中學生通訊解題第十期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

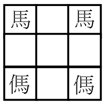
問題編號 891001

在一個九格棋盤上放置了兩個「馬」和兩個「傌」的象棋，放置的位置如圖一所示，「馬」或「傌」的走法則如圖二所示。在移動「馬」或「傌」時有兩個限制：

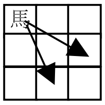
(1)「馬」或「傌」在斜進時，如在其正前方一位有另一顆棋子時則不得前進，如圖三所示。（就是不得出現「拐馬腳」前進的狀況）

(2)兩個象棋不得佔用同一個位置。

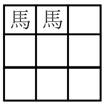
請問：如果要得到兩種棋子互換的結果，最少要走多少步？



圖一



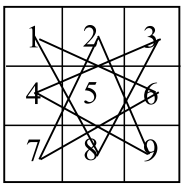
圖二



圖三

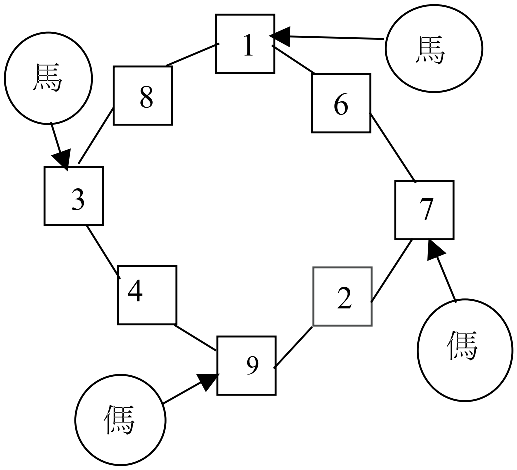
參考解答：

(1)將每個格子編號，並畫出所有可能的走法，則象棋的位置順序必呈現在以下 8 個位置循環的現象：1→6→7→2→9→4→3→8→1……。我們也可發現，永遠不會有棋子佔據 5 的位置，如圖四所示。



圖四

綜合這 8 個位置畫成圖五的循環圖，然後可依順時針或逆時針的順序依序移動四個象棋。



圖五

例如：如果順時針移動，則 1 上的「馬」最後要移動 4 步到 9（只移動到 7 會因「拐馬腳」造成後面棋子不能通過而不能達成題目的要求）；同理，3 上的「馬」要移動 4 步到 7， 9 上的「傌」要移動 4 步到 1， 7 上的「傌」則要移動 4 步到 3。

(3)上的移動步數總共 4 × 4=16 步。

解題重點：

1.將象棋的位置順序呈現在 8 個循環位置。

2.將『拐馬腳』的限制做出因應。

評析：

1.大部分同學僅呈現操作步驟。

2.理清晰並呈現象棋循環位置者有彰化縣陽明國中李昱融、高師大附中國中部蔡政

洋、板橋海山國中張源平等同學。

(3)參答人數共有 49 人，平均得分 6.71 分，得分率 95.91% 。

問題編號 891002

今有 12 名旅客要趕往 40 公里處的車站去搭乘火車，出發的時間離開車的時間只剩下3小時，他們步行的速度為每小時 4 公里，若光靠走路一定來不及。目前唯一可利用的交通工具只有一輛小汽車，小汽車的速度為每小時 60 公里，但此輛車連司機在內最多只能載 5 人。請設計出一種方法，讓這 12 名旅客都能趕上火車。

參考解答：

(1)先讓汽車將 4 名旅客送到中途某處，再讓這4名旅客步行，此時其他8名旅客也在步行；接著汽車再回來載4名旅客，剩下4名旅客仍然繼續步行，追上前面 4 名旅客後也讓他們下車一起步行；最後回來接剩下的 4 名旅客逕抵火車站。適當選取第一批旅客的下車地點，可以是載送最後一批旅客的汽車與前面 8 名旅客同時抵達車站，在整個過程中，每一位旅客不是乘車就是步行，因此是一種最快的方法。

(2)設汽車送第一批旅客行使 x 公里後讓他們下車步行，此時其他旅客步行了$\frac{4x}{60}=\frac{x}{15}$公里，其間相差了$\frac{14x}{15}$公里，在往後的時間裡，因為步行的旅客速度一樣，所以兩批旅客之間始終相差$\frac{14x}{15}$公里。而汽車要在這段距離之間來會行駛兩趟，每來回依趟所用的時間為$\frac{\frac{14x}{15}}{60+4}+\frac{\frac{14x}{15}}{60-4}=\frac{x}{32}$，但汽車來回兩趟時間恰好是第一批旅客步行 40 — x 公里的時間，即 $2\times\frac{x}{32}=\frac{40-x}{4}$解得 x=32 公里。因此所需的總時間為$\frac{32}{60}+\frac{40-32}{4}$　2.53 小時，故這種方法必能讓這 12 名旅客皆趕上火車。

解題重點：

本題方法有很多種。但若讓所有旅客們同時出發，有的坐車有的步行；並使得各組走路及坐車的時間相同，則 12 名旅客可同時到達車站，且所花費之時間亦最短。

評析：

(1)基本上同學們皆能提出趕上火車的方法。只是巧妙各有不同。建議同學們以後遇到類似的問題，應以找出『最省時』之方法為目標。

(2)有五位同學寫出最省時的方法，分別為台南市建興國中郭顯宗；台北市民生國中黃彥豪、弘道國中魏群樹、敦化國中郭勝旻、光復國小劉欣瑜等同學。

(3)另有 13 位同學採用下列方式：12 位旅客同時出發，其中八人步行，四位搭車先到車站，而車子回頭於人車相遇處再載走四人到車站，車子再回頭載第三組到車站，所費時間為 $2\frac{41}{48}$小時。

(4) 其餘同學大都採用以『三小時到達車站』為規劃，例如：第一組旅客先坐車 0.5 小時（載至離出發地 30 公里處下車），然後步行2.5小時（10公里）到車站。而其他各組旅客則或先或後到達車站。

(5)本題參答人數有 50 人，平均得分 5.42 分，得分率 77.43% 。

問題編號
891003

一間木櫃有n個抽屜，分別標上1~n的號碼，並將其全部鎖上，現在依下列的操作方式改變其狀態：（所謂改變抽屜的狀態，就是原來是開的變成鎖上，原來是鎖上的變成開的）

第1次將號碼被1整除的抽屜改變狀態。

第2次將號碼被2整除的抽屜改變狀態。

……

第k次將號碼被k整除的抽屜改變狀態。

……

請問經過 n 次操作後，那些編號的抽屜是打開的？

參考解答：

對於 1~n 中的任一個數字 m 而言，對於第 p 次操作，若 $p|m$，則會改變第 m 號抽屜的狀態。所以經過 n 次的操作後，第 m 號的抽屜改變狀態的次數 = 其正因數的個數。

故當 m 的正因數的個數是奇數時，第 m 號抽屜經過 n 次操作後就會是打開的。又因為正因數個數為奇數的正整數必為完全平方數，所以 1~n 號中號碼是完全平方數的抽屜會被打開。

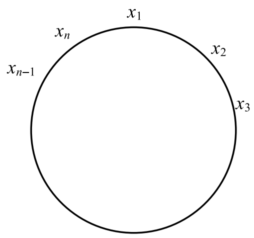
評析：

(1)本次考題絕大部分同學都可掌握題意，寫對答案。唯解答之過程卻有好壞之分，有同學直接用操作法推測出答案，顯然不令人滿意。有同學直接說出答案，卻未做出合理之推測說明。

(2)本題表現優異者有基隆市銘傳國中江政融，台北市仁愛國中吳宗哲、明德國中王琨傑、大直國中陳俊曄、弘道國中魏群樹、金華國中趙心予，民生國中張哲瑞，台北縣新莊國中吳之堯、江翠國中莊凱壹、黃明山、鍾佳琦、永和國中黃俊諺，新竹市光華國中賴俊儒，彰化縣員林國中王琨傑、陽明國中李昱融、高雄縣鳳西國中葉仲恆，高雄市高雄國中吳哲宇、立志中學蔡政江等同學。

問題編號
891004

如圖，圓周上依序填上 n 個不同的數 x_1，x_2，…., x_n，$(n \geq 3)$ 每個數都等於它左右相鄰兩數的乘積。



（例如：$x_1=x_n \cdot x_2$， $x_2=x_1 \cdot x_3$，…，$x_n=x_{n-1} \cdot x_1$），試問 n= 多少時可以找到 x_1, x_2, …., x_n 滿足上述的條件。

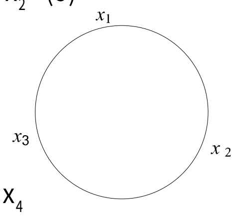
參考解答：

(1) n=3

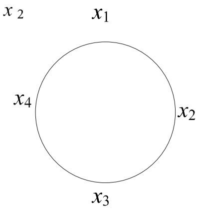
$x_1=x_2 \times x_3$--(1)　由(1)(2) $\Rightarrow x_1=x_1 \times x_3^2$

$x_2=x_1 \times x_3$--(2)即 $x_1=0$ 或 $x_3=\pm 1$（均不合）

$x_3=x_1 \times x_2$--(3)



(2) n=4



$x_1=x_2 \times x_4$

$x_2=x_3 \times x_1$ 即 $x_2=x_4$(不合)

$x_3=x_2 \times x_4$

$x_4=x_1 \times x_3$

(3)n=5

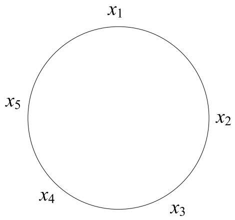
$x_1 = x_2 \times x_5$--(1)

$x_2 = x_1 \times x_3$--(2)

$x_3 = x_2 \times x_4$--(3)

$x_4 = x_3 \times x_5$--(4)

$x_5 = x_1 \times x_4$--(5)



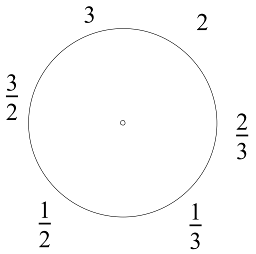
(2)代入(1) $x_1 = x_1 \times x_3 \times x_5$

$\because$ $x_1=0$ 不合

$\therefore$ $x_5 \times x_3 = 1 \Rightarrow x_4 = 1 \Rightarrow x_3 = x_2$（不合）

(4)n=6（可尋得其中一組解）

$x_1=3,\ x_2=2,\ x_3=\frac{2}{3},\ x_4=\frac{1}{3},\ x_5=\frac{1}{2},\ x_6=\frac{3}{2}$



(5) n>6 時,

任取二個相鄰不為零的數 p， q

依次序下去的數分別為 p、 q、$\frac{q}{p}$、$\frac{1}{p}$、$\frac{1}{q}$、$\frac{p}{q}$、 p

上述第一個位置上的數必與第七個位置上的數相等，與已知矛盾。

$\therefore$ n >6 不可能

$\therefore$ n=6

評析：

(1)答題優良的學生有高雄縣鳳西國中葉仲恆，北市弘道國中賴凱文，北縣江翠國中黃明山、永和國中黃俊諺。

(2)本題參答人數共有 43 人，平均得分數 4.66，得分率為 66.5%。

問題編號
891005

已知 ΔABC 是等腰三角形，今過 ΔABC 的一個頂點作一條直線，將 ΔABC 分成兩個小的等腰三角形，請問 ΔABC 的三個內角度數可能是幾度？

參考解答：

(1)先將最容易想到等腰三角形如右圖 A，此時 ΔABC 之三個內角分別為 90°，45°，45°，即可滿足題目之要求。

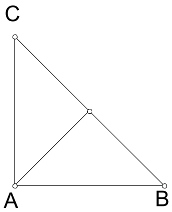


圖 A

(2)在圖 B 中讓 $\overline{AB} = \overline{BD}$，$\overline{AD} = \overline{DC}$，並令 $\angle A = \alpha$，$\angle B = \angle C = \beta$，我們有

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \alpha = 3\beta \end{cases}$ 解得 $\alpha = 108°$，$\beta = 36°$。

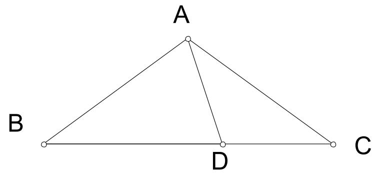


圖 B

(3)在圖 C 中使 $\overline{AD} = \overline{BD} = \overline{BC}$，且令 $\angle A = \alpha$，$\angle B = \angle C = \beta$，因此有 $\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ 2\alpha = \beta \end{cases}$

解得 $\alpha = 36°$，$\beta = 72°$。

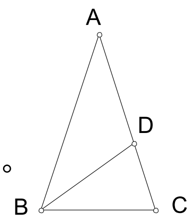


圖 C

(4)在圖 D 中取 $\overline{AD} = \overline{BD}$，$\overline{CD} = \overline{CB}$，而且 $\angle A = \alpha$，$\angle B = \angle C = \beta$，可列出

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 180^\circ \\ \dfrac{180^\circ - \beta}{2} = 2\alpha \end{cases}$$

解得 $\alpha = (25\frac{5}{7})^\circ$

$\beta = (77\frac{1}{7})^\circ$。

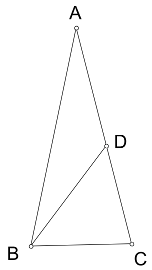


圖 D

從以上我們可以求出本題之四個答案如下：

(90°,45°,45°)　(108°,36°,36°)　(36°,72°,72°)　($25\frac{5}{7}$°,$77\frac{1}{7}$°,$77\frac{1}{7}$°)

µÛªR¡G

(1)本題的目的想要訓練學生思考的嚴密性，解題時能考慮過 A 、 B 、 C 三頂點的直線，若假設 $\overline{AB} = \overline{AC}$ ，因為 ∠B=∠C，故只須討論過∠A、∠B（或過∠A、∠C）兩種情形，大部分的同學均能得到某幾組答案，不過還是有很多學生因為討論不完整，只得到了部分的答案，如果能在花些時間重新審視整個解題的過程，相信能夠把答案寫的更完整。

繳秉D優良的學生有高縣鳳西國中葉仲恆、北縣新莊國中吳之堯、北市明德國中王琨傑、北縣江翠國中葉品辰、台南市建興國中黃信溢、北市民生國中鍾佳琦、曾怡嘉、彰化縣員林國中劉金瑞、江孟恆、北市大直高中國中部陳俊曄、北縣福和國中楊智寰、北市成德國中劉昱亞、北市仁愛國中吳宗哲、基隆市銘傳國中江政融、北縣海山國中張源平。

饇拶P徵答的共有 48 位同學，平均得分為 4.9 分，得分率為 70%。

請在右圖之○內填入 1~8 的數字，使得兩個菱形內及虛線上的四個數字和都相等。