練習在數學教學的回顧與展望：嘗試建立綜合性原則

邱文彬

嶺東技術學院　通識教育中心

摘　要

練習在傳統行為取向的學習論中一直扮演重要角色，隨著學習論典範的轉移，認知取向已經取代聯結論的地位，在當前強調理解、意義與能力發展的觀點下，練習是否應該就此走入歷史?!為了在能力假設之認知取向學習觀下替練習重新定位，作者首先回顧傳統學習理論的練習觀，接著從現行認知學習論中推論對練習的啟示，並據此統整出符合理解與能力發展觀點的綜合性練習原則，其中包括安排練習的前置考量與設計練習活動的一般性原則。前者的論點在於認知發展層次、先前知識與短期記憶的容量限制。後者包括：練習應增進內在表徵的多元性；練習活動的表徵應從具體到抽象；練習作業應與脈絡結合；練習活動應提供學習者自我調整的機會；練習作業應使學習者能夠瞭解問題意識；練習必須考慮學習者的動機因素；練習活動安排成團體解決的學習情境。

關鍵詞：效果律、意義化學習、練習

一、傳統學習理論的練習觀

回顧過去認知領域的教學中，尤其是數學教學課程，大多數的學習者都曾經歷花費許多時間與努力在練習上面。由於這些練習問題通常都是一些相類似甚至重複的計算，只是數字上有一些改變而已，因此，這類的工作稱之為「練習」(drill and practice)。這種「練習」在數學教學上佔據了相當久遠的歷史，特別是在「算術」上面。在過去，許多人都會接受某些練習是必要的，因此像「練習造成完美」(practice makes perfect) 這句話可說是耳熟能詳的。

過去的心理學家或教育學家何以強調「練習」可以增進學習的精進呢？主要是因傳統行為學派聯結論（associationism）的觀點使然。因此，以下先回顧桑代克（E. L. Thorndike）－數學教學與聯結論的先驅－的想法。

(一)桑代克的效果律

1922年，桑代克出版一本代表性的教科書－《算術心理學》(The Psychology of Arithmetic)，這本書中可說是早期「刺激－反應」心理學概念的始祖。就桑代克而言，他最著名也與數學教學有密切關係的即為「效果律」(the law of effect)，這是後來行為學派中增強原則（principles of reinforcement）的前身，其意義為特定行動的表現，取決於特定情境（situation）與行動（action）間的連結（connection）或又稱結（bond），當某一情

境與刺激間的連結建立，並且伴隨著一個令個體滿意的狀態時，這個連結的力量就會變強；當這個連結伴隨的後果為令行動者煩擾的狀態時，連結的力量就會消弱。將「效果律」應用至數學教學時，桑代克認為教師的任務就是發現算術中的組成連結，一旦良好組織的組成連結勾勒出來之後，「練習」的增強效果就可以在「效果律」的運作下促使連結變強，並且具體地表現在算術的運算上面（Thorndike, 1922）。

是故在桑代克的想法中，數學教學的第一步驟就是選擇適當的連結加以增強，這些連結當然必須是具體的行動反應。當適當地連結選擇出來後，這時就是「練習」要介入的時機了。透過嚴謹的練習安排，可以使我們所要的連結強度增強。這樣的教學觀是否真能如願地使學生學習到良好的數學觀念呢？要回答這個問題，就必須去思考在效果律下的「練習」，究竟學生學習到的是什麼？

(二)效果律下的練習效果

在「效果律」觀點下，任何複雜問題都可以被化約為一連串連結的組成，在聯結論盛行的時期，其實早已出現一個反對的聲音，那即是Brownell（1928）的批判。Brownell認為桑代克的「練習」方法扭曲了學習的目標，以算術為例，其學習目標主要是使學生能夠從事量化的思考，而不是對一系列數學問題反應出百分之百的正確答案，因此，以7＋5＝12為例，他認為兒童能夠反應出正確答案，並不表示他瞭解這個組合的意義，除非他真的知道為什麼7＋5＝12的理由，他必須可以完全的證成（justify）給自己與他人瞭解。

然而，聯結論顯然只將重點擺在增進反應速度（speed）與正確性（accuracy）上面，強調外顯行為反應的結果，並且以此結果來表示對於數學的瞭解，能否夠執行出來正確反應是其關心的課題。至於「練習」是否能夠增進隱內數學概念與原則的瞭解：有意義的學習，則無法提出有效的論點，甚至並不去觸碰這個議題。

正因為上述原因，Brownell（1928）認為數學學習的目標應為有意義的瞭解，而不是「自動化」的反應；「練習」顯然並不能夠發展意義，重複運作並不能夠促成瞭解（Brownell, 1935）。過份重視「練習」的機械化結果，會導致忽略數學意義中概念（concept）與關係（relationships）的學習，所學習的可能僅是一堆沒有組織與關聯的反應與獨立的事實，並不能保證能夠相互統整成有系統的關係。因此，Brownell（1928）認為「練習」必須是一種「有意義的習慣化」，而非僅是單純地「重覆」（repetition）而已；「練習」對於Brownell來說，只有可以增進「瞭解」（understanding）的活動才是有價值的，因為他重視的相互統整的原則（principles）與組型（patterns），而不是如聯結論所謂連結的集合（collection）。

(三)蓋聶累積學習論的觀點

對於練習效果來說，早期聯結論除了上節所述的限制之外，還有一點亦是數學學習中無法規避，或許也是任何學習理論無法規

避的，就是如何解釋「遷移」(transfer)：透過簡單的學習為何有助更複雜的學習。因為聯結論要能夠在學習理論中立穩腳步，自然必須針對練習如何可能促進學習遷移做出說明。因此，接下來先說明傳統聯結論的想法。

從聯結論的觀點觀之，由於它認為任何複雜的學習都可以被分解成一系列連結的集合，所以簡單的連結學習，會於對複雜學習有所助益，只要這個複雜學習的內容包括與簡單學習的相同成分－同樣連結的集合，這也就是早期從聯結論出發的「相同元素論」(identical elements theory)的想法。但是早期聯結論的觀點，主要是以實驗室研究作業(task)為基礎所得到的結果，對於學校數學教育中的學習而言，在類推上還有存在一段相當大的差距，其外在效度(external validity)免不了遭受質疑。後續從聯結論出發的學者，就試圖去減少實驗室與真實教學情境的差異，若要瞭解這當中的努力，蓋聶(Gagne', 1970)提出的「累積學習論」(cumulative learning theory)是很好的例子。

蓋聶(1970)的學習累積觀點應用在數學教學時，視概念的應用為某一特定技能(skills)，並且可以分解成有次序的次技能(subskills)：學習層級(learning hierarchies)。在學習層級的概念中，有幾個特點值得注意(Gagne' & Briggs, 1974)：第一，每一項被確認的技能與次技能都是一項表現的能力，意指一個人可以實際表現出來，所以就 Gagne' 的觀點來看，這些能力是以「行為來定義」的，換言之，學習層級是以行為技能所組成的階層組織，這些執行程序底下的數學知識並不見得完全對應於學習層級；第二，學習層級觀點認為從屬作業(subordinate task)包含在高層次作業之下，或是屬於它的一個成分，這中間似乎意謂學習的發展就是透過這種包含或從屬的關係；第三，位於學習層級上層位置的作業並不表示它比較難以學習，或是它比位居其下的作業要花費更多時間與努力來執行，高層位置的作業比位居其下的作業包含更多的組成技能；第四，在某一特定層級中的次技能，同樣可以在其他層級當中扮演一個組成分子的角色，因此，從屬次技能並不只屬於一個學習層級。

從上段蓋聶(1970)學習層級的幾個特點，對於練習效果而言，在於蓋聶進一步為傳統聯結論所缺乏的學習遷移理論提出一個層級架構；並且，對於蓋聶來說，由於一個次技能可以同時屬於不同學習層級的位置，如果新作業的次技能為先前已經學習過的，那麼新作業將可以學習地更快；不同作業間的關聯性，就是基於作業間的相互聯結，這個概念亦是累積學習論的中心觀點，因為它認為這些作業間的聯結可以允許知識從中「累積」，並且一起聯合運作以學習新的技能，這即是累積學習論解釋學習遷移的理論基礎。

從這個概念出發，「練習」在累積學習論的角色為學生熟練一些技能以後，在學習其他更複雜的作業與技能時，能夠更快速地執行這些技能。從蓋聶(1970)的理論來看，「練習」可以促使技能精熟(mastered)，並且有助於未來學習的更有效率。

然而從蓋聶（1970）的學習層級是以行為來定義的，而且學習層級的建立，無論透過實證或是理性，抑或是根據學科邏輯與執行技能為單位，整個學習層級的各個成份元素並不能代表其背後的數學原則與知識，誠如Wachsmuth（1983）對蓋聶的質疑：植基於概念與原則而來的技能才是發展其他概念與原則的基礎。雖然蓋聶認為透過「練習」使技能產生「自動化」（automatized）之後，可以有助於更高層次的學習，然而由於蓋聶並沒有對於執行這些技能背後的數學原則與概念加以論述，只強調行為所定義技能的結果，因此，依然無法走出傳統聯結論的窠臼，亦即對於意義的學習（meaningful learning）無法提出清楚的証成。

即使晚期聯結論學者（如Gagne', 1970）企圖對傳統學習論做一更完整地彌補，根據作者本節的批判，並不能滿足目前對教學目標的要求；是以在此學習架構下的練習效果，只能確保成分技能的自動化，雖然它在遷移效果的解釋比傳統聯連論來得有力，但仍然無法證成這種遷移效果代表學生真的可以對先前所學的技能加以統整與瞭解後才做出如此表現，無寧說是不同技能的機械式串連更為恰當。

二、數學教學的現行觀點：瞭解性與意義性學習

在瞭解以聯結論為基礎的「練習」模式及其意義與效果後，接下來可進一步探討的是：在現今強調意義與瞭解的數學教學觀中，「練習」應該以什麼樣的安排來呈現呢？在回答這個問題之前，必須先清楚強調瞭解的教學觀思想，才能決定「練習」是否還必要存在？以及應以什麼面貌存在？

(一)意義化學習：瞭解數學結構與培養數學能力

在聯結論盛行的年代裏，如何使數學成為有意義的學習早已為一些學者所注意。例如先前介紹過的Brownell（1935）就相當反對「機械式練習」，他認為這樣的學習方式只會使學習者認為數學是一套缺乏彼此關聯的事實與程序，而不是一個相互統整的數學結構。在當時，聯結論者雖然企圖使「練習」與每天的日常生活有關，使材料具體化，但是仍然難脫「機械式練習」的本質，這種方式一直持到50年代。

到了50年代末期與60年代初期時，受到認知心理學萌芽的影響，例如，早期Barlett（1932）與完形學派學者（Kohler, 1925; Koffka, 1924）以及皮亞傑（Piaget, 1970）發生認識論（genetic epistemology）等思潮，數學教學者開始受到意義化教學的強烈衝擊，他們被質疑的不僅在於只教導學生數學技能，更重要的是如何統整學生的數學知識。因此，數學課程的革命與改革運動開始變成數學教學的中心議題。數學家建議必須使學生學習到數學結構（the structures of mathematics），這並非只要求學習者能夠抓住數學知識的正式公理證明，而是希望學習者能夠瞭解在數學程序下的概念與關係。換句話說，數學教學應朝向概念性（conceptual），摒棄原先的計算性（computational）取

向；數學教學應重視學生擁有分析性與綜合性的瞭解。90年代與目前國內九年一貫的課程改革，則重視能力的開拓，以為終身學習奠定基礎，在這樣的數學教學改革方向下，數學數學開始朝向在社會互動的過程中建立數學知識與發展數學能力。

(二)強調理解的教學觀

目前在數學學習與教育中，最被重視與接受的想法即是數學學習的目標應為「理解數學」。這種趨勢可說建立在一個假定的基礎上面：即知識是一種內在表徵（internal representations），而且這些內在表徵是結構化的（structured）。這個基礎顯示出認識論體系中建構論（constructivism）的想法，意即知識的獲得並非如「接受觀」(received view）所言，只是單純地對外在事件的加以複製（copies），而是經由個體主動經由表徵的形式加以建構出來的（Hiebert & Wearne, 1988）。從目前現有的證據也支持隨著時間的進展，學生的確是在形成表徵，建構關係，並且從中試圖創造自己的瞭解（Bednarz & Janvier, 1988; Carpenter & Moser, 1984; Siegler & Jenkins, 1989）。理解式學習所獲得者為內心化與運思化的動態知識基模，這種「知其所以然」的學習有助學生發展「如何學」的基礎，並從中培養數學的批判思考與欣賞數學的能力。

理解式的數學學習有什麼優點呢？Hiebert和Carpenter（1992）的說明是很好的參考。

1.理解具有產生性性質

既然接受學生在數學習上是建構自己所瞭解的數學知識，這表示學生是與外在世界互動下，創造出自己的內在表徵，並且建構出這些表徵的網路結構。在這樣的過程中，關鍵的一點在於學習的過程是發明性的（inventiveness）（Piaget, 1973; Resnick, 1980），在數學學習情境中，學生主動發明解決問題的策略。因此，一個統整良好的表徵網路具有生產性（productive）（Carpenter & Moser, 1984; Wearne & Hiebert, 1988），這是因為倘若內在表徵是一個連結良好的網路，則學生的的生產性發明是有方向、可嚮導與可監控的；倘若不是，則發明很可能是雜亂無章、隨機或甚至錯誤的（Resnick, 1987）。

2.理解可以促進記憶

誠如早期Barlett（1932）對於記住(remembering）的看法，現在也一致認為記憶是一個建構或再建構（reconstructive）的過程，而不是「被動地」(passive）的儲存動作而已。對於學習者來說，訊息的表徵是以適合（fits）他們本身既存的知識網路來形成的，使新訊息與既存知識網路加以連結與統整；因此，若是學習者瞭解所學習的新訊息，那麼表示新訊息已和既存知識有良好的連結，並可因此而記憶得更好（Bruner, 1960）。理解可以增進記憶的原因在於統整的知識網路會比孤立的片斷訊息來得不容易崩潰與瓦解；並且，網路結構會有較多的回憶路徑（routes）供作提取時的線索來源。

3.理解能夠減少機械式記憶量

若是數學結構的瞭解可以促進記憶，這同樣意謂所學的知識間彼此存在互連結的網

路結構，一個知識網路若愈有結構與連結，自然就減少單獨記憶孤立部份的負荷，於是所需記憶的項目會變得較少。只要記憶住一個統整性的知識網路結構，因其中包含緊密連結的成分，便能因此同時處理很多不同的問題。

4.理解可以增進學習遷移

學習遷移是數學學習中的重要目標，因為教學者無不希望學生可以根據先前所發展的能力去處理新問題，但若是無法經由瞭解形成統整的結構，則每一問題都需要一個策略與其對應，這樣的方式太過沒有效率，自然會產生類化的限制性。然而，一旦學習者理解形成數學問題與解決數學問題的能力之後，則其包含性與類推性便加對增強，可以較有效地把新問題「適應」至既有的認知結構。

(三)練習的重新定位

瞭解現今數學教學強調理解數學結構，以及培養數學視野的教學觀之後，傳統的「機械式練習」已經很難立足。第一，它沒有考慮個體的發展限制；第二，經由這樣的練習模式所得到的結果，只能保證是技能的連結，並不能有力證成學習者可以透過這樣的方式促進瞭解；第三，學習遷移的效果有其限制性；第四，無法導引學生進入數學視野，從事數學探究。

如果要使「練習」能夠佔有一席之地，勢必要放棄傳統機械式的模式，任何形式的「練習」活動都應該置於能夠增進理解數學結構的觀點下，增進學習者的內在表徵的連結與統整，使其不失為孤立、無關聯的分散連結（bonds）；並且，由於學習是一個獲得的過程，「練習」應置於學習理解的過程當中，而不是在學習者瞭解之後的一種過度練習（over practicing）；「練習」必須是一種有助於理解數學概念與原則的一種活動，以期使學生從中培養數學視野，促進數學的批判分析能力。在這樣的定位下，接下來的議題就必須尋求「練習」在學習理論上的支持，意即要視增進數學理解與發展數學能力的練習安排能否有適切的學習理論支持，以支撐「練習」在數學學習歷程中佔有適當的價值與定位。

(四)認知學習論對練習角色的啟示

自從認知心理學在60年代開始蓬勃發展之後，許多認知學習發展理論大量出現（Bandura, 1986; Brown, Collins, & Duguid, 1989; Bruner, 1960; Case, 1978; Klahr & Wallace, 1976; Piaget, 1973; Siegler, 1976; Sternberg, 1989; Vygotsky, 1962），其中有以下三個學習理論對於「練習」有直接的論述，這可說是「練習」能夠在現今教學觀底下繼續存活的學習理論基礎。

1.凱司的理論

凱司（1985）的理論企圖結合皮亞傑學派與訊息處理理論的觀點，由於他的認知發展階段與皮亞傑理論(Piaget, 1970)也因此被稱為是新皮亞傑學派的學者。凱司的理論強調工作記憶（working memory）或短期記憶（short-term memory）的限制，他認為兒童天生具有訊息處理的潛能，這些潛能包括設定

目標，建構問題解決策略，達到目標與統整不同的問題解決策略等等。然而，凱司認為天生潛能能否促使兒童認知進步有賴於兒童短期記憶容量的配合，如果新的學習不需要很大的運作容量，未超乎兒童既有的運作能力，則可能完成認知性的訊息處理。那麼兒童如何克服短期記憶的限制呢？凱司提出兩個可能生，一個重要轉變是「生理成熟」，另一個是「自動化」（automatization）。自動化的達成必須透過「練習」，藉由「練習」可使短期記憶的運作更有效率，使其剩餘資源能夠移作其他方面的訊息處理。

凱司（1985）的理論一方面考慮到兒童短期記憶發展的限制，一方面也指出若能夠藉由「練習」使學習者的短期記憶更有效運作，便可使學生擁有多餘的認知資源去瞭解到自己原先自發性策略（spontaneously strategies）的缺點何在，才能機會進一步調整原先的策略，進而使學習者拓展短期記憶運作能力，發展出更有效率的解決策略。對於凱司來說，「練習」活動可以使教學者瞭解學習者的自發性策略，使教學者瞭解學習者的起始功能組織（initial functional organization），這是進一步安排學習者練習更有效策略的前置步驟（Case, 1978）。

2.班都拉的社會認知學習論

在教學活動當中，學習者常常位於一個觀察者的角色，觀察教學者如何以口語或行動來示範數學概念或解決數學問題，因此，對於班都拉（Bandura, 1986）的觀察學習（observational learning）模式而言，有必要瞭解這樣的學習模式下，「練習」可以扮演什麼角色。

班都拉（1986）認為學習大部份是訊息處理（information-processing）的活動，處理的訊息是有關行為的結構（structure of behavior）以及相關的環境事件；處理過程則是將這些訊息轉換成符號的表徵（symbolic representation）做為行動的指引。觀察學習的學習模式包括以下四個歷程：「注意歷程」（attentional processes）、「保留歷程」（retention processes）、「產出歷程」（production processes）與「動機歷程」（motivational processes）。根據班都拉的觀點，在「產出歷程」中，重點在於「概念配合」（conception-matching）的過程，個體觀察學習後所產出的行動受到內在表徵化概念的主導，並可透過對自己產生行動的觀察，來瞭解行動與內在概念符合的程度，這種過程具有回饋性的價值，可以修正或調節內在概念，進而一步一步符合學習目標（Bandura, 1986）。

班都拉（1986）的理論揭櫫學習是一個內、外交相影響的雙向學習歷程，所以不僅示範者的示範（modeling）非常重要，它也同樣重視個體的自行練習，因為「自行演練」可以調整內在的概念，有助於修正錯誤行動，是一種很好的學習回饋管道。從「社會認知學習論」的觀點而言，「練習」是有其必要的；在學習的過程中，透過「練習」可以使學習者的內在概念得到回饋性的訊息，有助於修正、調整與精進化。

3.布朗等人的情境學習論

布朗等人的（Brown et al., 1989）「情境學習論」認為知識是內蘊於情境當中的，是

在活動、脈絡與文化下發展與使用的，因此活動（activity）與情境（situation）都是認知與學習歷程中密不可分的整體。對於像數學等概念性知識而言，Brown 等人認為知識是情境內蘊並且經由活動漸進發展而來，我們應該放棄視其為抽象、自我包含（self-contained）的實體；相反的，應視概念性知識為一套工具，因為學習者不單僅獲得這些概念性知識，而是必須能在所處的真實世界中使用它們，瞭解它們的實際功用（Brown et al.,1989）。

對於過去的學校教學活動中，布朗等人（1989）認為教師通常只注重數學抽象概念的移植，這種教學形式常是僵化的、定義良好的、以及與情境脫離的實體，學生常被過度要求以定律的方式使用這些概念，結果導致於無法應用在真實的文化情境中；因此，「情境學習論」強調「實然性活動」（authentic activity），這是指在文化脈絡下的普遍性練習活動，這樣的「實然性活動」因其與情境聯結且蘊含其中，學習的結果是有目的、有意義的，透過「實然性活動」所形成的表徵是依存於情境的「指標化表徵」（indexicalized representation），這會影響學習者在未來的表現能夠與情境結合並且類化應用得宜。

布朗等人（1989）的觀點與當前國內九年一貫的數學課程相互呼應，其課程目標亦強調數學課程的發展應以生活為中心，以促進學生的學習興趣與積極參與，培養日常生活所需的數學素養，以提升生活品質，改善生活環境。

「情境學習論」對於練習活動的啟示在於「練習」必須具備有意義脈絡（meaningful context），包括物理環境脈絡與心理脈絡；而且練習活動所獲得的不僅在於抽象的數學概念，更希望能夠與實際情境結合，使其內在表徵具有豐富的脈絡蘊含性，這樣的「指標化表徵」在實際使用上更容易與情境結合，以及被情境線索所激發。在有意義脈絡下的學習活動，使數學概念成為具有實際用途的工具，而不是一套武斷（arbitrary）程序或抽象運作而已。

由於「情境學習論」視學習為一種涵化（enculturation）的過程，這指出社會互動是非常重要的，因此，如果「練習」能以一種團體學習（group learning）的方式進行，更能夠達到下列效果。第一，集體式問題解決創造變異：團體不僅是聚集成員知識的方式，而且可以發展綜合性解決策略的機會；第二，扮演多元角色：團體學習可以允許不同角色的扮演，對於這些不同角色的意圖有討論與妥協的機會；第三，面臨無效策略與錯誤概念的機會：團體學習可使成員有機會去討論無效策略與錯誤概念的機會，這些在個人單獨式的學習中是無法獲得的經驗；第四，提供集體解決問題的社會互動技巧：團體學習可以使學生發展與其他成員共同解決問題的互動技巧。

三、結論：嘗試建立綜合性的練習原則

經過前二章的探討，可知「練習」在目前強調瞭解數學結構與發展數學能力的意義化教學下，並非完全喪失其價值與重要性。要為「練習」找到新的定位，首先是將「練習」

的內涵擴展，揚棄傳統「機械式」與「過度學習」的模式，學習過程中的有意義活動才是目前「練習」的主要位置，如此才可能使「練習」與學習過程相結合，不再只是單純的習慣強化連結。

在以認知心理學與建構論觀點出發的學習發展理論中，也為「練習」與學習的結合指出一些方向，例如，在上一章中討論凱司（1985）、班都拉（1986）、布朗等人（1989）的認知學習理論，就是企圖找出安排與設計練習的理論根據。以下原則為作者根據現今數學教學觀與重要認知學習論的觀點，為「練習」在當前數學教學與學習的趨勢中，建立一些可供教學參考的綜合性原則。

(一)安排練習的前置考量

自從皮亞傑的思想逐漸被數學教學者重視之後，一個與安排「練習」有關的重要議題開始浮現：學習者的認知發展限制（cognitive developmental constraints）。若吾人相信學習者學習數學時，並非是僅對外在材料的單純拷貝，而是由個體主動建造數學知識與視野。在這樣的觀點下，學習者本身的發展限制與前備知識（prior knowledge）是賴以建構經驗的基礎，知識的建造必須植基於前備知識並且受限於前備知識。倘若沒有考慮發展限制的因素，那麼在學習過程中的練習活動，要不是無法使學習者增進瞭解，便容易成為聯結論架構下刺激－反應的連結而已，不僅不能讓學生對數學概念的理解更進一步，同時內在數學能力的發展亦將與練習脫鉤。

1.皮亞傑的發生認識論

皮亞傑（1970）認為思考是由內在的認知結構來主導，因此，對於數學學習來說，學習者的認知結構是他們思考與邏輯推理的基礎，學習數學勢必會受其目前認知結構發展水平的影響，因此，皮亞傑觀點的啟示在於以下幾點。

(1)練習應配合認知發展水平。皮亞傑的認知發展階段分為四個時期：感覺動作期（sensorimotor stage）、前運思期（preoperational stage）、具體運思期（concrete operational stage）與形式運思期（formal operational stage）。就一般發展趨勢而言，從正式的學校教育開始，小學階段屬於具體運思期階段，國中以後開始進入形式運思期。

以小學階段的具體運思期為例，這個時期兒童可以開始從事可逆性的邏輯運思，但只限於以具體材料與活動上。因此，若是教學活動以抽象的符號做為材料，在超過兒童認知發展水平的情況下，對於認知結構的發展不會有所幫助。這種配合兒童發展水平的教學觀，以數學教學為例，例如，當兒童尚未具備基本數字概念時，我們不應期待他們能夠真正瞭解加法算則；在長度保留（conservation of length）尚未瞭解時，教以測量（measurement）亦是不適當的安排。同樣地，對於「練習」來說，「準備度」(readiness）的概念是非常重要的，這也是從皮亞傑理論所衍生出「練習」與發展必須配合的原則。

(2)練習應能帶給學習者適度的「認知衝突」(cognitive conflict）。皮亞傑理論強調認知衝突是去平衡化的動力來源，這也是認知

結構向上發展的基礎，然而重點在於這種認知衝突造成的「擾動」（perturbation）不能太大，否則與現有認知水平差距太大，只會造成兒童忽略的 α 型反應（type α reaction, Piaget, 1975）。

(3)練習作業的層級安排應以發展邏輯為基礎。這個原則是從「練習」必須配合發展水平進一步推論而來，「聯結論」與「累積學習論」是基於「學科邏輯」出發的學習層級，倘若要使「練習」能夠配合發展水平，則學習層級的結構應回歸學習者本身，意即以學習者所能理解數學結構的「發展邏輯」為基礎，才符合學習是由學習者主動建構的觀點。

2.凱司的短期記憶觀點

根據前述凱司的理論（1978; 1985），他的教學觀強調考慮兒童短期記憶的容量限制，這對於安排練習活動有兩個主要意義。

(1)考慮兒童短期記憶的容量限制。這層意義在於練習活動的問題情境安排，即訊息處理的項目數量應在學習者的短期記憶的容量之內。

(2)透過練習使學習者的短期記憶運作更有效率。這是強調「練習」要使學習者對某些訊息的處理變成自動化與形成組集（chunking），如此可使學習者有更多剩餘資源處理其它的訊息項目，以及在解決高層次問題時可以有其他資源分配更重要的處理歷程上。

(二)設計練習活動的綜合性原則

上節論述為關於練習活動安排上的前置因素，以下則在增進數學理解與發展能力的學習觀下，提出如何設計有意義的練習活動原則。

1.促進內在表徵的多元性

在朝向理解數學的教學觀之下，強調學習者透過轉換（transformation）而來的表徵，據此建構出內在的數學原則與概念。根據 Dienes 和 Golding（1971）數學概念發展的觀點，數學概念是由許多具體經驗加以抽象而來，因此，概念應以多元蘊含（multiple-embodiments）的方式呈現，這意謂學習者應在不同形式的材料上運作，此觀點即為 Dienes 和 Golding 強調的「知覺變異性原則」（the principle of perceptual variability）。因此，「練習」同一概念應使學習者在多元材料下運作。例如，在分數概念的理解上，可從「數量」、「面積」、「液體容量」與「體積」的分割與組合中加以操作與掌握。

Dienes 與 Golding（1971）也認為多元性還包括「數學變異性原則」（the principle of mathematical variability），這是指數學概念應該類化到其他不同脈絡。舉例而言，學習數字進位概念除了常用的十進位外，還可以使學習者練習其他如二進位與八進位等等，因為這些進位下的數字運作概念是相同的。根據這些原則的「練習」可以增進學習遷移，使學習者可以將所學類化到不同形式的材料與不同脈絡的進位問題。

2.練習活動的表徵應從具體到抽象

布魯納（Bruner, 1966）認為概念發展有三種形式的表徵層次：活動（enactive）、心像（iconic）與符號（symbolic）。布魯納的想法認為這三種形式的表徵有其發展順序，每種型式表徵是以位居其前的表徵為發展基

礎，並且，在轉換到下一型式的表徵前需要大量的練習。

Dienes（1966）同樣也認為數學概念的發展是一系列循環的型式，每一周期的學習活動應從具體性到象徵性。根據這兩位學者的說法，練習活動的安排應遵循從具體到抽象、從行動到表徵的順序來安排練習作業。例如，以九年一貫的數學課程為例，在具體操作層次，學生透過花片的實物操弄，解決「16與16合併」的問題；在具體表徵層次，學生主動以畫圈的具體表徵學習解決「32平分為4個一堆」的問題，並察覺到其類型（pattern）；在類化具體表徵層次，學生能夠在透過具體表徵解決偶數分割與合併的經驗中，建立「偶數加偶數為偶數」的關係。

3.練習作業應與脈絡相結合

根據布朗等人（1989）「情境學習論」的觀點，學習應是情境蘊含的，不應與情境脫離，這意謂練習作業應該是在有意義的脈絡下進行，這樣的學習對於練習者來說才具有意義。例如，在分數概念的掌握上，可以生日慶生會的蛋糕分配，使學生在等分好的具體情境中，描述內容物為多個個物的幾份；從「兄弟二人每月可存的零用錢相差200元，二人合作存零用錢，三個月後便可購買1800元的跳舞機軟體」，透過二元一次聯立方程式的列出，解出二兄弟每月可存的零用錢各為多少？

4.練習活動應能提供學習者自我調整的機會

皮亞傑（1975）的發生認識論強調適度的「認知衝突」為認知結構向上發展的動力來源；班都拉（1986）的社會認知學習論同樣重視內在概念與行動的配合，由於正確的概念與行動表現並非一蹴可磯，因此需要經由訊息性的反應回饋來逐步校正。所以，練習活動必須給予學習者回饋，這種回饋來源可以透過兩種管道，一是教學者，即外在的回饋，另一是學習者本身內省，即自我回饋，這兩種回饋訊息都是自我調整（selfmodification）的重要動力因素。

就「教師的角色」而言，以數學教學與學習的過程為例，剛開始學習時，練習活動應由教師帶領著學習者一同參與練習活動，重點在於仔細觀察與詢問學習者的表現，給予適當地回饋訊息，提示線索，要求學習者能夠內省解題的策略與歷程，並加以表達出來。這種方式一方面可以瞭解學習者目前的學習結果與缺陷；另一方面，學習者也可以透過教師的回饋，進一步去修正與調整原先的內在概念。

在「自我回饋與校正」方面，練習活動剛開始是在教師的指導下進行有上述的好處，然而教學者應進一步期望學習者在「自我練習」的情況下，也能夠產生回饋性的訊息。因此，練習作業上應該提示學習者去思考「自己是如何解題的？」的提醒，對「社會認知學習論」（Bandura, 1986）的觀點而言，就是能夠意識並觀察自己的產生行動，透過「概念配合」的歷程，產生回饋性訊息來修正內在概念。當然，練習作業必須具備一個示範（demonstration）範例，使學習者具備修正的參照標準。例如，教科書上的示範，能必須配合不同思考發展層次，列出該層次可能

掌握的解題思路與操作活動。

5.練習作業應使學習者能夠輕易地瞭解問題意識

這個要點在於無論以口語或文字呈現練習作業，教學者都應以學習者目前能夠瞭解的程度作為問題呈現的根據，如同九年一貫課程中強調學習必須配合各階段學生身心與思考型態的發展歷程；因此，無論採用口語或文字說明，都應配合學習者的語文知識，練習作業所使用的字彙或語言必須是學習者熟悉而易懂的，以免降低掌握問題意識的機會。再者，這個原則還有個重要意義：若問題敘述能夠使學習者花費較少的資源去處理，能夠使學習者有較多餘力去從事選擇性注意、編碼、與建構解題策略等其他更重要的訊息處理步驟。

6.考慮學習者的動機因素

根據「社會認知學習論」的觀點（Bandura, 1986），練習活動應該能夠提高學習者的興趣，使其更用心地完成演練。在用心（mindfulness）的情況下，才可能意識到自己如何解題，以及其他回饋性的重要訊息。

7.安排團體解決的學習情境

從「情境學習論」關於團體學習的想法觀之，團體練習能夠獲得傳統個人單獨學習所沒有的優點（參照前述布朗等人關於「團體學習效果」的論述）。在當今多元化的社會中，廿一世紀的國民需要有理性與溝通素養，團體解決的學習情境必須是多元開放的，從理性溝通的學習歷程中，激勵多樣性的獨立思維方式，引導學生利用數學語言進行溝通，尊重各種不同的合理觀點，並可從中培養國民的民主素養。

整體而言，「練習」在學習與教學理論的發展中，有其特定的重要地位，即便在強調「以學生為主體」的建構論學習觀中，它仍然可以肩負促進學習的重要角色，只是在當前佔有主流地位的認知取向下，「練習」若要晚節有保，應該視為是學習的「過程」，而非學習的「手段」，意即從「練習」中促進數學概念的理解與發展數學能力，而不是數學運算的熟悉與自動化。作者希望本文能夠帶給從事數學教學與研究的反思，引發更多批判與對話，使「練習」能在當代學習與教學理論以及九年一貫課程中獲得更明確的定位。

參考文獻

1. Bandura, A.(1986). Social foundations of thought and action: A social cognitive theory. Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.
2. Bartlett, F. C.(1932). Remembering. London: Cambridge University Press.
3. Bednarz, N., & Janvier, B.(1988). A constructivist approach to numeration in primary school: Results of a three year intervention with the same group of children. Educational Studies in Mathematics, 19, 299-331.
4. Brownell, W. A.(1928). The development of children's number ideas in the primary grades. Chicago, IL: The University of Chicago.
5. Brownell, W. A.(1935). Psychological considerations in the learning and the

teaching of arithmetic. The teaching of arithmetic (The tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York: Teachers College, Columbia University.

6. Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. Educational Research, 18, 32-42.

7. Bruner, J. S.(1960). The process of education. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

8. Bruner, J. S.(1966). Toward a theory of instruction. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

9. Carpenter, T. P., & Moser, J. M.(1984). The acquisition of addition and subtraction conceptions in grades one through three. Journal for Research in Mathematics Education, 15, 179-202.

10. Case, R.(1978). Intellectual development from birth to adulthood: A neo-Piagetian approach. In R. S. Siegler (Ed.), Children's thinking: What develops? Hillsdale, NJ: Erlbaum.

11. Case, R.(1985). Intellectual development: A systematic reinterpretation. New York: Academic Press.

12. Dienes, Z. P., & Golding, E. W.(1971). Approach to modern mathematics. New York: Hutchinson & Co., Ltd.

13. Gagne', R. M.(1970). The conditions of learning (2nd ed.). New York: Holt, Rinehart & Winston.

14. Gagne', R. M., & Briggs, L. J.(1974). Principles of instructional design. New York: Holt, Rinehart & Winston.

15. Hiebert, J., & Wearne, D.(1988). Instruction and cognitive change in mathematics. Educational Psychologist, 23, 105-117.

16. Hiebert, J., & Carpenter, T. P.(1992). Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.). Handbook of Research on mathematics teaching and learning: A project of National Council of Teachers of Mathematics. New York: MacMillan.

17. Klahr, D., & Wallace, J. G.(1976). Cognitive development: An information processing view. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

18. Koffka, K.(1924). The growth of mind. London: Kagan Paul, Trench, Trubner.

19. Kohler, W.(1925). The mentality of apes. New York: Harcourt, Brace & World.

20. Piaget, J.(1952). The child's conception of number. New York: Norton.

21. Piaget, J.(1970). Psychology and epistemology. New York: Norton.

22. Piaget, J.(1975). The equilibration of cognitive structures (Translated by Brown, T., & Thampy, K. J., 1985). Chicago, IL: The University of Chicago Press.

23. Repp, A. C.(1935). Types of drill in

arithmetic (The tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics). New York: Teachers College, Columbia University.

24. Resnick, L. B.(1980). The role of invention of in the development of mathematics competence. In R. H. Kluwe & H. Spada (Eds.), Developmental models of thinking (pp. 136-244). New York: Academic Press.

25. Resnick, L. B.(1987). Constructing knowledge in school. In S. Liben (Ed.), Development and learning: Conflict or congruence?(pp. 19-50). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

26. Resnick, L. B., & Ford, W. W.(1981). The psychology of mathematics for instruction. Hillsdale, NJ: Lawrence Eulbaum.

27. Siegler, R. S.(1976). Three aspects of cognitive development. Cognitive Psychology, 8, 481-520.

28. Siegler, R. S., & Jenkins, E.(1989). How children discover new strategies. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

29. Sternberg, R. J.(1989). Mechanisms of cognitive development (2nd ed.). New York: Cambridge.

30. Thorndike, E. L.(1922). The Psychology of Arithmetic. New York: The MacMillan Publishing Company.

31. Vygotsky, L. S.(1962). Thought and language. New York: Wiley.

32. Wachsmuth, I.(1983). Skill Automaticity in Mathematics Instruction: A Response to Gagne'. Journal for Research in Mathematics Education, 14, 204-209.

33. Wearne, D., & Hiebert, J.(1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. Journal for Research in Mathematics Education, 19, 371-384.