足球員的抉擇

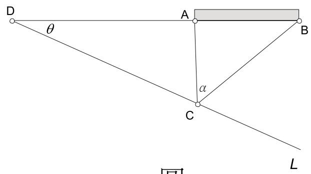
梁勇能
彰化縣立秀水國民中學

一、前言

2000 年的雪梨奧運剛結束，在足球場上，看到足球員為爭奪佳績而努力不懈，很受感動！當球員踢角球時，有時進球，有時則沒有，當然這與球員的技術和臨場狀況有關，但是否與踢球的角度有關呢？以下便來探討這個問題。

二、過程

假設足球的部份場地如下圖一所示，AB 表示球門，D 是踢角球的位置，C 是射門位置。直線L是球直線行進的路線。（假設不踢香蕉球）

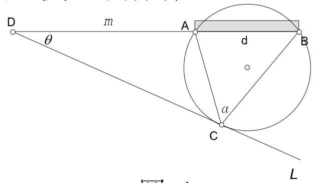


圖一

因為要有最佳的射門位置，則 α 的角度應該越大越好，也就是要尋找 α 的最大值。

(一)如何找出最佳射門角度？

[分析]：如果過 ABC 作一外接圓，則∠ ACB 是一圓周角，$\overline{AB}$是圓上的一個弦。$\overline{AB}$長度固定，所以圓越小，則圓周角∠ ACB 越大。又因為 C 在直線 L 上，所以此圓至少要和直線有一個交點，所以 C 的位置應該是切點。換句話說，直線 L 恰好是一個通過 AB 兩點的圓的切線，切點 C 正是最佳的射門位置。



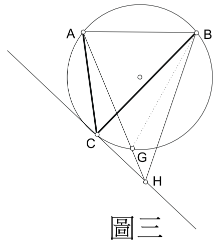
圖二

如圖所示，此時$\overline{DC}^2$ = $\overline{DA}$ × $\overline{DB}$ = m(m+d)

$\overline{DC} = \sqrt{m(m+d)}$，因此以D為圓心，$\sqrt{m(m+d)}$為　　，　　　　　　　於C，即為所求！

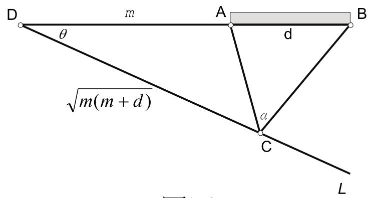
待證：∠ ACB 為最大角度

證明：在直線 L 上任取一點 H，連接$\overline{AH}$和$\overline{BH}$　　　線$\overline{BG}$因為∠ ACB 和∠ AGB 都是對應到相同圓弧的圓周角。所以∠ ACB = ∠ AGB 。又∠ AGB 是∠ AHB 的外角→∠ ACB = ∠ AGB >∠ AHB，得證！



圖三

(二) θ 和 α 角的關係？



圖四

由餘弦定理，可知

$\overline{AC} = \sqrt{m^2 + m(m+d) - 2m\sqrt{m(m+d)}\cos\theta}$

$\overline{BC} = \sqrt{(m+d)^2 + m(m+d) - 2(m+d)\sqrt{m(m+d)}\cos\theta}$

而在 Δ ABC 中， cos $\alpha = \dfrac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\overline{AC}\cdot\overline{BC}}$　#

將上面的 $\overline{AC}$、$\overline{BC}$ 帶入計算，經化簡之後，

$$\alpha = \frac{2\sqrt{m(m+d)} - (2m+d)\cos\theta}{(2m+d) - 2\sqrt{m(m+d)}\cos\theta}$$

A= $\sqrt{m(m+d)}$　B=2m+d

$$\cos\alpha \ \frac{A - B\cos\theta}{B - A\cos\theta} \quad \#$$

(三)何時踢入場內的角度（簡稱入射角）和最佳射門角度是相同的？

此時，$\theta = \alpha$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{A - B\cos\theta}{B - A\cos\theta}$ 再令 x =cos θ ，

$$x = \frac{A - Bx}{B - Ax} \Rightarrow Ax^2 - 2Bx + A = 0$$

$$\therefore x = \frac{B \pm \sqrt{B^2 - A^2}}{A}$$

$B^2 - A^2 = (2m+d)2 - [2\sqrt{m(m+d)}]^2 = d^2$　(※)

$$x = \cos\theta = \frac{2m + d \pm d}{2\sqrt{m(m+d)}}$$

$$= \frac{m+d}{\sqrt{m(m+d)}} \text{ or } \frac{m}{\sqrt{m(m+d)}}$$

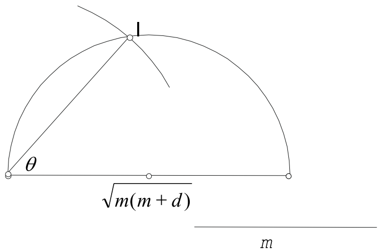
$\dfrac{m+d}{\sqrt{m(m+d)}} > 1$ ，

所以 x=cos $\theta = \dfrac{m+d}{\sqrt{m(m+d)}}$ 。

作法：1.利用上面提到做出 $\sqrt{m(m+d)}$ 的方式 $\sqrt{m(m+d)}$ 長為直徑，作 一半圓。

2.再以直徑的一個端點為圓心， m 長為半徑，畫一弧交於 I 點。

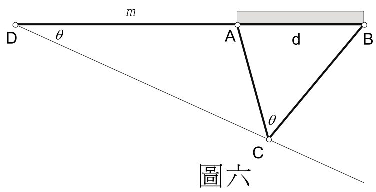
3.此時 θ 角即為所求。



圖五

如果不要求是最佳射門角度，則要如何找出和入射角度相同的射門角度？

從下圖來看，可知



圖六

Δ BCD ～ Δ BAC（AA）

$\therefore \dfrac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{BD}}{\overline{BC}} \Rightarrow \overline{BC}^2 = \overline{BA} \times \overline{BD}$

$\overline{BC}$　　　　　　　、 D 兩點的圓的切線。

C 點的求法，類似上面提到的方式，只是此時延長的線段是取 $\overline{AB} = \overline{BE}$ 。

(¥|)何種情況的最佳射門角度是 90 度？

也就是 $\alpha = 90°$

由 cos $\alpha = \dfrac{A - B\cos\theta}{B - A\cos\theta}$，

$= \sqrt{m(m+d)}$　B=2m+d

由（※）可知， B>A 又 |cos θ | ≤ 1

$\therefore A\cos\theta < B \times 1 = B \quad \rightarrow B - A\cos\theta > 0$

因此當 $\alpha = 90^\circ$，則 $\cos 90^\circ = 0$，

此時，分子 $A - B\cos\theta = 0$

$$\cos\theta = \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{m(m+d)}}{2m+d}$$

θ

θ

$$\cos\theta = \frac{2\sqrt{m(m+d)}}{2m+d}$$

AB線段為直徑，作一半圓，過D的射線與該半圓相交的點，即是90度的射門角度。原因是半圓上的圓周角一定是直角。

(五)射門角度 α 的範圍

如果 $\theta = 90^\circ$，則最佳射門角度是多少度？

此時，$\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$，$\cos\alpha = \frac{A-0}{B-0} = \frac{A}{B} = \frac{2\sqrt{m(m+d)}}{2m+d}$，我們可以發現這

4）中求最佳射門角度是90度時的入射角度是相同的！

整個來說，因為最佳射門位置的位置與過A、B的圓大小有關，圓越大，則 α 角越小，也就是說入射角和最佳射門角度是成反比！且 $0 < \alpha < 180^\circ$

三、結論

目前的數學課程中，一再強調生活數學的重要性，從這個實際的問題中，可衍生出一連串的問題，在探討的過程中可能讓學生瞭解到生活中的數學，以及真實情況和數學表達中的差異，有助於學生更深入的體會。

（上承第63頁）

※誌謝：此次試題承蒙廖文峰、李成康、江武雄等多位教授提供寶貴意見，特此誌謝。

陸、參考資料

黃榮茂、林聖富、王禹文、楊得仁等，化學化工百科辭典，台北市曉園出版社有限公司，民81年5月。

Douglas A. SKoog ; Donald M. West and F. James Holler Fundamentals of Analytical chemistry , 7th Edition , Saunders College Publishing, 1996.

Weiss, Gerald S.; Greco, Thomas G; and Richard, Layman H. Experiments in General Chemistry: A Laboratory Program to Accompany Petruccis's General Chemistry, Seventh Edition, Macmillan Publishing Company, New York, 1997.

李成康、江武雄、楊水平，科學教育通訊17期 P.1~19 , 民80年11月。