中學生通訊解題第九期參考解答與評析

臺北市立建國高級中學　數學科

問題編號
89901

試求 $\sqrt{111111111111\times1000000000005+1}$ 之值。

參考解答：（方法一）

$$\frac{(111111111111)}{9}\times9=\frac{(999999999999)}{9}$$

$$=\frac{10^{12}-1}{9}$$

原式＝ $\sqrt{\frac{10^{12}-1}{9}\times(10^{12}+5)+1}=\sqrt{\frac{(10^2-1)(10^{12}+5)+9}{9}}$

$$=\sqrt{\frac{(10^{12})^2+4\cdot10^{12}+4}{9}}=\sqrt{\frac{(10^{12}+2)^2}{9}}$$

$$=\frac{10^{12}+2}{3}=\frac{10^{12}-1+3}{3}=333333333333+1=333333333334$$

（方法二）：

設 111111111111 爲 x

則 1000000000005 爲 9x+6

原式 $=\sqrt{x(9x+6)+1}=\sqrt{9x^2+6x+1}$

$=\sqrt{(3x+1)^2}=3x+1$

$=333333333334$

解題重點：

1.把數字轉化成較簡單的形式，或以符號替代。

2.因式分解與開平方根

評析：

1.本題參答人數共有 214 位，平均得分數爲 5.83，得分率爲 83.28% 。

2.答題品質較佳者有：北市敦化國中劉芳瑜，成德國中劉昱亞，民生國中張哲瑞、鍾佳琦、陳建仲、陳怡瑋，螢橋國中陳玉潔，中正國中侯景翰，南門國中陳錦年，民生國中曾怡嘉，仁愛國中吳宗哲，復興中學蘇郁凱，福和國中劉胤廷、楊智寰，新莊國中潘柏諺，新泰國中張偉省，彰化員林國中張哲維、陽明國中李昱融，台南建興國中黃信溢，新竹

光華國中賴俊儒，高雄縣鳳西國中葉仲恆，高師大附中蔡政洋。

問題編號
89902

求出最小的正整數 n，使$\frac{n}{2}$為完全平方數，$\frac{n}{3}$為完全立方數，$\frac{n}{5}$為完全五次方數。

參考解答：

因為 n 被 2,3,5 整除

可設 $n=2^a3^b5^c$

於是$\frac{n}{2}=2^{a-1}3^b5^c$　$\frac{n}{3}=2^a3^{b-1}5^c$　$\frac{n}{5}=2^a3^b5^c$

由所需滿足的條件，知 a-1 必為偶數，

a 必為 3 與 5 的倍數，所以 a 的最小值為 15。

同理 b 與 c 的最小值分別為 10,6。

故得 n 的最小正整數為 $2^{15}3^{10}5^6$。

解題重點：

(1)此題只要利用因數、倍數、最小公倍數的觀念即可作答。

解析：

(1)部分徵答者，在解題過程中直接寫出結果，未說明原因。

(2)部分徵答者，“整除的符號”寫錯了因數、倍數的位置，例如：$2\mid(a-1)$(2 整除 a－1)誤寫成$(a-1)\mid 2$。

(3)答題優良者：彰化員林國中徐勝駿、陽明國中侯景維，基隆銘傳國中趙斌新，高雄縣鳳西國中葉仲恆，北市介壽國中蔡佳玲，螢僑國中吳奕緯，敦化國中薛朝文，光復國小劉欣瑜。

(4)本題參答人數共有 162 人，平均得分數 5.12 分，得分率為 74.43% 。

問題編號
89903

達文西曾作一幅素描，此素描是由邊長相等的正五邊形和正三角形所組成的封閉多面體，且正五邊形的每邊都與正三角形共邊，正三角形每一邊也與正五邊形共邊。若多面體的頂點數–邊數+面數＝2 ，則此多面體的表面共有多少個正五邊形？多少個正三角形？

參考解答：

（解法一）

設共有 x 個正五邊形，y 個正三角形，則點數=$\frac{5x+3y}{4}$，邊數=$\frac{5x+3y}{2}$，

面數=x+y，因$\frac{5x+3y}{4} - \frac{5x+3y}{2} + (x+y)=2$……　　又 5x=3y……

解　，　得 x=12, y=20

（解法二）

設正五邊形之個數為 x，則頂點數=$\frac{5x}{2}$，邊數=5x，面數=x+$\frac{5x}{3}$

由$\frac{5x}{2} - 5x + x + \frac{5x}{3} = 2$　得 x=12

故正五邊形有 12 個，正三角形有 $\frac{12\times 5}{3}$=20 個

解題重點：

1.此題可設兩個未知數，再以二元一次聯立方程組求解；亦可只令一個未知數解之。

2.本題不管採用解法一或解法二，其解題關鍵都要用到正五邊形邊數與正三角形邊數相等之條件。

評析：

1.在參加解題者之中，採取解法一者有 18 人，採取解法二者有 13 人，採用其他解法者有 10 人。

2.說理清晰解法簡捷者計有北市仁愛國中吳宗哲、螢僑國中吳奕緯、敦化國中薛朝文、明德國中王琨傑、復興中學蘇郁凱；板橋中山國中張源平；基隆銘傳中學江政融；彰化縣員林國中徐勝駿等同學。

3.本題參答人數共有 184 人，平均得分數 4.92 分，得分率 70.29% 。

問題編號
89904

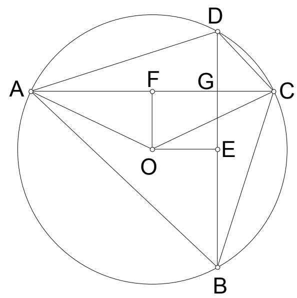
ABCD 為一個圓內接四邊形，O 為圓心，且 O 點不在線段 AC 上，連接線段 OA 與線段 OC，當四邊形對角線互相垂直時，求證：四邊形 ABCO 與四邊形 AOCD 面積相等。（注意：四邊形 ABCO 與四邊形 AOCD，其中一個為凸四邊形，另一個為凹四邊形）

參考解答：

(i)當 O 點不在$\overline{BD}$線段上時，連接$\overline{BD}$與$\overline{AC}$交於 G，自 O 做$\overline{OE}\perp\overline{BD}$垂足為 E 點，及自 O 做$\overline{OF}\perp\overline{AC}$垂足為 F 點，如右圖所示，則$\overline{BE}=\overline{DE}$。因為$\overline{OE}\perp\overline{BD}$，$\angle OED=90°$，$\overline{OF}\perp\overline{AC}$，$\angle OFG=90°$，$\overline{AC}\perp\overline{BD}$，$\angle FGE=90°$所以四邊形 OEGF 為矩形，$\overline{EG}=\overline{OF}$。

四邊形 ABCO=$\frac{1}{2}\overline{BG}\times\overline{AC}-\frac{1}{2}\overline{OF}\times\overline{AC}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times(\overline{BG}-\overline{EG})=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BE}$；

四邊形 AOCD=$\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DG}+\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{OF}=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times(\overline{DG}+\overline{EG})=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DE}$。



因爲$\overline{BE}=\overline{DE}$

所以$\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BE}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DE}$

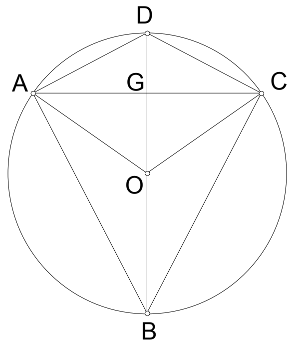
得證四邊形 ABCO 面積等於四邊形 AOCD 面積

(ii)當 O 點在$\overline{BD}$線段上時，連接$\overline{BD}$與$\overline{AC}$交於 G 點，如下圖所示，

四邊形 ABCO=$\frac{1}{2}\overline{AG}\times\overline{BO}+\frac{1}{2}\overline{GC}\times\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BO}=\frac{1}{2}(\overline{AG}+\overline{CG})\times\overline{BO}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BO}$

四邊形 AOCD=$\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DG}+\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{GO}=\frac{1}{2}\overline{AC}\times(\overline{DG}+\overline{GO})=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{DO}$

因爲$\overline{DO}=\overline{BO}$所以四邊形 ABCO 面積等於四邊形 AOCD 面積



解題重點：

(1)先分成 O 在$\overline{BD}$上與 O 不在$\overline{BD}$上兩種情形討論。

(2)再將四邊形分割成兩個三角形，利用〝弦心距垂直平分弦〞的觀念即可證明。

評析：

(1)大部分同學只證明 O 不在$\overline{BD}$上的情形，未證明 O 在$\overline{BD}$上的情形。

(2)徵答優良者有北縣中山國中<u>張源平</u>，北市民生國中<u>葉育魁</u>、<u>鍾佳琦</u>，金華國中<u>許庭碩</u>，中正國中<u>侯景翰</u>，南門國中<u>陳錦年</u>。

(3)參答人數有 82 人，平均得分數 4.47 分，得分率爲 63.86% 。

問題編號
89905

同樂會中<u>小明</u>表演了一種撲克牌遊戲：他將一副撲克牌正面朝下（共 52 張），依照黑桃、梅花、紅心、方塊、黑桃、梅花、紅心、方塊…的順序排列，再請<u>大華</u>從最上面拿起若干張撲克牌，將這些撲克牌的次序顛倒（正面依然朝下），再整個插入剩餘的撲克牌中（剩餘的撲克牌任意分成兩部分，大華的撲克牌再插入此兩堆中），此時<u>小明</u>再從頭將撲克牌每四張一組，結果他宣稱每一組撲克牌都會出現四個不同的花色。請問<u>小明</u>的說法是否正確，說明你的理由。

參考解答：

設 A 為拿出的撲克牌，剩下的撲克牌分成 B、C 兩個部分，而 A 部分撲克牌的次序顛倒之後稱為 A'。將 A'插入 B、C 之間，整個撲克牌的順序由上至下為 B-A'-C，

(1)如果 B、A'、C 都是 4 的倍數，則每一組撲克牌都會出現四個不同的花色。

(2)如果 B、A'、C 中有一堆的張數不為 4 的倍數，在 A'的張數大於 2 時，則由上至下每四張一組，最多有兩組橫跨 B、A'之間與 A'、C 之間，令此兩組（一組有四張）分別為 P、Q。

根據假設可知若 P 在 B 之間有 m 張牌，則 P 在 A'的部分就有（4-m）張牌，因為從 B 開始每四張一組，所以這 m 張牌剛好與 B 前面的 m 張牌花色的順序是一樣的，而 P 在 A'部分的（4-m）張牌剛好與 A 最後（4-m）張牌是一樣的，而原先 52 張撲克牌是依照黑桃、梅花、紅心、方塊來排列，因此 P 的四張牌還是會有黑桃、梅花、紅心、方塊這四個花色。最後除了 Q 之外其他各組都是有四個花色，因為每一個花色都有 13 張，所以 Q 中的四張牌必是四個不同的花色。在 A'的張數大於 3 時，有可能有一組由 A'的牌及 B、C 的牌共同排成，除這組外，其餘的討論如上述知道每組 4 張都是 4 個花色，於是餘下的這一組也是 4 個花色了。由上述所言知小明的說法是對正確的。

解題重點：

此題為一個操作型的題目，可用實際操作探索尋求一種形式並加以描述出來。

評析：

(1)大部分的同學都能借用符號或文字來表達撲克牌花色排序情形。如「SCHD」、「ABCD」、「1234」、「$a_1a_2a_3a_4$」這是很好的現象。

(2)優良徵答者有北市南門國中陳錦年，民生國中黃彥豪、張哲瑞，北縣新莊國中吳之堯、潘柏諺，江翠國中黃明山，台南市建興國中黃信溢，新竹市光華國中賴俊儒，高雄市立法中學蔡政江，高師大附中蔡政洋。

(3)參答人數有 91 人，平均得分數 4.33 分，得分率為 61.86%　。