

不用積分公式

高中生如何證明球表面積公式

李政豐 王啟祥 鄒孟霖 江淑娟 余珮芯

國立竹南高級中學

(一) 楔子：

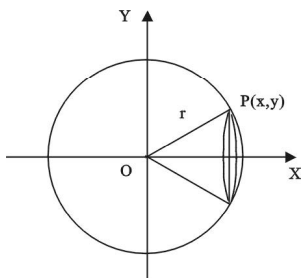
目前的高中數學新課程，二年級有選修幾何學，其中幾何學下冊，都談到球表面積、體積公式。這一部分的證明，在高二的程度，會有點困難，尤其是球表面積公式這一部份，要證得很直觀，是有些困難。

回顧大一微積分，球表面公式可由下圖與積分公式求得：

$$\text{圓 } x^2 + y^2 = r^2$$

繞 x 軸旋轉，會形成一個球。

$$\text{取 } y = \sqrt{r^2 - x^2}$$



$$\text{球表面積} = \int_{-r}^r 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

$$\text{其中 } y = \sqrt{r^2 - x^2}, y' = \frac{1}{2}(r^2 - x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

$$\text{球表面積} = \int_{-r}^r 2\pi \sqrt{r^2 - x^2} \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx$$

$$= \int_{-r}^r 2\pi r dx = (2\pi r)x \Big|_{-r}^r = 4\pi r^2$$

高中生解讀 $2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}$ 實有困難，幾何學課本，大多述而不證，要學生把公式背下來

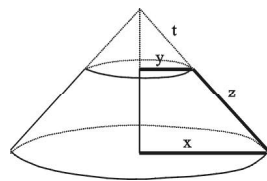
就好。可是這個公式從國小到高二，甚至在其它學科，都有同學或老師會使用到，而目前只有龍騰文化圖書公司出版的『幾何學透視』，編者吳志揚、余文卿教授有一個比較特殊的證法。

本文提出一個直觀、易懂的方法，我們只用到三角函數的和積互化公式，數列級數的極限概念，與連續函數的性質，就可以把「球表面積公式」證出來。

(二) 本文：

(1) 錐台(frustum)之側表面(lateral surface)的面積之計算：

如果錐台(如下圖)，上圓半徑是 y ，下圓半徑是 x ，斜高(slant height)為 z ，則側表面積若干？



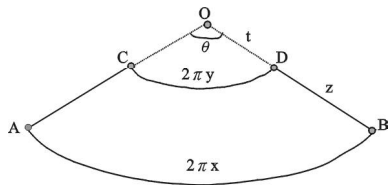
$$\text{由相似三角形：} \frac{t}{y} = \frac{t+z}{x}$$

$$ty + yz = tx$$

$$t(x-y) = yz$$

$$\Rightarrow t = \frac{yz}{x-y} \quad \text{----- (甲)}$$

如果將圓錐剪開，則如下圖，其中圓心角 θ 的單位是弧度；



錐台側表面積 = 扇形 OAB 面積 - 扇形 OCD 面積

由弧長公式 $t\theta = 2\pi y$

$$\theta = \frac{2\pi y}{t} \quad \text{由上面(甲)式}$$

$$= \frac{2\pi y}{\left(\frac{yz}{x-y}\right)}$$

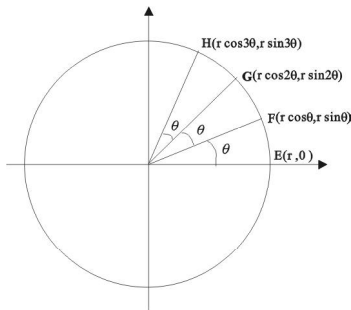
$$= \frac{2\pi(x-y)}{z} \quad \text{由扇形面積公式 } A = \frac{1}{2}r^2\theta$$

故，錐台側表面積

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x-y} + z \right)^2 \left(\frac{2\pi(x-y)}{z} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{yz}{x-y} \right)^2 \left(\frac{2\pi(x-y)}{z} \right) = \frac{\pi x^2 z}{x-y} - \frac{\pi y^2 z}{x-y} = \pi(z)(x+y)$$

把錐台側表面積，表示成 $\pi(z)(x+y)$ 或是 $2\pi \left(\frac{x+y}{2} \right)(z)$ 這都是容易解讀的方式。

(2) 把半徑為 r 的 $\frac{1}{4}$ 圓弧，以及圓心角 $\frac{\pi}{2}$ ，分為 n 等份，每一等分的圓心角 θ 所對的弧長為何？



由餘弦定理：

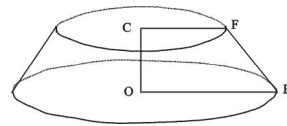
$$\begin{aligned} \overline{EF}^2 &= r^2 + r^2 - 2(r)(r)\cos\theta \\ &= 2r^2(1 - \cos\theta) \\ &= 2r^2(2\sin^2\frac{\theta}{2}) \end{aligned}$$

$$= 4r^2\sin^2\frac{\theta}{2}$$

$$\text{故 } \overline{EF} = 2r\sin\frac{\theta}{2}$$

(就像刨刀削水果皮，刨刀的刀寬是一定的，所削得的一圈果皮，寬度是 $2r\sin\frac{\theta}{2}$)

(3) 把 $\overline{EF}$ 繞 y 軸旋轉，所成之錐台，其側表面積為何？



由 $E(r, 0)$, $F(r\cos\theta, r\sin\theta)$

$$\overline{CF} = r\cos\theta \quad (\text{上圓半徑})$$

$$\overline{OE} = r \quad (\text{下圓半徑})$$

$$\overline{EF} = 2r\sin\frac{\theta}{2} \quad (\text{斜高})$$

故，側表面積為 $\pi(2r\sin\frac{\theta}{2})(r + r\cos\theta)$

同理； $G(r\cos 2\theta, r\sin 2\theta)$, $F(r\cos\theta, r\sin\theta)$ 由 $\overline{GF}$ 繞 y 軸旋轉所成錐台之上圓半徑是 $r\cos 2\theta$ ，下圓半徑是 $r\cos\theta$ 側高(母線長)

$\overline{GF} = 2r\sin\frac{\theta}{2}$ ，故側表面積為 $\pi(2r\sin\frac{\theta}{2})(r\cos\theta + r\cos 2\theta)$ ， $\overline{HG}$ 繞 y 軸旋轉所成錐台之側表面積為 $\pi(2r\sin\frac{\theta}{2})(r\cos 2\theta + r\cos 3\theta)$

(4) 由這些等長的弦 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{GH}$... 繞 y 軸旋轉所成錐台之側表面積的和為：

$$\begin{aligned} S_n &= \pi(2r\sin\frac{\theta}{2})[(r + r\cos\theta) + (r\cos\theta + r\cos 2\theta) + (r\cos 2\theta + r\cos 3\theta) + \cdots \\ &\quad (r\cos(n-1)\theta + r\cos(n\theta))] \end{aligned}$$

$$\text{由 } \theta = \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \Rightarrow n\theta = \frac{\pi}{2}, \cos(n\theta) = 0$$

$$\begin{aligned} S_n &= \pi(2r\sin\frac{\theta}{2})[r + 2r(\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cdots \cos(n-1)\theta)] \\ &= (2\pi r^2\sin\frac{\theta}{2}) + \pi(2r\sin\frac{\theta}{2})[2r(\cos\theta + \cos 2\theta + \cdots \cos(n-1)\theta)] \end{aligned}$$

不用積分公式高中生如何證明球表面積公式

$$\begin{aligned} & \theta + \cos 3 \theta + \cdots \cdots \cdots \cos(n-1) \theta)] \\ = & (2 \pi r^2 \sin \frac{\theta}{2}) + (2 \pi r^2) [2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \theta \\ & + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos 2 \theta + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos 3 \theta + \cdots \cdots \cdots \\ & + 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos(n-1) \theta] \end{aligned}$$

由三角函數的「積化和差公式」

$$\begin{aligned} = & 2 \pi r^2 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \pi r^2 [(\sin \frac{3\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2}) + (\sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{3\theta}{2}) + (\sin \frac{7\theta}{2} - \sin \frac{5\theta}{2}) + \cdots \cdots \cdots \\ & (\sin \frac{2n-1}{2} \theta - \sin \frac{2n-3}{2} \theta)] \\ S_n = & 2 \pi r^2 \sin \frac{\theta}{2} + 2 \pi r^2 [\sin \frac{2n-1}{2} \theta - \sin \frac{\theta}{2}] \end{aligned}$$

$$= 2 \pi r^2 \sin[(\frac{2n-1}{2}) \theta] \quad \theta \text{ 用 } \frac{\frac{\pi}{2}}{n} \text{ 入}$$

$$= 2 \pi r^2 \sin[(\frac{2n-1}{2})(\frac{\pi}{2n})]$$

$$= 2 \pi r^2 \sin[(\frac{2n-1}{2n})(\frac{\pi}{2})]$$

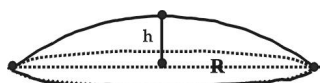
$$\text{當 } n \rightarrow \infty \text{ 時 } (\frac{2n-1}{2n}) \rightarrow 1$$

由於正弦函數是一個連續函數，得半球之表面積為 $2 \pi r^2 \sin(\frac{\pi}{2}) = 2 \pi r^2$

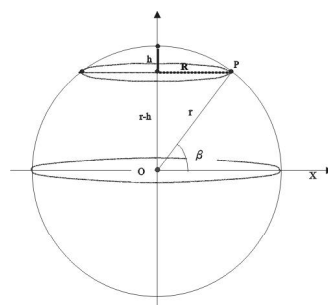
故，球表面積為 $4 \pi r^2$

(5)球冠的側表面積要怎麼算？

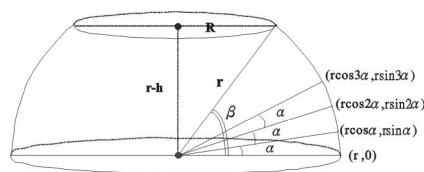
如下圖，在半徑是 r 的球中，球冠的底面，圓的半徑是 R ，球冠的高是 h ，則球冠的側表面積是多少？



如下圖所示：如果球冠的底面，圓上一點 P ， $\angle POX = \beta$



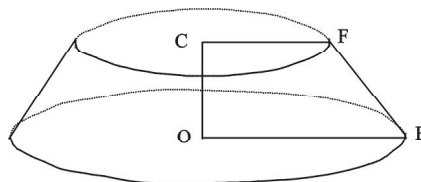
則半球之【冠外部分】的側表面積是多少？（如下圖所示）



我們將 β 角 m 等分，令 $\alpha = \frac{\beta}{m}$ ，則在垂直剖面的分點座標如上圖所示。

令 $E(r, 0)$ ， $F(r \cos \alpha, r \sin \alpha)$ ， $G(r \cos 2 \alpha, r \sin 2 \alpha)$ ， $H(r \cos 3 \alpha, r \sin 3 \alpha) \cdots \cdots$

下圖中，連接相鄰的分點 E 與 F ，所成的弦，繞 y 軸旋轉所成錐台之側表面積為： $\pi(\overline{EF})(\overline{CF} + \overline{OE})$



將這些等長的弦 $\overline{EF}$ 、 $\overline{FG}$ 、 $\overline{GH} \cdots \cdots$ 繞 y 軸旋轉所成錐台之側表面積的和為：

$$\begin{aligned} S_m = & \pi(2r \sin \frac{\alpha}{2})[(r + r \cos \alpha) + (r \cos \alpha + r \cos 2 \alpha) + (r \cos 2 \alpha + r \cos 3 \alpha) + \cdots \cdots \cdots \\ & (r \cos(m-1) \alpha + r \cos m \alpha)] \\ S_m = & \pi(2r \sin \frac{\alpha}{2})[r + 2r(\cos \alpha + \cos 2 \alpha + \cdots \cdots \cdots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \cos 3 \alpha + \cdots + \cos(m-1) \alpha + r \cos m \alpha] \\ &= 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} + \pi (2r \sin \frac{\alpha}{2})(2r)(\cos \alpha + \cos 2 \alpha \\ &+ \cdots + \cos(m-1) \alpha) + 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ &= 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \pi r^2 [2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos 2 \alpha + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos 3 \alpha + \cdots + 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \\ &(m-1) \alpha] + 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \end{aligned}$$

仿照前面 (4) 的方法, 由積化和差與消去法

$$\begin{aligned} S_m &= 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} + 2 \pi r^2 [\sin \frac{2m-1}{2} \alpha - \sin \frac{\alpha}{2}] \\ &+ 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ &= 2 \pi r^2 \sin(m \alpha - \frac{\alpha}{2}) + 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \end{aligned}$$

由和角公式

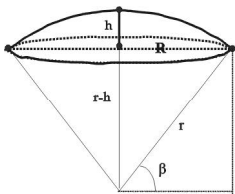
$$\begin{aligned} &= 2 \pi r^2 (\sin m \alpha \cos \frac{\alpha}{2} - \cos m \alpha \sin \frac{\alpha}{2}) \\ &+ 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ m \alpha &= \beta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2 \pi r^2 (\sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \beta \sin \frac{\alpha}{2}) + 2 \pi r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \beta \\ &= 2 \pi r^2 \sin \beta \cos \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\text{當 } m \rightarrow \infty \text{ 時 } \alpha = \frac{\beta}{m} \rightarrow 0 \quad \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2m} \rightarrow 0$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} \rightarrow 1$$

$$S_m = 2 \pi r^2 \sin \beta = 2 \pi r(r \sin \beta)$$



由上圖 $r \sin \beta = (r-h)$ 代入, $S_m = 2 \pi r(r-h)$

(此時令 $h=0$, 也可得到半球之側表面積是 $2 \pi r^2$)

即半球之【冠外部分】的側表面積是 $2 \pi r(r-h)$, 但半球之側表面積是 $2 \pi r^2$

故球冠之側表面積是 $2 \pi r^2 - 2 \pi r(r-h) = 2 \pi r h \cdots \cdots \cdots (乙)$

(其中 r 是球冠所在球之半徑, h 是球冠的高)

再由上圖及畢氏定理

$$r^2 = (r-h)^2 + R^2$$

$$r^2 = r^2 - 2rh + h^2 + R^2$$

得到

$$r = \frac{h^2 + R^2}{2h}$$

將 r 代入 (乙) 式

得球冠之側表面積的另一個表示法是 $\pi (h^2 + R^2)$ (其中 h 是球冠的高, R 是球冠底部圓之半徑)

(三) 結語：

這個方法, 是一個高中較佳(或中上)程度的學生, 能理解的範圍, 它把高二幾何學, 與高一的數列級數、極限、三角函數的概念, 結合起來, 是一個高中生能看得懂的內容。其中, 仍然必需用到正餘弦函數是連續函數的條件, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(\theta_n) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_n)$ 才能成立, 我們只能用正餘弦函數圖形, 直觀的加以說明。

(四) 參考資料：

微積分。葉能哲、何典恭 編著

幾何學透視。吳志揚、余文卿教授編者, 龍騰文化圖書公司出版