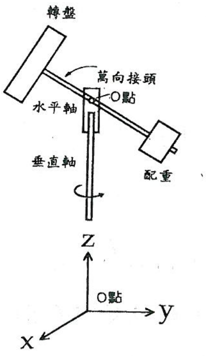
陀螺運動的簡單解釋和演示

周鑑恆

千變萬化的陀螺運動是說明角動量和力矩關係的絕佳範例。本文在簡化的條件下，透過較貼近物理直覺的解釋，得出陀螺章動和進動方程式，解出一般教科書中常見的解；並設計一簡易實用之陀螺，演示其運動的情形。



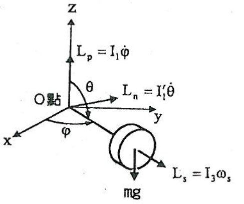
圖一

圖一所示乃是實驗教學常用的陀螺，萬向接頭的部分能使轉盤對稱軸繞著水平軸和垂直軸（z 軸）改變方向。整個陀螺（包括轉盤、配重、軸桿等）可視為由許多質點組成的系統，運用牛頓運動定律不難導出

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}_{tot}}{dt}$$

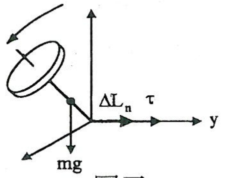
其中 $\vec{\tau}$ 是作用在系統上所有外力對 O 點（O 點為實驗室座標中靜止的點）造成之力矩（以下逕稱力矩），$\vec{L}_{tot}$ 是整個系統對 O 點定義的角動量（以下逕稱角動量）。力矩和角動量均以實驗室座標描述。

通常陀螺之萬向接頭以極佳的軸承構成。整個系統可繞著 z 軸自由轉動，因此外力對 O 點造成之力矩，幾無 z 方向之分量（z 方向極小之力矩乃由 z 軸軸承極小的摩擦力造成）。換言之，整個系統對 O 點定義的角動量在 z 方向之分量必須守恆。若整個系統之質心不在 O 點正上方，$\theta = \frac{\pi}{2}$（即 90°）時，（見圖二）重力對 O 點造成之力矩 $\tau = mgr_{cm}$ 平行 xy 平面，m 是系統總質量，r_{cm} 是系統質心至 O 點的距離。



圖二

陀螺之角動量可以寫成 $\vec{L}_{tot} = \vec{L}_s + \vec{L}_p + \vec{L}_n$，當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 時，$L_s = I_3\omega_s$，$L_p = I_1\dot{\varphi}$，$L_n = I_1'\dot{\theta}$（見圖二）。其中，轉盤以高角速度 ω_s 轉動造成 L_s，I_3 是繞對稱軸的轉動慣量，陀螺 θ 角之角速度和 φ 角之角速度分別造成 L_n 和 L_p。I_1 和 I_1'（$I_1' \approx I_1$），分別是繞 z 軸和繞水平軸之轉動慣量。若 $\omega_s >> \dot{\varphi}$，$\omega_s >> \dot{\theta}$，$\omega_s$ 之大小不變，則 $\vec{L}_{tot}$ 之變化主要由 $\vec{L}_s$ 方向之改變和 $\vec{L}_p$、$\vec{L}_n$ 大小之改變造成（$\vec{L}_n$ 和 $\vec{L}_p$ 方向改變造成之角動量變化可以忽略）。



圖三

為了說明上述簡化情形之下陀螺的運動，首先，假設轉盤不轉動，如圖三所示，即 $\omega_s = 0$，則 $L_s = 0$，若質心不在 O 點正上方，即有

平行 y 軸之力矩 τ，若陀螺初始時靜止，即逕自繞 y 軸倒下，由零開始產生在 y 軸方向角動量 L_n，使得 $\frac{\Delta\vec{L}_n}{\Delta t}=\frac{\Delta\vec{L}_{tot}}{\Delta t}=\vec{\tau}$。這符合日常經驗，也很容易以物理公式解釋。

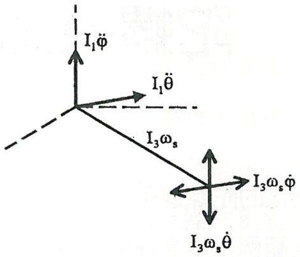
但若轉盤快速轉動，即 $\omega_s\neq 0$，則 $L_s\neq 0$，陀螺若直接倒下，固然和其轉盤不轉時一樣，會造成在水平方向平行 $\vec{\tau}$ 的 $\Delta\vec{L}_n$，但 $\vec{L}_s$ 之方向卻因此指向較下方，總角動量 $\vec{L}_{tot}$ 之 z 方向分量變小，即不守恆，此違背 z 方向並無力矩分量，故 z 方向之角動量須守恆之條件。因此，若無其他補償，當 $\omega_s\neq 0$ 時，直接倒下的運動不容許單獨發生。$\vec{L}_s$ 只能進動改變方向，使得 $\Delta\vec{L}_s$ 平行 $\vec{\tau}$，以滿足 $\frac{d\vec{L}_{tot}}{d\tau}=\vec{\tau}$。然而一旦發生進動，此進動產生 $\frac{\Delta L_p}{\Delta t}$，$L_{tot}$ 在 z 方向之分量由零增加為 L_p，故 $\vec{L}_s$ 必須章動向下加以抵銷，使 L_{tot} 在 z 方向之分量守恆，章動於是與進動一起發生。但章動會造成章動角動量 L_n 在 $\vec{\tau}$ 方向的變化，$\frac{\Delta L_n}{\Delta t}$ 又會使 L_s 之進動受到影響。若進動變慢，L_p 變小，$\vec{L}_s$ 又必須章動上翹加以平衡，使 L_{tot} 在 z 方向之分量守恆。

總而言之，進動會伴隨使 $\vec{L}_s$ 改變俯仰角度 θ 的章動，使 z 方向之角動量守恆：

$$\left(\frac{\Delta L_p}{\Delta t}\right)+\left(\frac{\Delta L_s}{\Delta t}\right)_{\text{因為章動造成}}=0;$$

而章動造成之角動量變化率和使 $\vec{L}_s$ 改變 φ 角之進動所造成之角動量變化率相加之和，應等於外力力矩：即

$$\frac{\Delta L_n}{\Delta t}+\left(\frac{\Delta L_s}{\Delta t}\right)_{\text{因為進動造成}}=\tau$$



圖四

因此，可得以下兩運動方程式，參見圖四（註 1）。

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot{\varphi})-I_3\omega_s\frac{d\theta}{dt}=0 \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}(I_1\dot{\theta})+I_3\omega_s\frac{d\varphi}{dt}=mgr_{cm} \tag{2}$$

亦即

$$I_1\ddot{\varphi}-I_3\omega_s\dot{\theta}=0 \tag{3}$$

$$I_1\ddot{\theta}+I_3\omega_s\dot{\varphi}=mgr_{cm} \tag{4}$$

再將(4)式微分一次，得

$$I_1\dddot{\theta}+I_3\omega_s\ddot{\varphi}=0 \tag{5}$$

由(3)式求得 $\ddot{\varphi}$，代入(5)式，即得

$$\dddot{\theta}+\left(\frac{I_3\omega_s}{I_1}\right)^2\dot{\theta}=0 \tag{6}$$

其中 $\dot{\theta}\equiv\omega_n$ 為章動之角速度，(6)式可重寫成

$$\ddot{\omega}_n+\left(\frac{I_3\omega_s}{I_1}\right)^2\omega_n=0 \tag{7}$$

則 $\omega_n(t)=W\cos(\Omega t+\alpha)$；$\Omega=\frac{I_3\omega_s}{I_1}$ (8)

W 和 α 須由初始條件決定。根據(4)式，

$$\begin{aligned}mgr_{cm}&=I_1\ddot{\theta}+I_3\omega_s\dot{\varphi}\\&=I_1\dot{\omega}_n+I_3\omega_s\dot{\varphi}\end{aligned} \tag{9}$$

亦即

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{1}{I_3\omega_s}\left(mgr_{cm} + W\, I_3\omega_s \sin(\Omega t + \alpha) \right) \quad (10)$$

令初始條件為

$$\begin{cases} \dot{\theta}(0) = \omega_n(0) = 0 \\ \theta(0) = \pi/2 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

因為 $\omega_n(0) = 0$，故由(8)式得$\alpha = \dfrac{\pi}{2}$，又根據(10)式

$$\dot{\varphi}(0) = \frac{1}{I_3\omega_s}\left(mgr_{cm} + W\, I_3\omega_s \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 0 \quad (12)$$

得 $W = -\dfrac{mgr_{cm}}{I_3\omega_s}$ 。

整理後可得章動的情形：

$$\dot{\theta}(t) = \omega_n(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3\omega_s}\sin\Omega t \quad (13)$$

$$\theta(t) = \theta(0) + \int_0^t \omega_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \frac{mgr_{cm} I_1}{(I_3\omega_s)^2}(1-\cos\Omega t) \quad (14)$$

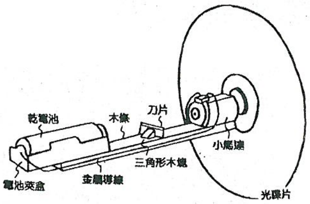
進動的情形：

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3\omega_s}(1-\cos\Omega t) \quad (15)$$

$$\varphi(t) = \frac{mgr_{cm}}{I_3\omega_s}\left(t - \frac{I_1}{I_3\omega_s}\sin\Omega t \right) \quad (16)$$

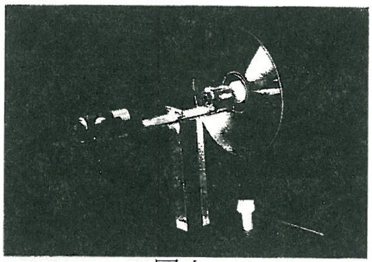
值得注意的是，不同之初始條件下，$\varphi(t)$和$\theta(t)$之關係將有所不同。此外，仔細觀察(1)式和(2)式，若在任何時刻$\dfrac{d\theta}{dt} = 0$都成立，則$I_1\dot{\varphi} = \text{constant}$，$I_3\omega_s \dfrac{d\varphi}{dt} = mgr_{cm}$ 也是解，正說明陀螺也有可能只進動而無章動。

備齊一張廢棄之光碟片、進口玩具馬達（轉動時較穩定，約一、兩百元）、刀片（由廉價刨鉛筆刀中拆下）、Size AA 電池、電池莢盒、長約 14 公分，厚 5 公釐，寬 1.2 公分之木條、縫衣針、一小塊玻璃、橡皮擦、以及 PE 塑膠棒（塑膠材料行均有售）。將 PE 棒用普通車床車成適當的小圓盤，並於中心鑽一小孔，再將其嵌入光碟中心圓孔，馬達轉軸插入

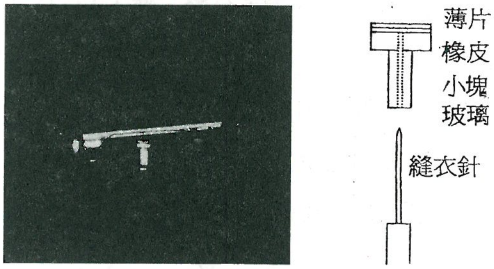


圖五

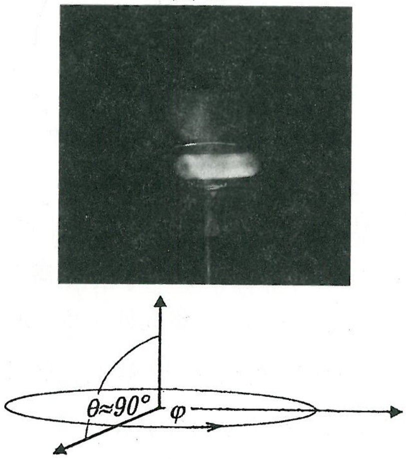
圓盤小孔中，即可驅動圓盤轉動，依圖五所示，將馬達、刀片、電池和電池莢盒以 AB 膠固定在木條上，刀片刀鋒向外，並以兩小塊三角形之木塊加強垂直立於木條上，整個組合之質心位置與刀鋒位置約有 1 公分的距離。電池接通玩具馬達後，即完成一具動力陀螺（註 2）。圖六為此陀螺之實物攝影，另外再用 PE 棒車製圖七側視插圖所示的軸承，軸承中心鑽一小孔，恰容縫衣針穿過，軸承上方牢牢黏上一小塊玻璃，玻璃上置一薄橡皮擦（從橡皮擦割下一薄片）。縫衣針尖端向上垂直固定在支柱上，再將陀螺以刀鋒置於覆蓋橡皮之軸承上，如圖七所示。這具動力陀螺即從容不迫地重複演示本文所述的進動（見圖八）和章動（圖九）。



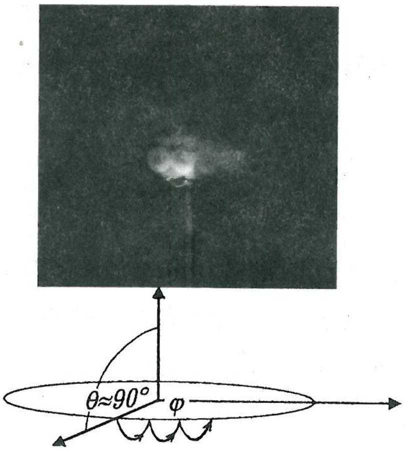
圖六



圖七



圖八



圖九

誌謝：感謝源流基金贊助。

註釋：

(1)此方程式組之物理意義顯而易見，較一般教科書上繁複的數學計算簡單，切合實驗教學所需。

(2)此動力陀螺針對改良台灣大學普通物理實驗室自製的陀螺而設計。

圖說：

(一)一般實驗教學所用之陀螺。圖中箭頭表示萬向接頭轉動的情形。

(二)$\theta \approx \frac{\pi}{2}$時，陀螺之轉盤自轉、章動和進動造成之角動量分別為$L_s$、$L_n$和$L_p$。

(三)轉盤不轉時，陀螺受重力造成之力矩即直接倒下。

(四)進動和章動均會造成L_s之變化，其變化率分別為$I_3\omega_s\dot{\varphi}$和$I_3\omega_s\dot{\theta}$。而章動本身之角動量為$L_n = I_1\dot{\theta}$，其變化率為$I_1\ddot{\theta}$；進動本身之角動量為$L_p = I_1\dot{\varphi}$，其變化率為$I_1\ddot{\varphi}$（進動本身之角動量之方向，亦因章動而改變，惟其變化在此$\theta \approx \frac{\pi}{2}$之情形下可忽略）。

(五)動力陀螺的立體圖，其中刀片乃用兩小塊三角形的木塊固定，垂直立於木條上。

(六)動力陀螺之實物攝影和所需之組件。

(七)實驗動力陀螺的情形，插圖為軸承之側視圖。

(八)長時間曝光拍攝陀螺進動，插圖顯示陀螺對稱軸運動之軌跡。

(九)長時間曝光攝得的進動和章動，插圖顯示陀螺對稱軸運動之軌跡，亦即(14)式和(16)式描述的情形。