Miquel 定理及其應用（續）

趙文敏

國立臺灣師範大學　數學系

丁、Simson線

根據定理 11(3)，當點 P 位於△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上時，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的每個 Miquel 三角形都退化成共線的三個點，其中的一個特例是點 P 至三條邊線的垂足，此三垂足所共的直線通常稱為點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線。這項命名本是為紀念 Robert Simson（1687-1768）發現這個性質之故，但在十九世紀末年，J. S. Mackay 經多方查考之後，發現這項命名是法國幾何學家 Servois 的誤解所用的錯誤名稱。事實上，外接圓上的點至三條邊線的垂足共線，此性質乃是 William Wallace 在 1797 年最先發現的。經過 J. S. Mackay 的新發現之後，三垂足的連線出現新的名稱，像 Wallace 線或垂足線 (pedal line) 等。不過，在下文中，我們仍使用傳統的名稱 Simson 線。

關於 Simson 線，下面是一些基本的性質。

定理 22：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形。

(1) 頂點 A_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線就是過點 A_1 而與直線 A_2A_3 垂直的直線。

(2) 過點 A_1 的直徑的另一端點對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線就是直線 A_2A_3。

證：顯然成立。//

定理 23：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形，點 T 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上異於頂點的任一點，且點 T 至直線 A_2A_3、A_3A_1 與 A_1A_2 的垂足分別為點 T_1、T_2 與 T_3。

(1) △ TT_2T_3 與△ TA_3A_2 為同方向的相似三角形；△TT_3T_1與△TA_1A_3為同方向的相似三角形；△TT_1T_2與△TA_2A_1為同方向的相似三角形。

(2) $\overline{TA_1}\times\overline{TT_1}=\overline{TA_2}\times\overline{TT_2}=\overline{TA_3}\times\overline{TT_3}$。

(3) $(1/\overline{A_2A_3})\overline{TT_1}\times\overline{T_2T_3}=(1/\overline{A_3A_1})\overline{TT_2}\times\overline{T_3T_1}=(1/\overline{A_1A_2})\overline{TT_3}\times\overline{T_1T_2}$。

(4) $(\overline{A_2A_3}:\overline{TT_1})$、$(\overline{A_3A_1}:\overline{TT_2})$與$(\overline{A_1A_2}:\overline{TT_3})$三比值中，有一個等於另外兩個之和。

(5) $\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$與$\overline{A_1A_2}$在 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 上的正射影分別等於$\overline{T_2T_3}$、$\overline{T_3T_1}$與$\overline{T_1T_2}$。

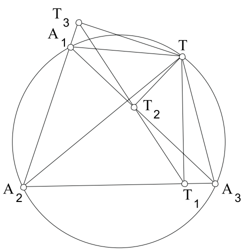

圖 19

證：參看圖 19。

(1) 因為點 T、T_2、T_3 與 A_1 共圓且點 T、A_1、A_2 與 A_3 共圓，所以，得

$\angle TT_3T_2=\angle TA_1T_2=\angle TA_1A_3=\angle TA_2A_3$，

$\angle TT_2T_3=\angle TA_1T_3=\angle TA_3A_2$。

於是，△TT_2T_3　△TA_3A_2。同理，可得△TT_3T_1　△TA_1A_3，△TT_1T_2　△TA_2A_1。

(2) 由(1)中的相似三角形的對應邊長成比例即得。

(3)將定理 10(2)的各等式代入(2)中的等式並引用正弦定律即得。

(4)根據(3)中的等式，此處三比值的比值等於 $\overline{T_2T_3}:\overline{T_3T_1}:\overline{T_1T_2}$，所以，欲證的結果由點 T_1、T_2 與 T_3 共線立即可得。

(5)因為點 T、T_1、T_2 與 A_3 共圓而且直線 TT_1 與 A_2A_3 垂直於點 T_1，所以，邊 $\overline{A_2A_3}$ 在 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 上的正射影等於 $\overline{A_2A_3}\cos\angle A_2T_1T_2=\overline{A_2A_3}\sin\angle TT_1T_2=\overline{A_2A_3}\sin\angle TA_3A_1$。

因為△ $A_1A_2A_3$ 與△ TA_3A_1 的外接圓相同，所以，可得

$\overline{A_2A_3}:\sin\alpha_1=\overline{A_1T}:\sin\angle TA_3A_1=$△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓直徑。

於是，邊 $\overline{A_2A_3}$ 在 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 上的正射影等於 $\overline{A_1T}\sin\alpha_1$，而依定理 10(2)，這就是 $\overline{T_2T_3}$ 的長。//

定理 24：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形，點 T 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上異於頂點的任一點，且點 T 至直線 A_2A_3、A_3A_1 與 A_1A_2 的垂足分別為點 T_1、T_2 與 T_3。若直線 TT_1、TT_2、TT_3 與△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓的另一交點分別為點 T_1'、T_2'、T_3'，則直線 A_1T_1'、A_2T_2'、A_3T_3' 都與點 T 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 平行。

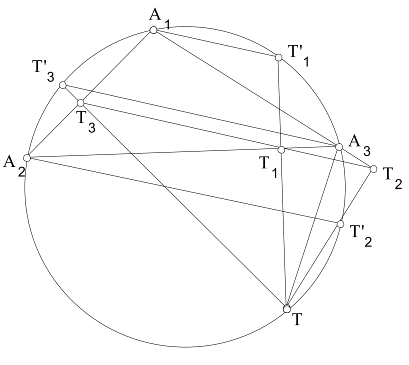

圖 20

證：在圖 20 中，因為點 A_3、T_1、T_2 與 T 共圓且點 A_1、A_3、T_1' 與 T 共圓，所以，可得 $\angle TT_1T_3=180^\circ-\angle TT_1T_2=180^\circ-\angle TA_3T_2=\angle TA_3A_1=\angle TT_1'A_1$。

因為同位角相等，所以 A_1T_1' 直線 與 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 平行。同理可證：直線 、 都與 Simson 線 $T_1T_2T_3$ 平行。//

下面的定理 25，是當 Miquel 三角形退化成共線的三相異點時，其 Miquel 點的一些相關性質。

定理 25：給定平面上四條相異直線，其中每兩線都相交，且任意三線都不共點，則下述三性質成立：

(1)此四直線所交出的四個三角形的外接圓共點。

(2)四個外接圓的公共點至四直線的垂足共線。

(3)四個外接圓的公共點與四個圓心等五點共圓。

證：設其中三直線所交出的三角形為△ $A_1A_2A_3$，而第四條直線與直線 A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2 分別交於點 P_1、P_2、P_3。

(1)依假設，四直線所交出的四個三角形為△ $A_1A_2A_3$、△ $A_1P_2P_3$、△ $A_2P_3P_1$ 與△ $A_3P_1P_2$。設三點集{P_1, P_2, P_3}對△ $A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點為點 P，則點 P 就是△ $A_1P_2P_3$、△ $A_2P_3P_1$ 與△ $A_3P_1P_2$ 的外接圓的交點。另一方面，因為點 P_1、P_2 與 P_3 共線，所以，依定理 6(1)及定理 11(3)，三點集{P_1, P_2, P_3}對△ $A_1A_2A_3$ 的 Miquel 點必在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上。換言之，△ $A_1A_2A_3$、△ $A_1P_2P_3$、△ $A_2P_3P_1$ 與△ $A_3P_1P_2$ 的外接圓共點，其公共

點為點 P。

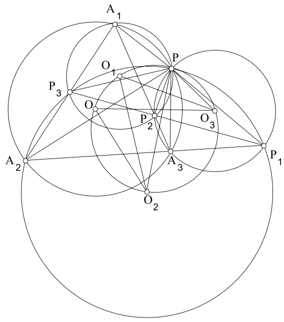

圖 21

(2)設點 P 至直線 A_2A_3、 A_3A_1、 A_1A_2 與 $P_1P_2P_3$ 的垂足分別為 T_1、 T_2、 T_3 與 T_4。因為點 P 在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上，所以，依定理 11 (3)，可知點 T_1、 T_2 與 T_3 共線。因為點 P 在△ $A_1P_2P_3$ 的外接圓上，所以，依定理 11 (3)，可知點 T_2、 T_3 與 T_4 共線。因為點 T_1、 T_2、 T_3 與 T_4 是相異點，所以，此四點共線。

(3)設△ $A_1A_2A_3$、△ $A_1P_2P_3$、△ $A_2P_3P_1$ 與△ $A_3P_1P_2$ 的外接圓的圓心分別為點 O、 O_1、 O_2 與 O_3。因為圓 $A_1A_2A_3$ 與圓 $A_2P_3P_1$ 的公共弦為 $\overline{A_2P}$，所以，兩圓心的連線 OO_2 與 垂直。同理，直線 OO_3 與 $\overline{A_3P}$ 垂直。於是，可得

$\angle O_2OO_3 = \angle A_2PA_3 = \angle A_2A_1A_3$。

其次，因為圓 $A_1P_2P_3$ 與圓 $A_2P_3P_1$ 的公共弦為 $\overline{PP_3}$，所以，兩圓心的連線 O_1O_2 與 垂直。同理，直線 O_1O_3 與 垂直。於是，在圖 21 中，可得

$\angle O_2O_1O_3 = \angle P_2PP_3 = \angle P_2A_1P_3 = \angle A_2A_1A_3$。

由此可知：點 O、 O_1、 O_2 與 O_3 共圓。另一方面，因為直線 OO_2 與 垂直，而且直線 OO_3 與 $\overline{A_3P}$ 垂直，所以，在圖 21 中，依圓心角與圓周角的關係，可得

$\angle A_2PO_2 = 90^\circ - \angle PO_2O = 90^\circ - \angle PP_1A_2$

$= 90^\circ - \angle PP_1A_3 = 90^\circ - \angle PO_3O$

$= \angle A_3PO_3$。

由此可得

$\angle O_2PO_3 = \angle O_2PA_3 + \angle A_3PO_3$

$= \angle O_2PA_3 + \angle A_2PO_2 = \angle A_2PA_3$

$= \angle A_2A_1A_3$。

於是，得 $\angle O_2PO_3 = \angle O_2OO_3$。由此可知：點 O、 O_2、 O_3 與 P 共圓。換言之，點 O、 O_1、 O_2、 O_3 與 P 五點共圓。 //

當共平面的四相異直線中每兩線都相交且任意三線都不共點時，我們稱此四直線構成一個完全四邊形(complete quadrilateral)。定理 25(2)中四垂足所共的直線稱為該完全四邊形的 Simson 線。

仿照定理19的證法，立即可得下述定理。

定理 26：若點 P 為△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上一點，則對每個 $k = 1, 2, 3$，直線 A_kP 對 $\angle A_k$ 的等角共軛線（即直線 A_kP 對 $\angle A_k$ 的平分線的對稱直線）必與點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線垂直。因為三條等角共軛線互相平行，所以，△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上的每個點對△ $A_1A_2A_3$ 都沒有等角共軛點。

利用定理 26 中的結果，可得出許多有趣的性質。

定理 27：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形。

(1)若點 P 與點 Q 為△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上兩相異點，則點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角等於劣弧 PQ 所對的圓周角。

(2)若 $\overline{PQ}$ 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓的一直徑，則點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線互相垂直。

(3)若點 P、 Q 與 R 為△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上三

個相異點，則點 P、Q 與 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線相交所得的三角形與△ PQR 相似。

(4)對於△ $A_1A_2A_3$ 平面上的每一給定直線，△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上恰有一個點對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與給定線平行。

證：

(1)因為△ $A_1A_2A_3$ 的三個頂點中至少有一個與點 P、Q 都不重合，所以，我們可假設 $A_1 \neq P$ 且 $A_1 \neq Q$。過點 A_1 分別作直線 A_1P 與 A_1Q 對∠ $A_2A_1A_3$ 的等角共軛線 A_1S 與 A_1T，則∠ SA_1T 與∠ PA_1Q 相等或互補。另一方面，因為直線 A_1S 與點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線垂直，且直線 A_1T 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線垂直，所以，兩 Simson 線的夾角中有一個等於∠ SA_1T、另一個與∠ SA_1T 互補。於是，兩 Simson 線的夾角中有一個等於∠ PA_1Q、另一個與∠ PA_1Q 互補。這兩個角分別是劣弧 PQ 與優弧 PQ 所張的角。

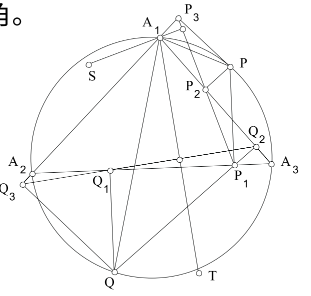

圖 22

(2)由(1)立即可得。

(3)根據(1)，點 Q 與點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線的夾角中有一個等於∠ QPR、另一個與∠ QPR 互補；點 R 與點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線的夾角中有一個等於∠ RQP、另一個與∠ RQP 互補；點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線的夾角中有一個等於∠ PRQ、另一個與∠ PRQ 互補。因為∠ QPR、∠ RQP 與∠ PRQ 的和等於 180°，而將其中的任一個、任兩個或三個改用它的補角代替時，其和都不等於 180°（除非代替的角與被代替的角都是 90°），所以，三條 Simson 線相交所得的三角形的三個內角必是分別為∠ QPR、∠ RQP 與∠ PRQ。

(4)設 l 為△ $A_1A_2A_3$ 平面上一直線。對每個 k＝1, 2, 3，過點 A_k 作直線 l 的垂直線 A_kQ_k，接著過點 A_k 作直線 A_kQ_k 對∠ A_k 的等角共軛線，則此三條等角共軛線必交於一點，而且依定理 26，此點的 Simson 線與直線 l 平行。//

三角形的 Simson 線與三角形的九點圓 (nine point circle) 有著密切的關係，下面的定理 28 是頭一個重要定理。所謂△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓，乃是指：△ $A_1A_2A_3$ 的三邊中點、三高的垂足及垂心至三頂點的中點等九個點所共的圓。這個圓也是以△ $A_1A_2A_3$ 的垂心為伸縮中心、將△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓縮小 1/2 倍所得的圓。

定理 28：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形，而點 H 為其垂心。若點 P 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上一點，則點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線必平分線段，而且其交點在△ A1A2A3 的九點圓上。

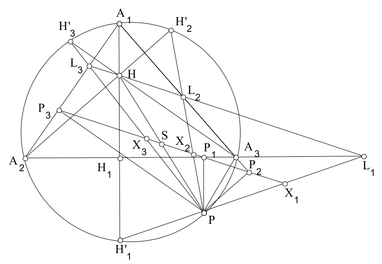

圖 23

證：若△$A_1A_2A_3$為直角三角形且∠$A_2A_1A_3$＝90°，則垂心H與頂點A_1重合，且□HP_2P_{P3}為一矩形。於是，對角線$\overline{P_2P_3}$與$\overline{HP}$互相平分，亦即：點P對△$A_1A_2A_3$的Simson線$P_1P_2P_3$平分線段$\overline{HP}$。

設直線A_1H與直線A_2A_3相交於點H_1，而與△$A_1A_2A_3$的外接圓相交於另一點 ；又設H_1'≠P且直線PH_1'與直線A_2A_3相交於點L_1，而與點P對△$A_1A_2A_3$的Simson線$P_1P_2P_3$相交於點X_1，參看圖23。我們將證明Simson線$P_1P_2P_3$與直線HL_1平行且平分$\overline{PL_1}$於點X_1。於是，考慮△PHL_1，可知Simson線$P_1P_2P_3$通過$\overline{HP}$的中點S。

因為點A_3、P_1、P_2與P共圓，點A_1、A_3、P與H_1'共圓，且直線A_1H與直線PP_1平行，所以，可得

$$\angle X_1P_1P = \angle P_2P_1P = \angle P_2A_3P$$
$$= \angle A_1H_1'P = \angle X_1PP_1。$$

由此可知：△X_1PP_1是一個等腰三角形，且$\overline{PX_1}=\overline{P_1X_1}$。更進一步可知：點$X_1$是直角三角形△$PP_1L_1$的斜邊 的中點。其次，因為直線$A_1H$與直線$A_2A_3$垂直，直線$A_3H$與直線$A_1A_2$垂直，且點$A_1$、$A_2$、$A_3$與 共圓，所以，可得

$$\angle HA_3H_1 = 90^\circ - \angle A_3A_2A_1 = \angle A_2A_1H_1'$$
$$= \angle H_1'A_3H_1。$$

由此可知：△HA_3H_1與△$H_1'A_3H_1$全等，且$\overline{HH_1}=\overline{H_1H_1'}$。於是，得

$$\angle HL_1H_1 = \angle H_1'L_1H_1 = \angle PL_1P_1$$
$$= \angle L_1P_1X_1。$$

因為內錯角相等，所以，直線P_1X_1與直線HL_1平行。

最後，因為△$A_1A_2A_3$的九點圓乃是以△$A_1A_2A_3$的垂心H為伸縮中心、將△$A_1A_2A_3$的外接圓縮小1／2倍所得的圓，而點P在△$A_1A_2A_3$的外接圓上，所以，$\overline{HP}$的中點S在△$A_1A_2A_3$的九點圓上。∥

在定理28的證明中，我們還可得到一些附帶的結果，寫成一個定理如下。

定理29：設點H為△$A_1A_2A_3$的垂心，點P為△$A_1A_2A_3$的外接圓上任意點。若直線A_1H、A_2H、A_3H與△$A_1A_2A_3$的外接圓的另一交點分別為H_1'、H_2'、H_3'，直線PH_1'與直線A_2A_3相交於點L_1，直線PH_2'與直線A_3A_1相交於點L_2，直線PH_3'與直線A_1A_2相交於點L_3，則下述性質成立：

(1)點L_1、L_2、L_3與H共線。

(2)點P對△$A_1A_2A_3$的Simson線與直線$L_1L_2L_3$平行或重合，而且通過$\overline{PL_1}$、$\overline{PL_2}$與$\overline{PL_3}$的中點。

ÃQG　由定理28的證明立即可得。∥

定理29的逆定理也成立，我們證明於下。

定理30：設點H為△$A_1A_2A_3$的垂心，且直線A_1H、A_2H、A_3H與△$A_1A_2A_3$的外接圓的另一交點分別為H_1'、H_2'、H_3'。若通過垂心H的一直線與直線A_2A_3、A_3A_1、A_1A_2分別相交於點L_1、L_2、L_3，則下述性質成立：

(1)直線L_1H_1'、L_3H_3'與L_2H_2'共點，而且其交點P在△$A_1A_2A_3$的外接圓上；

(2)交點P對△$A_1A_2A_3$的Simson線與給定直線$L_1L_2L_3$平行或重合。

證：若給定的直線通過頂點A_1，則直線L_1H_1'、L_2H_2'與L_3H_3'都通過點A_1。

設給定的直線不通過任何頂點。因為直

線L_1H_1'、L_2H_2'與L_3H_3'不可能全都是△$A_1A_2A_3$的外接圓的切線，所以，可設直線L_1H_1'與△$A_1A_2A_3$的外接圓的另一交點為點P且P≠H_1'，此點P即為所求。//

利用定理28的結果，可以將定理26(2)的結果改進如下。

定理31：設△$A_1A_2A_3$為任意三角形。若$\overline{PQ}$是△$A_1A_2A_3$的外接圓的直徑，則點P與點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson線互相垂直，而且其交點在△$A_1A_2A_3$的九點圓上。

證：因為$\overline{PQ}$是△$A_1A_2A_3$的外接圓的直徑，所以，依定理26(2)，點P與點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson線互相垂直。其次，設△$A_1A_2A_3$的垂心為點H，則依定理28，$\overline{PH}$的中點S與$\overline{QH}$的中點T都在△$A_1A_2A_3$的九點圓上，而且點P與點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson線分別通過點S與點T。因為$\overline{PQ}$是△$A_1A_2A_3$的外接圓的直徑而九點圓乃是以△$A_1A_2A_3$的垂心H為伸縮中心、將△$A_1A_2A_3$的外接圓縮小1/2倍所得的圓，所以，$\overline{ST}$是△$A_1A_2A_3$的九點圓的一直徑。因為點P與點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson線互相垂直而且分別通過點S與點T，所以，兩Simson線的交點在△$A_1A_2A_3$的九點圓上。//

利用定理28的結果，定理25(1)與25(2)的結果也可以改進如下。

定理32：給定平面上四條相異直線，其中每兩線都相交，且任意三線都不共點，亦即：此四直線構成一個完全四邊形，則此四直線所交出的四個三角形的垂心共線，所共的直線與該完全四邊形的Simson線平行，而且由四個三角形的外接圓公共點至垂心連線之距離等於至Simson線之距離的兩倍。

證：採用定理25所使用的記號。設給定的四直線為$A_2A_3P_1$、$A_3A_1P_2$、$A_1A_2P_3$與$P_1P_2P_3$，△$A_1A_2A_3$、△$A_1P_2P_3$、△$A_2P_3P_1$與△$A_3P_1P_2$的垂心分別為點H、H_1、H_2與H_3，又圓$A_1A_2A_3$、圓$A_1P_2P_3$、圓$A_2P_3P_1$與圓$A_3P_1P_2$的公共點為點P。因為點P在△$A_1A_2A_3$的外接圓上且點H為△$A_1A_2A_3$的垂心，所以，依定理28，$\overline{PH}$的中點在點P對△$A_1A_2A_3$的Simson線上。再依定理25(1)與25(2)，$\overline{PH}$的中點在完全四邊形的Simson線上。同理，$\overline{PH_1}$、$\overline{PH_2}$與$\overline{PH_3}$的中點都在完全四邊形的Simson線上。由此可知定理的各結論成立。//

定理32中所提到的四垂心共線，其實不必引用完全四邊形的Simson線概念，而可以自行證明，我們說明如下。

定理33：設△$A_1A_2A_3$為任意三角形。若共線的三點P_1、P_2與P_3分別在直線A_2A_3、A_3A_1與A_1A_2上，且都不是△$A_1A_2A_3$的頂點，則分別以$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$為直徑的三個圓的根軸相同，而且△$A_1A_2A_3$、△$A_1P_2P_3$、△$A_2P_3P_1$與△$A_3P_1P_2$的垂心都在根軸上。

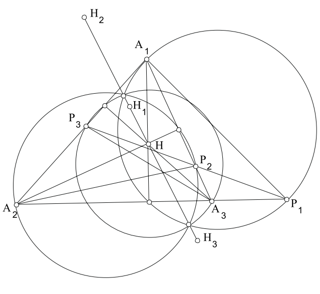

圖24

證：首先注意到垂心的一個性質：若點H為△ABC的垂心，而$\overline{AD}$、$\overline{BE}$與$\overline{CF}$為△ABC的高，則$\overline{AH}\times\overline{HD}=\overline{BH}\times\overline{HE}=\overline{CH}\times\overline{HF}$，而且這個共同值就是點H對於以$\overline{BC}$或$\overline{CA}$或$\overline{AB}$

為直徑之圓的冪。

在本定理中，因為△$A_1A_2A_3$過點A_1的高是以$\overline{A_1P_1}$為直徑之圓的一弦，所以，依前段所提的定值就是△$A_1A_2A_3$的垂心H對於以$\overline{A_1P_1}$為直徑之圓的冪。同理，因為△$A_1A_2A_3$過點A_2的高是以$\overline{A_2P_2}$為直徑之圓的一弦，所以，依前段所提的定值就是△$A_1A_2A_3$的垂心H對於以$\overline{A_2P_2}$為直徑之圓的冪。因為△$A_1A_2A_3$過點A_3的高是以$\overline{A_3P_3}$為直徑之圓的一弦，所以，依前段所提的定值就是△$A_1A_2A_3$的垂心H對於以$\overline{A_3P_3}$為直徑之圓的冪。由此可知：點H對於以$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$為直徑的三個圓的冪都相等。於是，這三個圓中任何兩圓的根軸都通過點H。

同理，因為△$A_1P_2P_3$過點A_1的高是以$\overline{A_1P_1}$為直徑之圓的一弦、過點P_2的高是以$\overline{A_2P_2}$為直徑之圓的一弦、點P_3的高是以$\overline{A_3P_3}$為直徑之圓的一弦，所以，可知△$A_1P_2P_3$的垂心H_1對於以$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$為直徑的三個圓的冪都相等。於是，這三個圓中任何兩圓的根軸都通過點H_1。同理可得：這三個圓中任何兩圓的根軸都通過△$A_2P_3P_1$的垂心H_2與△$A_3P_1P_2$的垂心H_3。

因為點H、H_1、H_2與H_3兩兩相異，所以，此四點共線，而且直線$HH_1H_2H_3$就是分別以$\overline{A_1P_1}$、$\overline{A_2P_2}$與$\overline{A_3P_3}$為直徑的三個圓中任意二圓的根軸。//

前面的定理3 通常稱為Gauss Bodenmiller定理。下面的定理34是定理28的另一個重要應用。

定理34：若A_1、A_2、A_3與A_4是共圓的四個相異點，則同平面上有一個點S使得下述兩性質成立：

(1)對每個k＝1, 2, 3, 4，點A_k對其他三點所作成的三角形的Simson線都通過點S。

(2)△$A_2A_3A_4$、△$A_1A_3A_4$、△$A_1A_2A_4$與△$A_1A_2A_3$的九點圓都通過點S。

證：首先注意到三角形的一個性質：若點O與點H分別為△ABC的外心與垂心，點D是$\overline{BC}$的中點，而$\overline{BP}$是△ABC 的外接圓的一直徑，則□AHCP為一平行四邊形，因此$\overline{AH}$與$\overline{OD}$平行而且$\overline{AH}=2\overline{OD}$。

設△$A_2A_3A_4$、△$A_1A_3A_4$、△$A_1A_2A_4$與△$A_1A_2A_3$的垂心分別為點H_1、H_2、H_3與H_4，又設圓$A_1A_2A_3A_4$的圓心為點O，$\overline{A_3A_4}$的中點為M，如圖25所示。因為點O與點H_1分別為△$A_2A_3A_4$的外心與垂心，而M是$\overline{A_3A_4}$的中點，所以，依前段所提的性質，可知：$\overline{A_2H_1}$與$\overline{OM}$平行且$\overline{A_2H_1}=2\overline{OM}$。同理，因為點O與點$H_2$分別為△$A_1A_3A_4$的外心與垂心，而為M是$\overline{A_3A_4}$的中點，所以，依前段所提的性質，可知：$\overline{A_1H_2}$與$\overline{OM}$平行且$\overline{A_1H_2}=2\overline{OM}$。於是，$\overline{A_1H_2}$與$\overline{A_2H_1}$平行且$\overline{A_1H_2}=\overline{A_2H_1}$。由此可知：□$A_1A_2H_1H_2$為一平行四邊形，兩對角線$\overline{A_1H_1}$與$\overline{A_2H_2}$的中點S重合。同理可知：$\overline{A_3H_3}$與$\overline{A_4H_4}$的中點也是點S。

對每個k＝1, 2, 3, 4，因為點A_k在其他三點所作成的三角形的外接圓上，而點H_k是該三角形的垂心，所以，依定理28，點A_k對該三角形的Simson線(圖25中的SL_k)通過$\overline{A_kH_k}$的中點S，而且點S在該三角形的九點圓上。

//

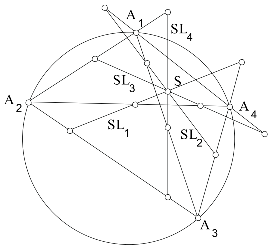

圖 2 5

定理 35：若點 A_1、 A_2、 A_3 與 A_4 是共圓的四相異點，而點P是同一圓上的任意點，過點P作四直線分別與點P對△$A_2A_3A_4$、△$A_1A_3A_4$、△$A_1A_2A_4$、△$A_1A_2A_3$ 的 Simson 線垂直，則四個垂足共線。

證：設點P至直線A_1A_2、A_1A_3、A_1A_4、A_2A_3、A_2A_4與 A_3A_4的垂足分別為 P_{12}、 P_{13}、 P_{14}、P_{23}、 P_{24}與 P_{34}，又設點 P 至 Simson 線 $P_{23}P_{24}P_{34}$、 $P_{13}P_{14}P_{34}$、 $P_{12}P_{14}P_{24}$與 $P_{12}P_{13}P_{23}$ 的垂足分別為點 T_1、 T_2、 T_3 與 T_4，如圖 26 所示。因為點 P_{14}、 P_{24}與 P_{34}都在以$\overline{A_4P}$為直徑的圓上，所以，點 P 對△ $P_{14}P_{24}P_{34}$ 也有 Simson 線，而且此 Simson 線通過點 T_1、 T_2 與 T_3。於是，點 T_1、 T_2 與 T_3 共線。同理可證點 T_4 也在此直線上。 //

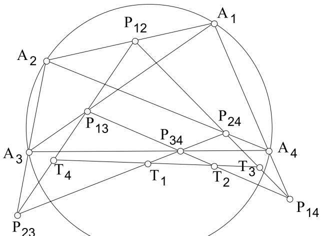

圖 26

利用定理 28，我們還可得出下面的結果。

定理 36：設$\overline{PQ}$是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓的一直徑，過點 P 與點 Q 各作一直線，分別垂直於點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線。若此二垂直線相交於點 R，則點 R 在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上，而且 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PQ 平行。

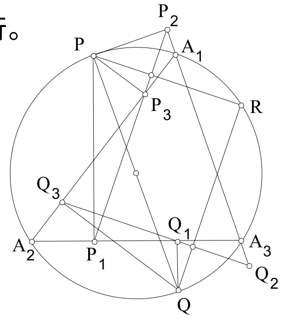

圖 27

證：因為$\overline{PQ}$是△$A_1A_2A_3$的外接圓的一直徑，所以，依定理 31，點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線互相垂直。於是，直線 PR、 QR 以及點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線等四直線相交所得的四邊形有三個直角，由此可知第四個角∠PRQ也是直角，亦即：直線PR與QR 互相垂直。因為$\overline{PQ}$是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓的一直徑，所以，點 R 在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上。

其次，依定理 27(1)，點 P 與點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角等於∠ PQR。另一方面，直線 PQ 與點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角等於 90° －∠ QPR，而此角等於∠ PQR。由此可知：點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PQ 平行。 //

定理 37：設點 P 與點 Q 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上二相異點，點 H 是△ $A_1A_2A_3$ 的垂心。若點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓交於點S與點U，點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson 線與△$A_1A_2A_3$的九點圓交於點T與點V，其中的點 S 與點 T 分別是$\overline{PH}$與$\overline{QH}$的中點，則必有一段以點 U 及點 V 為端點的弧，等於某一段以點 S 及點 T 為端點的弧的兩倍。

證：因為△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓乃是以△ $A_1A_2A_3$ 的垂心 H 為伸縮中心、將△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓縮小 1/2 倍所得的圓，所以，劣弧 PQ 在△ $A_1A_2A_3$ 外接圓上的度數等於劣弧 ST 在△ $A_1A_2A_3$ 九點圓上的度數，而此共同的度數又等於點 P 與點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線的交角∠ SRT 的度數的兩倍。另一方面，在圖 28 中，銳角∠ SRT 的度數等於優弧 ST 的度數減去劣弧 UV 的度數之差的一半。於是，得

360° －(劣弧 ST 的度數) －(劣弧 UV 的度數)
＝(劣弧 ST 的度數)，

(優弧 UV 的度數)＝ 2 ×(劣弧 ST 的度數)。 //

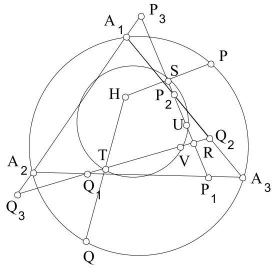

圖 28

定理 38：設△ $A_1A_2A_3$ 為任意三角形。若點 P 與點 Q 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上二相異點，則△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上恰有一點 R，使得下述性質成立：

(1)點P、Q與R對△$A_1A_2A_3$的Simson線共點，它們所共的點是△ $A_1A_2A_3$ 的垂心與△ PQR 的垂心所連線段的中點 S。

(2)點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直，點Q對△$A_1A_2A_3$的Simson線與直線RP垂直，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PQ 垂直。

證：設點 P 與 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線相交於點S，而△$A_1A_2A_3$的垂心H對點S的對稱點為點 T，又設△ PQT 的垂心為點 R，我們將證明點 R 即合所求。

(1)因為點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{PH}$ 的中點及點 S，而點 S 是 $\overline{TH}$ 的中點，所以，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PT 平行。同理，點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QT 平行。由此可知：點 P 與 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線的夾角等於∠ PTQ。因為點 R 是△ PQT 的垂心，所以，點 T 是△ PQR 的垂心。於是，在圖 29 中，依定理 27 (1)，可得

∠ PRQ ＝ 180° －∠ PTQ
　　　＝ 180° －∠ PA_1Q 。

由此可知：點A_1、P、Q與R共圓，亦即：點 R 在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上。

因為點 R 是△ PQT 的垂心，所以，可得
∠ PTR ＝ 90° －∠ QPT ＝∠ PQR，
∠ QTR ＝ 90° －∠ PQT ＝∠ QPR。

因為∠ PQR 與∠ QPR 分別是弧 PR 與弧 QR 所對的圓周角，所以，依定理 27(1)，可知點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 RT 平行。因為依定理 28，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{RH}$ 的中點，所以，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{TH}$ 的中點 S。

(2)因為點 T 是△ PQR 的垂心，而且點 P、Q 與 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線分別平行於直線 PT、QT 與 RT，所以，可知：點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直，點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 RP 垂直，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PQ 垂直。 //

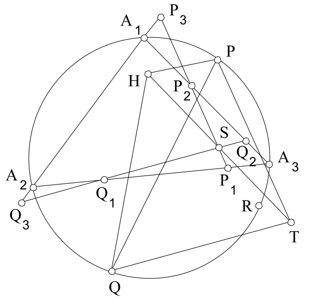

圖 29

定理 38(2)中的性質，可以進一步寫成充要條件。

定理 39：若點 P、 Q 與 R 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上三相異點，則點 P、 Q 與 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線共點的一個充要條件是：點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直。

證：參看圖 30 。

必要性：設點 P、 Q 與 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線交於點 S，而△ $A_1A_2A_3$ 的垂心 H 對點 S 的對稱點為點 T。因為點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{PH}$ 的中點及點 S，而點 S 是 $\overline{TH}$ 的中點，所以，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PT 平行。同理，點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QT 平行；點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 RT 平行。依定理 27(1)，∠PTR＝∠PQR，∠QTR＝∠QPR。延長 $\overline{PR}$、$\overline{QR}$ 與 $\overline{TR}$ 而考慮四點共圓問題，立即可得∠RPT＝∠RQT。於是，得

∠PTR＋∠QTR＋∠RQT＝90°。

由此可知：直線 PT 與直線 QR 垂直，亦即：點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直。同理可證：點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 RP 垂直，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PQ 垂直。於是，點 T 是△ PQR 的垂心。

充分性：設點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直。設點 P 與 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線交於點 S，而△ $A_1A_2A_3$ 的垂心 H 對點 S 的對稱點為點 T。因為點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{PH}$ 的中點及點 S，而點 S 是 $\overline{TH}$ 的中點，所以，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 PT 平行。同理，點 Q 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QT 平行。因為點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 QR 垂直而與直線 PT 平行，所以，直線 QR 與直線 PT 垂直。於是，△ PQT 的垂心在直線 QR 上。又依定理 38(1)的證明，△ PQT 的垂心在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上。由此可知：△ PQT 的垂心就是直線 QR 與△ $A_1A_2A_3$ 外接圓的另一交點 R。依定理 38(1)的證明，點 R 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 $\overline{TH}$ 的中點 S。 //

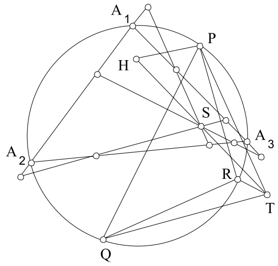

圖 30

定理 40：設△ $A_1A_2A_3$ 與△ $B_1B_2B_3$ 的外接圓相同。若點 B_1、 B_2 與 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線共點，則下述性質成立：

(1)點 A_1、 A_2 與 A_3 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線也共點，而且兩組 Simson 線所共的點相同。

(2)外接圓上每個點對△ $A_1A_2A_3$ 與△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線都平行或重合。

證：我們先證明(2)，再以(2)證明(1)。

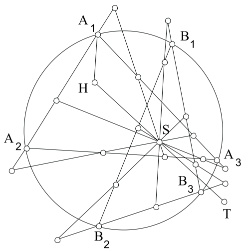

圖 31

(2)設點 B_1、 B_2 與 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所共的點為點 S，而且△ $A_1A_2A_3$ 與△ $B_1B_2B_3$ 的垂心分別為點 H 與點 T。因為點 B_1、 B_2 與 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線中至多只有兩線互相垂直，所以，我們可設點 B_2 與 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線不垂直。另一方面，因為點 B_2 與 B_3 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線分別為直線 B_2T 與 B_3T，所以，依定理39的證明可知：點B_2對△$A_1A_2A_3$與△$B_1B_2B_3$的 Simson 線互相平行、且點B_3對△$A_1A_2A_3$與△$B_1B_2B_3$的 Simson 線也互相平行。

其次，設點 P 是△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上任意點。因為點 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 與△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線互相平行，所以，依定理 27 (1)，可得點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與點 B_2 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線 B_2T 所夾的銳角
＝點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與點 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角
＝劣弧 PB_2 所對的圓周角
＝點 P 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線與點 B_2 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線 B_2T 所夾的銳角。

換言之，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線跟直線 B_2T 交出相等的銳角。同理可知：點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線跟直線 B_3T 也交出相等的銳角。因為直線 B2T 與直線B_3T不垂直，所以，點P對△$A_1A_2A_3$的 Simson 線與對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線互相平行。

(1)根據(2)的結果，可知點 A_1 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線與直線 A_1H 平行。又依定理 28，點 A_1 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線通過$\overline{A_1T}$的中點。於是，點 A_1 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線必通過△ A_1HT 的另一邊 $\overline{TH}$ 的中點 S。同理，點 A_2 與點 A_3 對△ $B_1B_2B_3$ 的 Simson 線也都通過點 S。 //

定理 41：設△ $A_1A_2A_3$ 與△ $B_1B_2B_3$ 的外接圓相同。若點 B_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_2B_3 平行，則點 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_3B_1 平行，而且點 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_1B_2 平行。

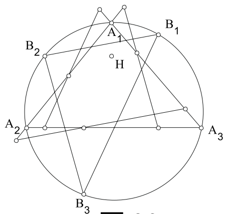

圖 32

證：在圖 32 中，依定理 27(1)，點 B_1 與 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角等於∠ $B_1B_3B_2$。因為點 B_1 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_2B_3 平行，所以，直線 B_2B_3 與點 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線所夾的銳角等於∠ $B_1B_3B_2$。於是，由內錯角（或同位角）相等，可知點 B_2 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_3B_1 平行。同理可知點 B_3 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 B_1B_2 平行。 //

關於 Simson 線的另一個有趣問題是：給定△ $A_1A_2A_3$ 的平面上任意點，是否必有△

$A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過此點。這個問題是無法以初等幾何的綜合方法來處理的，它需要利用解析方法，而且將牽涉到其他主題。我們只把結果說明於下。

定理 42：△ $A_1A_2A_3$ 的所有 Simson 線的包絡線(envelope)是一條三尖內擺線(three-cusped hypocycloid 或 deltoid)，亦即：每一條 Simson 線都與此三尖內擺線相切，而且下述性質成立：

(1)△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓位於內擺線的內部，且與內擺線相切。

(2)內擺線的外接圓半徑等於△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓半徑的 3/2 倍。

(3)連接內擺線三個尖點所得的正三角形與△ $A_1A_2A_3$ 的 Morley 三角形方向相反，而兩個三角形的邊一對對平行。

(4)過內擺線內部的每個點，都有△ $A_1A_2A_3$ 的三條 Simson 線通過；過內擺線外部的每個點，只有△ $A_1A_2A_3$ 的一條 Simson 線通過。

例如：通過頂點 A_1 的三條 Simson 線是直線 A_1A_2、 A_1A_3 與 A_1H。下面我們說明過九點圓圓心的 Simson 線。若點 P 在△ $A_1A_2A_3$ 的外接圓上且具有下述三個性質，則點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓圓心：

(1)點 P 與外心 O 位於直線 A_1H 的同側；

(2)點 P 與點 H'_1 位於直線 A_2A_3 的異側；

(3) $\angle OPH'_1 = 2 \times \angle A_1H'_1P$。

為什麼呢？設直線 PH'_1 與直線 A_2A_3 相交於點 L_1，依定理 29，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線與直線 HL_1 平行。因為△ $L_1HH'_1$ 是等腰三角形，所以，可得

$$\angle HL_1P = 2 \times \angle A_1H'_1P = \angle OPL_1。$$

由此可知：直線 HL_1 與直線 OP 平行。依定理 28，點 P 對△ $A_1A_2A_3$ 的 Simson 線通過 的中點且與直線 OP 平行，所以，此 Simson 線通過 的中點，此點就是△ $A_1A_2A_3$ 的九點圓圓心。將足碼由 1 輪換成 2 與 3，可得另外兩點。

參考資料

1. Coxeter, H. S. M. & Greitzer, S. L. (1967).: Geometry Revisited. Mathematical Association of America, Washington, D. C.
2. Court, N. A. (1952).: College Geometry. Barnes and Noble, Inc., New York.
3. Eves, H. (1963).: A Survey of Geometry. Allan and Bacon, Inc., Boston.
4. Johnson, R. A. (1960).: Advanced Euclidean Geometry. Dover Publications, Inc., New York.
5. Kay, D. C. (1969)).: College Geometry. Holt, Rinehart and Winston. New York.