中學生通訊解題第十一期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
901101

在中午 12 點，時鐘的時針分針與秒針重疊在一起，請問下一次重疊發生在何時？

參考解答：

(1)因為 1 小時時針轉動 30 度，分針轉動 360 度，秒針轉動 21600 度，所以中午之後 x 小時，時針轉動 $30x$ 度，分針轉動 $360x$ 度。中午以後分針第一次追趕上時針時，它剛好比時針多轉動了 360 度，

$\Rightarrow 360x=30x+360$

$\Rightarrow x=\dfrac{12}{11}$。

故分針和時針連續兩次重疊的間隔為 $\dfrac{12}{11}$ 小時。

(2)同理，可設秒針和時針連續兩次重疊的時間為 y 小時

可得 $21600y=30y+360 \Rightarrow y=\dfrac{12}{719}$

故秒針和時針連續兩次重疊的間隔為 $\dfrac{12}{719}$ 小時。

(3)若中午以後 h 小時，時針、分針、秒針要再重疊，則 h 必為 $\dfrac{12}{11}$、$\dfrac{12}{719}$ 的整數倍，即存在正整數 u,v，使得 $h=\dfrac{12}{11}u$，$h=\dfrac{12}{719}v$

$\Rightarrow 719u=11v$。

u 的最小整數解為 11，得 $h=12$。

故下次重疊的時間為午夜 12 點。

解題重點：

1.找出時針、分針、秒針任兩者位置重疊的週期(總共 3 種，找出兩種即可)。

2.再找出同時為任兩種重疊週期之整數倍的最短時間即為所求。

評析：

(1)本題概念並不困難，除對國一尚未熟悉比例單元的學生較難外，對國二、國三的學生中只要熟悉「追趕問題」與「比例問題」即可解決。

(2)大部分答對的同學中都以下面兩種做法完成解答：

(a)類似參考解答的方法：以北縣新莊國中潘柏諺、彰化精誠中學國中部沈慧安、北縣江翠國中葉品辰等三位同學的解題方法最能簡潔有力地掌握解題的精要。

(b)先算出時針和分針重疊的所有時間，再將這些時刻的秒針位置一一求出，然後檢驗此時的秒針位置是否與時針、分針重疊，而得到最後的解答。這種解法，以北縣新莊國中吳之堯同學列表分析，最為清晰明快。

(3)新竹光華國中的賴俊儒分析出時針與分針重疊的位置必在時鐘圓周的 11 等分點處，分針與秒針的重疊位置必在時鐘圓周的 59 等分點處。這是本題回答者中最富創造思考性的解答方法。

(4)答案正確的學生中，有不少人將「同時為兩分數整數倍」的數字誤以為是兩分數的「最小公倍數」，可見應有不少國中生不明瞭「最小公倍數」只發生在整數間運算的概念，因此這是一個在國中的數學教學中亟待澄清的概念。

(5)本題參答人數有 26 人，平均得分為 4.46 分，得分率為 64% 。

問題編號
901102

以$\overline{AB}$為直徑的半圓上，有一弦長固定的弦 CD ，且$\overline{CD}<\overline{AB}$，現在讓 C,D 在$\overset{\frown}{AB}$上移動，自 C,D 作直徑$\overline{AB}$上的垂線， E,F 分別為垂足， P 為$\overline{CD}$的中點，

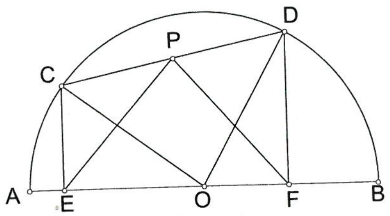
(1)如圖一，當$\overline{CD}//\overline{AB}$，試問△ EFP 與△ ODC的關係是什麼？△EFP是哪一種三角形？

(2)如圖二，當 C,D 在$\overset{\frown}{AB}$上自由移動時，△ EFP 是哪一種三角形？請說明你的理由。

C　　P　　D

A　E　O　F　B

圖一



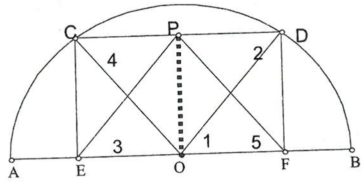
圖二

參考解答：

(1)如右圖，連$\overline{OP}$，因為△ POE ≅ △ DFO 所以∠1=∠3 ，又因為$\overline{PD}//\overline{OF}$，所以∠1=∠2 可得∠3=∠2 ，同理∠4=∠5 。

另外，因為 C,D 對$\overset{\frown}{AB}$之垂線的垂足為 E 、 F ，$\overline{CD}//\overline{AB}$，所以$\overline{CD}=\overline{EF}$。故△ EFP ≅ △ DCO

因為$\overline{OP}\perp\overline{AB}$，$\overline{OE}=\overline{OF}$ ，所以△ EFP 為等腰三角形。



(2)根據(1)的情形，(1)是(2)的特殊情形，故猜測△ EFP 是等腰三角形。

如右圖，考慮△ OCD 與△ PFE：

連$\overline{OP}$，因為 P 為$\overline{CD}$的中點，所以$\overline{OP}\perp\overline{CD}$

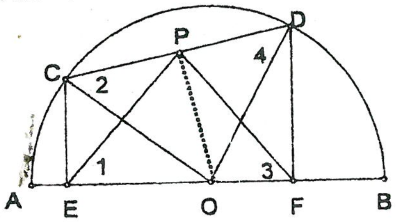
又因為$\overline{CE}\perp\overline{AB}$，所以 C,E,O,P 四點共圓，

⇒∠1=∠2

同理，因為$\overline{DF}\perp\overline{AB}$，所以 O,P,D,F 四點共圓， ⇒∠3=∠4

故△ OCD 與△ PEF 相似，

因為△ OCD 為等腰三角形，所以△ PEF 為等腰三角形。



評析：

(1)本題主要目的在加強學生幾何證明的能力。這次參答學生人數雖然不多，只有 30 位。但這些同學的作答品質，過程的陳述都不錯，希望日後有更多同學參與幾何證明題。

(2)答題優良的有：台南市建興國中黃信溢、北市介壽國中蔡佳珍、台北縣江翠國中黃明山、海山國中張源平、永和國中鄭凱元以上同學採用參考解答之做法。另外台北縣新莊國中潘柏諺、吳之堯、永和國中陳宏泰、中山國中徐敏翔、江翠國中葉品辰，北市東湖國中賴昱臣、南門國中陳錦

年、金華國中許庭碩、介壽國中徐孟威、民生國中張哲瑞、明德國中王琨傑，竹市光華國中賴俊儒等採用作補助線的方法證明第(2)題。

(3)參與徵答的共有30位同學，平均得分數5.5分，得分率為79%。

問題編號 901103

小美、小宏姊弟參加男女混合羽球賽，已知有29個隊伍參加比賽，比賽採單循環制。教練在比賽中發現，任何時候都至少有兩隊賽完了相同的場次，請問這是特例呢？或是只要單循環比賽皆有此特性？試給予正確的答案並說明之。

參考解答(一)

(1)若有一隊已賽完28場，則每一隊至少比賽一場，由於29隊比賽場次為1,2,3⋯,28其中之一，所以必有兩隊賽完了相同的場次。

(2)若無任何一隊賽完28場，則29隊比賽場次皆為0,1,2,⋯,27其中之一，所以必有兩隊賽完了相同的場次。

由(1)(2)可知單循環比賽任何時候都至少有兩隊賽完了相同的場次。

參考解答：(二)

設有n個隊伍參賽，任一隊可能比賽的場次有0,1,2,⋯.(n－1)場共n種。但當有一隊比賽(n－1)場，也就是每一隊都和它比賽過了，故不會有另一隊比賽0場。相反地，若有一隊比賽場次為0，則沒有一隊和它比賽，故不會有另一隊伍比賽(n－1)次。所以，在一次單循環賽中，真正能出現的場次只有(n－1)種，卻有n個隊伍，由鴿籠原理知必有兩隊賽完相同的場次。

結論：

不論有幾隊參賽，只要是單循環賽，則在賽程中的任何時候皆有兩隊賽完相同的場次。

解題重點：

1.確定在一次單循環賽中真正能出現的場次。
2.利用鴿籠原理。

評析：

1.本題屬於鴿籠原理的簡單應用。
2.本題實際上與參賽的隊數無關，共有8位同學能提到此一般情形。另有部分同 學誤將單循環賽當成單淘汰賽，以致未能拿分。
3.答題品質佳者有：北市民生國中張哲瑞、介壽國中余孟威，北縣海山國中張源平、海山中學賴建安、江翠國中黃明山，高縣鳳西國中葉仲恆，新竹市光華國中賴俊儒。

問題編號 901104

有一個數列 $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_{2001}$，其中 $x_1=\frac{1}{3}$ 且 $x_{k+1}=x_k^2+x_k$，$k=1,2,\cdots,2000$，請找出 $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}$ 的整數部分。

參考解答：

因為 $x_{k+1}=x_k^2+x_k$，所以 $\frac{1}{x_{k+1}}=\frac{1}{x_k^2+x_k}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k+1}$，$k=1,2,3,\cdots,2000$，

$\Rightarrow \frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$，$k=1,2,3,\cdots,2000$。

所以 $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}$

$=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3}+\cdots+(\frac{1}{x_{2000}}-\frac{1}{x_{2000}})+\frac{1}{x_{2001}+1}$

$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2000}}+\frac{1}{x_{2001}+1}$$
$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2001}(x_{2001}+1)}<\frac{1}{x_1}=3$$

另一方面，$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}>\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}>2$

故 $2<\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}<3$

所以 $\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\frac{1}{x_3+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}$ 的整數部分為 2 。

參考解答(2)：

$\because x_1=\frac{1}{3}$ 且 $x_{k+1}=x_k^2+x_k,k=1,2,\cdots..,2000$

$\therefore x_2=(\frac{1}{3})^2+\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

$x_3=(\frac{4}{9})^2+\frac{4}{9}=\frac{52}{81}$

$x_4=(\frac{52}{81})^2+\frac{52}{81}=\frac{6916}{6561}>1$, 且 $x_{k+1}>x_k$

$\therefore x_{2001}>x_{2000}>\cdots\cdots>x_4>1$

$$\because \frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-(\frac{1}{x_k}+\frac{1}{x_k+1})$$
$$=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_k\cdot(x_k+1)}$$
$$=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$$

$$\therefore \frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots+\frac{1}{x_{2001}+1}+\frac{1}{x_{2001}+1}$$
$$=(\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_2})+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_3})+\cdots+(\frac{1}{x_{2000}}-\frac{1}{x_{2000}})+\frac{1}{x_{2001}+1}$$
$$=\frac{1}{x_1}-\frac{1}{x_{2001}(x_{2001}+1)}=3-\frac{1}{x_{2001}(x_{2001}+1)}$$ 又 $\because$

$x_{2001}>1\ \therefore 0<\frac{1}{x_{2001}(x_{2001}+1)}<1$

$\therefore \frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots..+\frac{1}{x_{2001}+1}+\frac{1}{x_{2001}+1}$ 的整數部分為 2

解題重點：

從已知：$x_{k+1}=x_k^2+x_k$，到求解：$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\cdots..+\frac{1}{x_{2001}+1}+\frac{1}{x_{2001}+1}=$？之間所要建立的聯繫就是：$\frac{1}{x_k+1}=\frac{1}{x_k}-\frac{1}{x_{k+1}}$

同學們如果能找到這個解題之鑰，則本題馬上迎刃而解。

評析：

(1)大部分的同學都能利用分項消去法，來解決這種求分數型級數總和的題目。

(2)有些同學用電腦直接計算出答案，雖然答對了，但是因為沒有充分運用分析、 推理、化簡….等的數學能力，而只是運用了電腦計算能力。若同學能利用電腦計算出結果之後，再探索本題的做法，更能發揮電腦在解決數學問題上的功能。

(3)答題較優良者有：新竹市光華國中賴俊儒同學，本題參答人數有 13 人，平均得分為 4.54 分，得分率為 64.86%。

問題編號 901105

(1)平面上有 5 個點 A,B,C,D,E，其中任 3 個點不共線，任 4 個點不共圓，是否能找到一個圓，通過其中 3 個點，並使得另外 2 個點，一個在圓內， 一個在圓外？請說明你的作法。

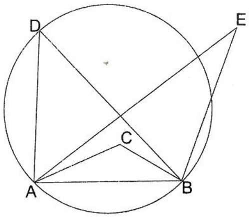
(2)將(1)的問題加以推廣，已知平面上有 $2n+3$ $(n\geqq 1)$個點，任意 3 個點不共線，任意 4 個點不共圓。能不能做一個圓通過它們之中的某 3 個點，使得其餘 $2n$ 個點，一半在圓內，一半在圓外？請說明你的作法。

參考解答：

(1)連 $\overline{AD}$、$\overline{DB}$、$\overline{AC}$、$\overline{CB}$、$\overline{AE}$、$\overline{EB}$，形成三個角 ∠ACB,∠ADB,∠AEB 因為四個點均不在同一個圓上，所以 ∠ACB,∠ADB,∠AEB 均不相等，否則會有四點共圓的情形發生。

令 ∠AEB< ∠ADB< ∠ACB ，過 A,D,B 三點

作一個圓，因為$\angle AEB < \angle ADB$，所以E點在圓外。因為$\angle ACB > \angle ADB$，所以C點在圓內。



(2)

(a)在$2n+3$個點中一定可以找到A,B兩點，使得其餘$2n+1$個點都與直線AB在同一側。

(b)因為任四個點不共圓，所以$\overline{AB}$對其餘$(2n+1)$個點張開的角必然各不相同，將這$2n+1$個角的頂點按角的大小排列：

令$\angle AP_1B < \angle AP_2B < \cdots < \angle AP_{n+1}B < \cdots < \angle AP_{2n}B < \angle AP_{2n+1}B$

過A,B,P_n三點作一個圓，因為$P_1,P_2,\cdots,P_n$對於$\overline{AB}$的張角小於$\angle AP_{n+1}B$所以$P_1,P_2,\cdots,P_n$必在圓外。

因為$P_{n+2},P_{n+3},\cdots,P_{2n+1}$對於$\overline{AB}$的張角大於$\angle AP_{n+1}B$，所以$P_{n+2},P_{n+3},\cdots,P_{2n+1}$必在圓內。

故圓外、圓內各有n個點。

參考解答(二)

(1)

(a)找到兩點A_1,A_2，過A_1,A_2作一直線L_1，使另外三點$A_3A_4A_5$在L1的同側。

(b)作$\triangle A_1A_2A_3,\triangle A_1A_2A_4,\triangle A_1A_2A_5$的外接圓，圓心分別為$O_1,O_2,O_3$，三圓兩兩相交於$A_1A_2$。

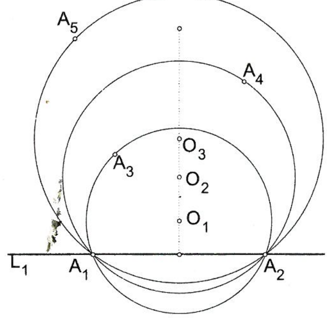
(c)令$\overline{O_1A_1} < \overline{O_2A_1} < \overline{O_3A_1}$，則$A_3$在圓$O_2$內，$A_5$在圓$O_2$外(假設$\overline{O_2A_3}=\overline{O_2A_4}$，則$A_1A_2A_3A_4$共圓。與題目假設矛盾；設$\overline{O_2A_3} > \overline{O_2A_4}$，即$A_3$在圓$O_2$外，則會有兩種情況：一是$A_1A_3A_2$弧在$A_1A_4A_2$弧外，即$\overline{O_1A_3} > \overline{O_2A_4}$，但$\overline{O_2A_4}=\overline{O_2A_1} > \overline{O_1A_1}=\overline{O_1A_3}$，矛盾；一是$A_1A_3A_2$弧與$A_1A_4A_2$弧交於一點，即圓$O_1$與圓$O_2$相交於三點，矛盾。於是$\overline{O_2A_3} < \overline{O_2A_4}$，即$A_3$在圓$O_2$內。同理可證，$A_5$在圓$O_2$外。

(2)

(a)找到兩點A_1A_2，過A_1A_2作一直線L_2，使另外$2n+1$點$A_3,A_4,\cdots..A_{2n+3}$在L_2的同側。

(b)作$\triangle A_1A_2A_3,\triangle A_1A_2A_4,\cdots\triangle A_1A_2A_{2n+3}$的外接圓，圓心分別為$O_1,O_2,\cdots O_{2n+1}$，$2n+1$個圓兩兩相交於$A_1,A_2$。

(c)令$\overline{O_1A_1} < \overline{O_2A_1} < \cdots\cdots < \overline{O_{2n+1}A1}$，由(一)得知，$A_3,A_4,\cdots,A_{n+2}$在圓$O_{n+1}$內，$A_{n+3}$，$A_{n+4},\cdots A2_{n+3}$在圓$O_{n+1}$外。



評析：

(1)參與徵答的共有10位同學，平均得分為4.5分，得分率為64.3%。

(2)此題所應用到的數學觀念淺顯，就是圓內角＞圓周角＞圓外角，但要能將其歸 納出一個較有系統的方法來討論分析卻不容易，故參與答題同學相對減少。

(3)答題優良的有：北縣板橋海山中學張源平、江翠國中黃明山、南市建興國中黃信溢、北市大直國中陳俊曄，其中大直高中陳俊曄以圓心位置及半徑大小來思考，亦不失為一良好方法。