times x\times y\times y$， $x\times x\times x\times u$ 與 $x\times x\times z\times x$， $x\times x\times x\times x$）

由上知：

$$T=\frac{1}{24}\{(1+2+\cdots+10)^4-(1^4+2^4+\cdots+10^4)-4[(1^3+2^3+\cdots+10^3)(1+2+\cdots+10)-(1^4+2^4+\cdots+10^4)]-3[(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)^2-(1^4+2^4+\cdots\cdots+10^4)]-6[(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)(1+2+\cdots\cdots+10)^2-(1^2+2^2+\cdots\cdots+10^2)^2-2(1^3+2^3+\cdots\cdots+10^3)(1+2+\cdots\cdots+10)+2(1^4+2^4+\cdots\cdots+10^4)]\}$$

$$=\frac{1}{24}\{a^4-d-4[ac-d]-3[b^2-d]-6[ba^2-b^2-2ca+2d]\}$$

$$=\frac{1}{24}\{a^4-d-4ac+4d-3b^2+3d-6ba^2+6b^2+12ac-12d\}$$

$$=\frac{1}{24}\{a^4-6a^2b+8ac+3b^2-6d\}$$

【註：$n=10$， $T=\frac{1}{5760}(n-3)(n-2)(n-1)n(n+1)(15n^3+15n^2-10n-8)=157773$】

＜解法二＞

1.由題意 $a^2=(1+2+3+\cdots\cdots+10)^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots10^2)+2\ (1\times2+1\times3+1\times4+\cdots\cdots+8\times10+9\times10)=b+2S$ 所以 $S=\frac{a^2-b}{2}$

2.$S^2=(1\times2+1\times3+1\times4+\cdots\cdots+8\times10+9\times10)^2=(1^2\times2^2+1^2\times3^2+1^2\times4^2+\cdots+9^2\times10^2)+2(1^2\times2\times3+1^2\times2\times4+\cdots+10^2\times7\times9+10^2\times8\times9)+6(1\times2\times3\times4+1\times2\times3\times5+\cdots\cdots+6\times8\times9\times10+7\times8\times9\times10)$

(1) $b^2=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2)^2=(1^4+2^4+3^4+\cdots\cdots+10^4)+2(1^2\times2^2+1^2\times3^2+\cdots\cdots+9^2\times10^2)=d+2(1^2\times2^2+1^2\times3^2+\cdots\cdots+9^2\times10^2)$ 所以 $1^2\times2^2+1^2\times3^2+\cdots\cdots+9^2\times10^2=\frac{b^2-d}{2}$

(2) $b\times s=(1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+10^2)(1\times2+1\times3+1\times4+\cdots\cdots+8\times10+9\times10)=(1^2\times2\times3+1^2\times2\times4+\cdots\cdots+8\times9\times10^2)+(1^3\times2+1^3\times3+\cdots\cdots+8\times10^3+10^3\times9)=(1^2\times2\times3+1^2\times2\times4+\cdots\cdots+8\times9\times10^2)+ac-(1^4+2^4+\cdots\cdots+10^4)$ 所以 $1^2\times2\times3+1^2\times2\times4+\cdots\cdots+8\times9\times10^2=bs-ac+d$

故由(1)(2)知 $S^2=\frac{b^2-d}{2}+2(bs-ac+d)+6T$

$$\Rightarrow\left(\frac{a^2-b}{2}\right)^2=\frac{b^2-d}{2}+2\left(b\times\frac{a^2-b}{2}-ac+d\right)+6T$$

$$\Rightarrow T=\frac{a^4-6a^2b+3b^2+8ac-6d}{24}$$

評析：

1.本題中"T 值"難度高，但仍有七位同學不畏懼困難來挑戰，並獲得成功。

2.本題共收到 17 位同學的解答，每位同學都花費不少心力！尤其令人敬佩高雄市立志國中郭志言同學，才升上國一，表現出非常強"解題毅力"的與十分出色的技能，真令人刮目相看。上述解法二由台南市建興國中黃信溢同學提供，其解答簡明扼要，力道十足！

3.本題平均得分為 4.06 分，得分率為 58%。

問題編號
901503

下表是一個 4×4 的方格，在每個小方格

的四個角落都寫上一個數字，其規則是：以 4×4 方格的四個端點為起點，然後按照的排

1

2　　3

4　　5　　6

…　　…　　…　　…

列方式，寫滿整個 4×4 方格。

1　7 10　16	3　4 13　14	6　2 15　11	10　1 16　7
2　11 6　15	5　8 9　12	9　5 12　8	13　3 14　4
4　14 3　13	8　12 5　9	12　9 8　5	15　6 11　2
7　16 1　10	11　15 2　6	14　13 4　3	16　10 7　1

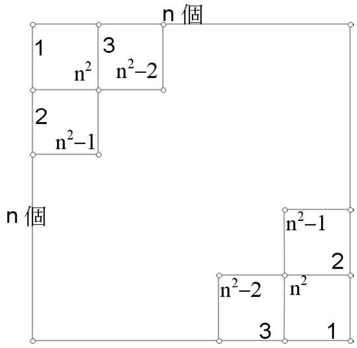
(1)若把表格改成 $n\times n$ 的方格。試證：每一個小方格內的四個數字的和皆相等。

(2)若把表格改成 15×15 的方格，且每個小方格內右下角的數字都寫不出來。

試求：第 8 列第 7 行的小方格內的三個數字的和是多少？

參考解答：

(1)



設 n ×n 表格中，每一小格內左上角的數字所成的數列為 $\langle a_n\rangle$

而每一小格內右下角的數字所成的數列為 $\langle b_n\rangle$

則 $\langle a_n\rangle$ 由左上寫至右下依序為：$1,2,3,\cdots,n^2-2,n^2-1,n^2$

$\langle b_n\rangle$ 由右下寫至左上依序為：$1,2,3,\cdots,n^2-2,n^2-1,n^2$

反之 $\langle b_n\rangle$ 由左上寫至右下依序為：$n^2,n^2-1,n^2-2,\cdots 3,2,1$

所以每一小格內左上角的數字與左下角的數字和 $=1+n^2=2+(n^2-1)=3+(n^2-2)=\cdots=(n^2-2)+3=(n^2-1)+2=n^2+1$

在 n×n 表格中，每一小格內的 4 個數字和 $=2(n^2+1)$

(2)在 15×15 的表格中，由(1)知其每一小格內的 4 個數字總和 $=2(15^2+1)=452$ 而每一小方格內兩對角的數字和 $=15^2+1=226$ 今觀察 15 15 表格中，每一小方格內左上角的數字列設其為 $\langle aij\rangle$，如圖：

	1	3	6	10	15	a_{16}	a_{17}	
	2	5	9	14				
	4	8	13					
	7	12						
	11							
	a_{61}							
	a_{71}							
第 8 列	a_{81}	a_{82}					$\mathbf{a_{87}}$	

則 $a_{11}=1,a_{21}=2,a_{31}=4,a_{41}=7,a_{51}=11\cdots$

所以 $a_{81}=1+(1+2+3+\cdots+7)=1+\frac{(1+7)7}{2}=29$

而 $a_{12}-a_{11}=2,a_{22}-a_{21}=3,a_{32}-a_{31}=4\cdots$

所以 $a_{82}-a_{81}=9$

又 $a_{81}=29,a_{82}=38,a_{83}=48\cdots$

所以 a_{87}=29+(9+10+11+12+13+14)=98

因為第 8 列第 7 行的小方格內的左上角數字為 98，所以右下角數字為 226-98=128 即去掉右下角的數字後，其他三個數字之和 =452-128=324　　Ans：324

評析：

1. 本題要能仔細觀察才規律後，方能經由規律而得出答案。
2. 在所有參與徵答的同學中，以台北縣江翠國中莊凱壹、海山國中張源平、新莊國中潘柏諺，台南市建興國中黃信溢等同學，解答最為清楚詳盡。
3. 本題參與答題人數共有 11 人，平均得分為 5.01 分，得分率為 71.57% 。

問題編號
901504

(1)試說明 4 個連續正整數的乘積必為 4!之倍數。

(2)試說明 n 個連續正整數的乘積必為 n!之倍數。 $n!=1\times2\times3\times\cdots\cdots\times n$

(3)設 k,r 為互質的兩個自然數，且 $k>r>1$，

試證：自 $k+1$ 開始連續 $r-1$ 個正整數的乘積必為 $r!$的倍數。

參考解答：

(1)將自然數分為$\{4k+1,4k+2,4k+3,4k+4\}$等四類 $k=0,1,2,\cdots\cdots$則上述 4 個分類連續取 4 個有以下 4 種方法，$(4k+4,4k+1,4k+2,4k+3)$ $(4k+1,4k+2,4k+3,4k+4)$ $(4k+2,4k+3,4k+4,4k+1)$ $(4k+3,4k+4,4k+1,4k+2)$乘積都是 4!之倍數。

(2)同理可證。

(3)因為$(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+r-1)$為連續$(r-1)$個正整數乘積由(2)可知$(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+r-1)=(r-1)!m$,其中 m 是整數，又 $k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+r-1)$為連續 r 個正整數乘積，所以 $k(k+1)(k+2)\cdots\cdots(k+r-1)=r!\times n$,其中 n 是整數 $\Rightarrow k\times(r-1)!\times m=r!\times n\Rightarrow k\times m=r\times n$，又因為$(k,r)=1\Rightarrow m$ 是 r 的倍數

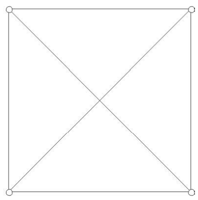
所以自 $k+1$ 開始連續 $r-1$ 個數的乘積必為 $r!$的倍數。

評析：

1. 本題大部分同學僅指出 n 個連續自然數的乘積含有 1、2、3⋯⋯、n 等因數，但卻忽略說明其互斥性，如含因數 2 的數，因數 4 的數可能為同一個數，以致証明不完整，其實只要考慮 $n!$與 n 個連續自然數的標準質因數分解情況，比較每一個質因數的次數即可。
2. 本題答題人數 32 人，第一小題 2 分，第二小題 2 分，第三小題為 3 分，平均得分為 1 分，答對率 14.28%.
3. 答題品質佳者僅台南市建興國中黃信溢同學，另外高雄市立志中學蔡政江同學在第三小題部分提供另一解法。

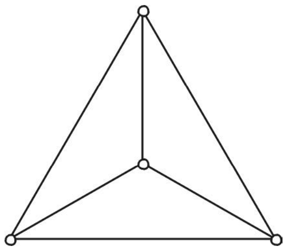
問題編號
901505

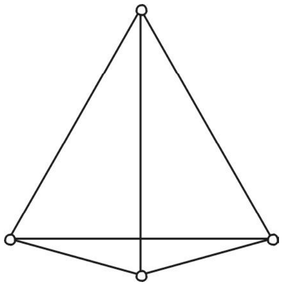
如右圖，平面上有四個點，測量各點間的距離時，只有兩個不同的值，這樣的圖形不只一種，請儘量的找出這樣的圖形(相似的圖形算成同一種)，並簡單說明你的做法。

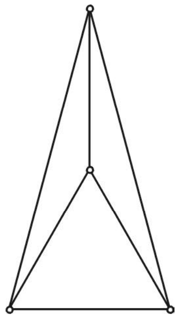


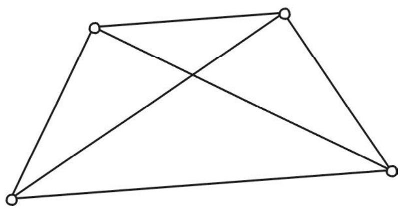
參考解答：

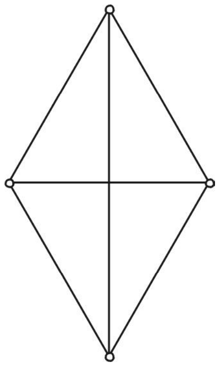
本題是一個開放的問題，除了右上圖之外，另外尚有以下五種圖。











評析：

1. 本題是一個開放性的問題，凡能找出合乎題目設定之條件的答案皆合乎所求。
2. 參與徵答的同學共有 33 人，答題優良的有台北市民生國中康軒偉、謝玉恆、張哲瑞、劉冠暐、劉冠筠、黃彥豪，敦化國中許斯淵，明德國中王琨傑，弘道國中魏群樹，大直國中陳俊曄，台北縣海山國中張源平、江翠國中黃明山、侯天崎，新竹市光華國中賴俊儒，彰化縣明倫國中羅雲灝，台南市建興國中黃信 溢，高雄市立志中學蔡政江。
3. 本題共有 33 為同學參與徵答，平均得分為 5.18 分，得分率為 74%。