2001 年第 42 屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(續)

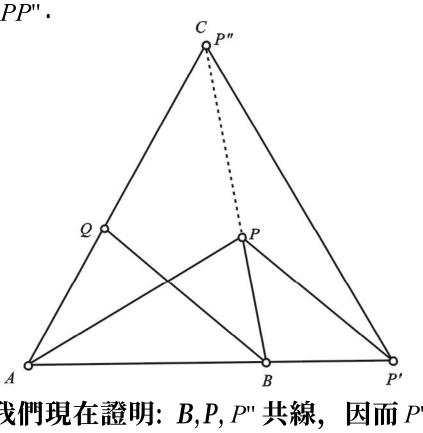
陳昭地 *　張幼賢 *　朱亮儒 *　洪有情 *
林哲雄 **　陳明揚 ***
* 國立臺灣師範大學　數學系
** 國立清華大學　數學系
*** 國立臺灣大學　電機工程系

(承上期第 69 頁)

【問題五】：

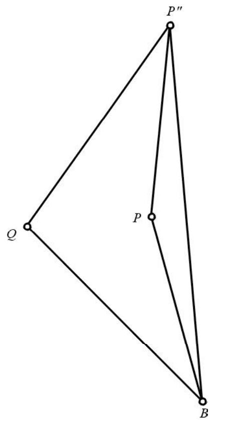
【試題委員會公布的參考解答】：

在三角形 ABC 中，令 $\angle BAC = a = 60°$，$\angle CBA = b$，$\angle ACB = g$。延長 $\overline{AB}$ 至 P'，使得 $\overline{BP'} = \overline{BP}$；並於 $\overleftrightarrow{AQ}$ 線上取一點 P''，使得 $\overline{AP''} = \overline{AP'}$，則 $\Delta BP'P$ 為等腰三角形，且底角為 $b/2$.因為 $\overline{AQ} + \overline{QP''} = \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AQ} + \overline{QB}$，所以 $\overline{QP''} = \overline{QB}$。由於 $\Delta AP'P''$ 為等邊三角形(正三角形)，且 $\overline{AP}$ 為 $\angle BAC$ 的角平分線，所以 $\overline{PP'} = \overline{PP''}$.



我們現在證明: B, P, P'' 共線，因而 P'' 與 C 重合.

假設 B, P, P'' 不共線，即為非退化三角形 $\Delta BPP''$。此時 $\angle PBQ = \angle PP'B = \angle PP''Q = b/2$



如上圖所示，P 在 $\overline{BP''}$ 的旁側或在 $\overline{BP''}$ 的另一側。 不論是那一種情形，因為假設 $\Delta BPP''$ 為非退化三角形，所以 $\overline{BP} = \overline{PP''} = \overline{PP'}$，因而□$BPP'$ 為等邊三角形.由此可得不合理的結論 $b/2 = 60°$.(因為此時 $a + b = 60° + 120° = 180°$)。所以 B, P, P'' 共線，因而 P'' 與 C 重合。

因為 ΔBCQ 為等腰三角形，所以 $120° - b = g = b/2$，因而 $b = 80°$ 且 $g = 40°$。故 ΔABC 為一個 60-80-40 度的三角形。

【曾家駿同學的解法】：

設 $\angle ABQ = \angle CBQ = \theta$，則 $\angle AQB = 180° - \angle BAQ - \angle ABQ = 180° - 60° - \theta = 120° - \theta$，$\angle APB$

$=180°-\angle BAP-\angle ABP=180°-30°-2\theta=150°-2\theta$.

在 ΔABQ 中：$\dfrac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sin\theta+\sin 60°}{\sin(120°-\theta)}$.

在 ΔABP 中：$\dfrac{\overline{AB}+\overline{BP}}{\overline{AB}}$

$$=\frac{\sin(150°-2\theta)+\sin 30°}{\sin(150°-2\theta)}.$$

因為 $\overline{AB}+\overline{BP}=\overline{AQ}+\overline{QB}$，所以 $\dfrac{\overline{AQ}+\overline{QB}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AB}+\overline{BP}}{\overline{AB}}$，因而

$$\frac{\sin\theta+\sin 60°}{\sin(120°-\theta)}=\frac{\sin(150°-2\theta)+\sin 30°}{\sin(150°-2\theta)}=\frac{2\sin(90°-\theta)\cos(60°-\theta)}{\sin(150°-2\theta)}.$$

利用三角公式化簡後可得

$$\frac{2\sin(\theta/2+30°)\cos(\theta/2-30°)}{\sin(60°+\theta)}=\frac{2\cos\theta\sin(30°+\theta)}{\sin(2\theta+30°)},$$

由此可得

$\sin(\theta/2+30°)\cos(\theta/2-30°)\sin(2\theta+30°)=\cos\theta\sin(\theta/2+30°)\sin(\theta+60°)=2\cos\theta\sin(\theta/2+30°)\sin(\theta/2+30°)\cos(\theta/2+30°)$

因為 $\pi>\theta/2+30°>0$，所以

$\cos(\theta/2-30°)\sin(2\theta+30°)=[\sin(2\theta+30°)+\sin 30°]\cos(\theta/2+30°)$，$\Rightarrow\sin(2\theta+30°)[\cos(\theta/2-30°)-\cos(\theta/2+30°)]=\sin 30°\cos(\theta/2+30°)$，$\Rightarrow\sin(2\theta+30°)[-2\sin(\theta/2)\sin(-30°)]=\sin 30°\cos(\theta/2+30°)$，$\Rightarrow 2\sin(\theta/2)\sin(2\theta+30°)=\cos(\theta/2+30°)$，$\Rightarrow -[\cos(5\theta/2+30°)-\cos(3\theta/2+30°)]=\cos(\theta/2+30°)]$，$\Rightarrow\cos(5\theta/2+30°)+\cos(\theta/2+30°)-\cos(3\theta/2+30°)=0$，$\Rightarrow 2\cos(3\theta/2+30°)\cos\theta-\cos(3\theta/2+30°)=0$，$\Rightarrow\cos(3\theta/2+30°)[2\cos\theta-1]=0$

(i)(因為 $0<3\theta/2+30°<(3/2)\times 120°+30°=210°$)若 $3\theta/2+30°=\pi/2$，則 $\theta=40°$。

(ii)若 $\cos\theta=1/2$，則 $\theta=60°$。但是 $2\theta=\angle B=\pi-\angle A-\angle C<\pi-60°=120°$，矛盾!

所以 $\angle B=2\theta=80°$，因而 $\angle C=40°$ 故，ΔABP 為一個 60-80-40 度的三角形。

【評析與討論】：

1. 本題是以色列所設計的平面幾何問題，可畫補助線以綜合幾何的方法證明，或利用三角函數的方法證明。以在國內訓練時的表現來看，我國的學生代表均應有能力解出此題。我們有一位同學雖然已畫出補助線，可是因繪圖不夠準確，以致未能看出 B, P, P'' 共線，錯失得滿分之機會；另有四位同學因為使用的方法不好(解析法)，得到 6 次的方程式，花太多時間在解方程式上而且未能解出，只能得到部分分數，還導致時間不夠解其他的題目，非常可惜!
2. 本題是中偏難的平面幾何問題，考試結果在 473 位參賽者中有 82 位獲得滿分(17.3%)，有 98 位得到 0 分(20.7%)；全體得分的平均值為 2.71 分，得分率 0.39；難度指數 0.40；而鑑別指數為 0.60。所有獲得金牌的 39 位選手本題平均得分數為 6.59 分；而拿到銀牌的 81 位選手在本題得分之平均值也有 4.05 分。我國六位學生代表，按學生編號得分數依序為 3, 3, 3, 2, 7, 3 分。我國得金牌的學生代表的分數略高於所有獲得金牌的 39 位選手本題平均得分數，而我國的六位學生得分的平均值則低於所有獲得銀牌的 81 位選手本題平均得分數。
3. 幾何題原是我國較強的題型，因為我國學

生考試當天過分緊張、得失心太重以致解題測略錯誤，僅一位同學完全解出此題，而未能把握住此得分機會，這是我們今年未能擠入前五名的最主要原因。將來代表隊應加強心理輔導，不要在正式比賽時因過分緊張或因得失心過重而導致失常，才能爭取更佳的成績。

【問題六】：

【試題委員會公布的參考解答】：

假設 $ab+cd$ 是質數，我們將證明此會導致矛頓。我們可將 $ab+cd$ 表示為

$ab+cd=(c+d)c+(b-c)a=m\cdot(a+d,b+c)$

其中 m 為一正整數。因假設 $ab+cd$ 是質數，所以 $m=1$ 或 $(a+d,b-c)=1$

情況一：

考慮 $m=1$，則

$(a+d,b-c)=ad+cd>ab+cd-(a-d+b+c)$

$=(a+d)(c-1)+(b-c)(a+1)$

$\geq(a+d,b-c)$

矛盾!

情況二：

考慮 $(a+d,b-c,a-c)=1$ 因為

$ac+bd=(a+d)b-(b-c)a$ (2)

所以由(1)及(2)可知

$(a+b)b-(b-c)a=(b+d+a-c)(b+d-a+c)$

因而可得

$(a+b)(a-c-d)=(b-c)(b+c+d)$

從此可知，存在一個正整數 k 使得

$a-c-d=k(b-c)$

$b+c+d=k(a+d)$

將這兩式相加可得:$a+b=k(a+b-c+d)$，而 $k(c-d)=(k-1)(a+b)$ 若 $k=1$，則 $c=d$，此與 $a>b>c>d$ 矛盾! 若 $k\geq 2$，則

$$2\geq\frac{k}{k-1}=\frac{a+d}{c-d}>2,$$

這顯然也不可能。所以由情況一、二可知 $ab+cd$ 不是質數。

【評析與討論】：

1.本題是保加利亞所設計的數論問題，唯一個利用反證法教容易得證的題目。

2.本題是高難度的數論問題，考試結果在473位參賽者中僅有27位獲得滿分(5.7%)，有380位得到0分(80.3%)；全體得分的平均值為0.78分，得分率0.37；難度指數0.19；而鑑別指數為0.36。所有獲得金牌的39位選手本題平均得分數為5.31分；而拿到銀牌的81位選手在本題得分之平均值也有1.21分。我國六位學生代表，按學生編號得分數依序為0, 0, 0, 0, 4, 0分。我國得金牌的學生代表的平均分數與所有獲得金牌的39位選手本題平均得分數低，而我國的六位學生得分的平均值在所有獲得銀牌的81位選手本題平均得分數也低，可見這種題型我國學生的水準比國際的平均水準略低，將來代表隊應加強此方面的訓練超越國際平均水準，以爭取更佳的成績。

3.本題之證明要先將 $ab+cd$ 變形為 $ab+cd=(a+d)c+(b-c)a=m\cdot(a+d,\ b-c)$ 再由 $ab+cd$ 為質數的假設及原來的題設條件，分別討論 $m=1$ 及 $(a+d,\ b-c)=1$ 的情形，得到矛盾而得證。我國僅一位同學看出需將 $ab+cd$ 變形為 $ab+cd=(a+d)c+(b-c)a=m\cdot(a+d,\ b+c)$ 他也討論了 $m=1$ 的情形，得到部分分數；其餘五位同學都因解第五題花費太多時間而沒有足夠時間解此題，未能得分。

4. 本題在一開始選題會議中，並不是最優先考慮作為正式題目的數論題，但由於大陸領隊提出依各分析解法後，才被重新考慮，終於被選作本次競賽的最難題。

四、結論與檢討

從以上的成績統計、試題參考解答與評析，我們綜合以下數點結論與檢討，以供參考：

1. 本屆六道試題分屬平面綜合幾何(亦可用解析幾何法)，代數不等式，離散數學(或圖論)，組合數論，數論(質數與最大公因數)及平面綜合幾何(亦可用解析幾何法)。今年的試題第一題是屬於較簡單的題目，我國的學生代表都答得十分理想。第四題是屬於中偏易難度的題目，可惜我國的學生代表因得失心太重及解題次序錯誤並未好好把握此題。第二題是屬於中偏難難度的題目，可先利用代換法將原不等式轉換為較簡單的不等式，再使用算幾不等式或權方和不等式或 Jensen 不等式證出此題。IMO 的競賽，是為高中學生所設計的競試，絕對不會出只能用微積分法解的問題，雖然在培訓期間一再告誡同學除非不得已，不要採用微積分法解題，如果實在想不出其他的方而必須微積分法時，也一定要敘述清楚所有的條件；可惜本次仍有一位同學是採用微積分法解此題，他未清楚敘述所有的條件且計算也有錯誤，僅獲得 1 分，不僅影響到他個人的成績，也影響到我國的排名(我們僅差第八名的烏克蘭 2 分)，實在可惜。除了此位同學之外，我國的學生代表均獲得滿分，總得分尚屬理想。第五題是也屬於中偏難難度的題目，較簡單的解法需畫補助線，再看出三點共線的特性，不過參賽學生大多看不出此點；用三角函數或解析幾何的方法，計算量都很大，不容易完全拿到好成績，且會影響到第四、六題的解題時間。第三題是屬於高難度的離散數學(或圖論)題目，本題雖然已超出我國現在高中學生所學的知識範疇，但是在國內培訓期間做過類似的題目，本題成績不理想可能是因為我國的學生代表花太多時間在第二題，以致解本題的時間不夠使然。第六題也是高難度的數論題，但在我們在國內的訓練過程中有教過相關的內容，我國學生代表未能作出此題，主要是因第五題解題方法是採用三角函數或解析幾何的方法，計算量都很大，費時太多，且對以往第六題一定非常難的印象，造成解本題的信心及時間不夠所致。本題我們全隊總分只得 4 分，在前十五名國家中排名倒數第一，不僅遠輸給中國大陸及原蘇聯體系的國家(本題為保加利亞所提供的試題)，也遠落後給排名在我們之後的國家(請參見表 1)，這是我們這次未能擠入前五名的主因；往後我們必須加強這方面題型、難度的訓練，且需加強心理建設，才能爭取到更好的成績。
2. 今年的試題，主辦國在預選題方面的作業不夠理想，在 28 道預選題當中除了有部分題目與考古題太過類似之外，不是太難、就是相當難度的問題太過類似，且主辦國在預選題的參考解答都沒有自行試做，僅附原題目提供國所附的參考解答。事實上，在主試會議時各國領隊已無太多時間

思考，因此沒有太多的選擇；不過也因為可選擇性偏低，選題會議還算順利。不過在主辦國克意安排的主試會議時程之下，是最近幾年來首次在開幕典禮時尚未選定測試題目。

3.就我國參賽的學生代表的實力而言，本年是歷年來尚屬整齊的一次。但是李宗德、王奕翔及鍾震翰同學在考試時因為得失心太重且過於緊張而稍有疏失之外(他們均應該有銀牌以上的實力，這次李宗德及王奕翔同學險些未能獲得銀牌)，均已達到預期的成績；平1999年在羅馬尼亞主辦時的成績，獲得一面金牌、五面銀牌，世界排名第九。今年的六位參賽的學生除了一位是高三的學生其餘的五位學生均是高一及高二的學生代表且都是新手，能有這樣的成績已符合原先之預期。有一位同學，對心理調適壓力不適當，在國內最後集訓期間已呈現鬆懈狀態，出國在考試前又無法配合團隊紀律；這次能獲得銀牌，雖然是意料中可能發生之事，但未能完全發揮他的能力，甚至影響團隊成績，誠屬可惜。就學生答題的表現來看，我們在以後的訓練課程中，仍需加強高難度題目的解題訓練。這次競試，我國參賽的學生代表均能把握中等難度以下的問題，但是因得失心對於中等偏難的題目未能完全掌握，且高難度的第三題及第六題幾乎全軍覆沒，這是我們往後在訓練課程中需要特別加強的地方。此外，對於本屆賽的選手(曾家駿本屆獲得金牌的同學及朱浩瑋、李宗德、王奕翔及鍾震翰獲得銀牌的同學明年仍有參賽資格)，如果他們明年仍願意且獲得參賽資格，需加強心理輔導，使他們能減輕心理壓力，並能認真衝刺、突破瓶頸。

4.就一般情形綜合而論，本屆(第42屆)國際數學奧林匹亞競賽，主辦國(美國)以民間雄厚的經濟能力確實在食、宿招待方面盡了不少心力。但是主辦單位除了在預選題方面的作業不夠理想，在主試會議中公布其所訂定的給分標準時太過粗略，較合理的給分標準公佈時間太慢(協調成績的第二天才公佈)且從未正式公告於何時何地領取給分標準，造成協調成績時不少的困擾。為了討論賽浦路斯隊涉嫌洩題的最後一場主試會議，因主辦國未提合理處理建議，以致會議時間拖延過長(從晚上9點至第二天凌晨3點)，最後在大家都累得無心處理的情形下，草草了結；直到現在，還常接到與會領隊E-mail抱怨該事件的處理不宜。此外，因主辦國分工太過鬆散，幾乎所有的行政工作都由Dr. Walter E. Mientka一個人負責，以致在大會結束時仍無法發出參與及得獎證書，必須在以後以信件寄發(請參見IMO秘書長Dr. Walter E. Mientka 7月28日的E-mail)，此為我國參加IMO競賽以來之首見。以上所述，可作為我國未來主辦2003年國際物理競賽及2005年國際化學競賽的借鏡。

五，參考資料

1.陳昭地(1991)， 1991年第三十二屆國際數學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，143期(80年10月)，第18 ~ 19頁。

2.陳昭地(1992)， 1992年第三十三屆國際數

學奧林匹亞競賽試題，科學教育月刊，149 期(81 年 10 月)，第 71 ~ 72 頁。

3.陳昭地(1993)，1993 年第三十四屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，163 期(82 年 10 月)，第 48 ~ 72 頁。

4.陳昭地等(1994)，1994 年第三十五屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，172 期(83 年 9 月)，第 24 ~ 39 頁。

5.陳昭地等(1995a)，1995 年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(I)，科學教育月刊，184 期(84 年 11 月)，第 35 ~ 44 頁。

6.陳昭地等(1995b)，1995 年第三十六屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(II)，科學教育月刊，185 期(84 年 12 月)，第 33 ~ 43 頁。

7.陳昭地等(1996)，1996 年第三十七屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，192 期(85 年 9 月)，第 41 ~ 59 頁。

8.陳昭地等(1997a)，1997 年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(I)，科學教育月刊，204 期(86 年 11 月)，第 61 ~ 71 頁。

9.陳昭地等(1997b)，1997 年第三十八屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(II)，科學教育月刊，205 期(86 年 12 月)，第 63 ~ 72 頁。

10.陳昭地等(1998)，1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(I)，科學教育月刊，212 期(87 年 9 月)，第 45 ~ 48 頁。

11.陳昭地等(1998)，1998 年第三十九屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析(II)，科學教育月刊，213 期(87 年 10 月)，第 59 ~ 72 頁。

12.陳昭地等(1999)，1999 年第四十屆國際數學奧林匹亞競賽試題解答評析，科學教育月刊，222 期(88 年 9 月)，第 38 ~ 55 頁。

13.41th IMO Problems & Solutions,（2000） 41th International Mathematical Olympiad Jury Committee, July 13-24, 2000, Taejon, Korea.

14.The 42nd International Mathematical Olympiad, Short-listed problems and solutions, （2001）July 1-14, Washington DC USA.