

與學生分享圖解公式的樂趣

李政豐
國立竹南高級中學

一、前言

高中數學學習的困難，有一部分原因是數學公式比較抽象，而難以直觀的理解。部分公式的證明，如果用到了比較特殊的技巧，那就更增加了低成就學習者的障礙。因此如何簡化證明，如何有效果的解讀數學公式，以加深同學們對公式的具體形象，是教學方法上一個值得重視的課題。

數學教師常常用盡心思，把公式證明得嚴謹而周全，這當然是數學教育中最重要的一種訓練，也是數學學習者必備的基本素養。但是，往往有些不直覺的數學公式證明（例如：向量的「正射影公式」，數列級數中的「連續整數冪次和公式」，三角函數的「和積互化公式」，統計學的「相關係數公式」，「反三角公式」……等等），能建構在學生腦筋裏的印象卻不深，停留的時間也不長。例如反三角函數，在教學時，我們只有把原三角函數的定義域、值域稍作限制，使它具有反函數，改變了學生對三角函數先前已經建立的概念，因而學習的過程就受到干擾，使得學習效果，變得很差。

數學老師們常在思考，有沒有其他的方法，可以讓數學公式視覺化，能在學生的腦子裏呈現具體的圖形，來幫助學生對數學公式產生直覺而深刻的印象，延長數學基本概念在學生腦海停留的時間。縱然缺少了嚴密的條件與推證，改用淺顯的說明來取代。把以前全靠死背默誦的數學公式，藉由視覺化而合理、有趣的圖像來詮釋，藉著感觀的效果，以增加師生在教與學的互動。

儘管圖解公式的證明不夠嚴謹，卻不失為一個好的解讀方法。在課堂上，教師在完成課本的公式或定理證明之後，利用教學媒體，把圖解公式，用來加深同學對該公式的另類理解。經由實際教學的經驗，覺得有不錯的輔助學習的效果；如果能鼓勵學生參與設計圖解公式的內容，那就更能讓學生留下深刻而不可磨滅的印象，這是很值得數學老師嘗試的一件事。

去年，當我們看到華江高中陳明峰老師，帶來一份台北市西松高中教師會，黃振順理事長所提供的「Proofs Without Words」的幾個公式。短期間內，這種圖解公式的概念，在高中數學老師之間傳播開來。

交通大學應用數學系，陳明璋老師在網路中搜尋出『Mathematics Magazine』中的十四個「Proofs Without Words」的圖形，讓我們欣賞之後，我們就開始自己設計一些對高中數學

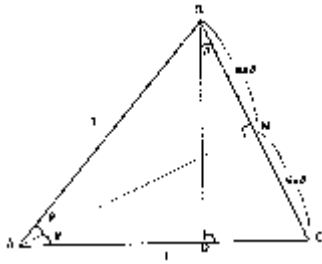
內容有關的圖解公式。

藉此提出一些圖解公式的內容，讓高中老師和同學共同分享，寄望它能拋磚引玉，讓更漂亮的「Proofs Without Words」，也能在中等學校數學課程中生根、茁壯，進而對中、低成就的學生，能產生實際的學習助益。

二、本文

下面是我們自己設計的 13 個「Proofs Without Words」圖解公式的內容：

(1) 正弦的二倍角公式： $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$



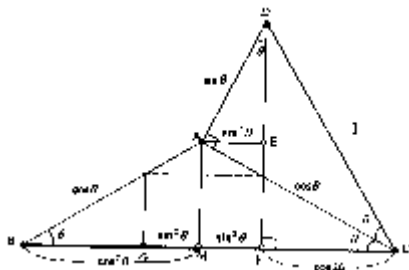
【說明】：取 $(AB)=(AC)=1$ ，則中線 (AM) 垂直平分 (BC)

令 $\angle BAM = \angle CAM = \theta$ ，則 $(BM)=(CM)=\sin \theta$

$\triangle BDC$ 相似於 $\triangle AMC$ ，故 $\angle DBC = \theta$ 。在直角三角形 ABD 中 $(BD)=\sin 2\theta$

在直角三角形 BCD 中 $(BD)=2 \sin \theta \cos \theta$ ，故 $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$

(2) 餘弦的二倍角公式



【說明】：取 $(CD)=1$ 。作 $\angle DCA = \angle ACM = \theta$ ，

$\overline{DA}$ 垂直 $\overline{AC}$ 。作等腰三角形 ABC 使得 $(AB)=(AC)$

則 $(AC)=(AB)=\cos\theta$ ， $(AD)=\sin\theta$ ， $(AE)=(GM)=(MF)=\sin^2\theta$ 。

$(FC)=(BG)=(BM)-(GM)$ ，即 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$

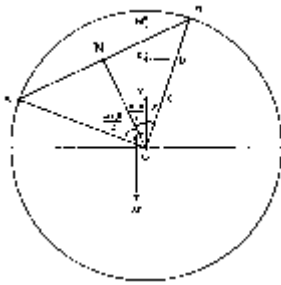
$(FC)=(BC)-(BF)=2(BM)-[(BM)+(MF)]$

即 $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - (\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2\cos^2\theta - 1$

$(FC)=(BG)=(BF)-(FG)$ ，即 $\cos 2\theta = (\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

故 $\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 1 - 2\sin^2\theta$

(3) 餘弦和化積公式： $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$



說明：圓 O 的半徑為 1， $\angle AOV = \alpha$ ， $\angle BOM = \beta$ ， $\angle AON = \angle BON = \frac{\alpha+\beta}{2}$

$$\angle NOK = \frac{\alpha-\beta}{2} \quad , \quad \overline{ON} = 1 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\overline{OK} = \overline{ON} \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

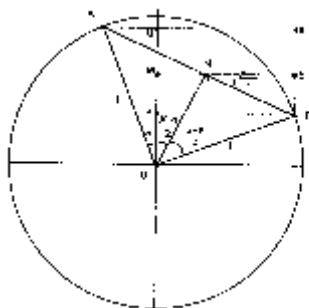
$$\overline{OV} = 1 \cdot \cos\alpha \quad , \quad \overline{OM} = 1 \cdot \cos\beta$$

$\overline{AC}, \overline{ND}, \overline{MB}$ 平行，且 $(\overline{AN} = \overline{NB}) \Rightarrow (\overline{CD} = \overline{DB}) \Rightarrow (\overline{VK} = \overline{KM})$

$$\overline{OK} = \frac{1}{2}\overline{OV} + \frac{1}{2}\overline{OM}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\cos\beta \Rightarrow \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(4)餘弦差化積公式： $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$ ， $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$



說明：

$$\overline{OA} = \overline{OB} = 1, \angle AOQ = \alpha, \overline{OQ} = \cos \alpha, \angle BOP = \frac{\beta - \alpha}{2} + \frac{\alpha + \beta}{2} = \beta, \overline{OP} = \cos \beta$$

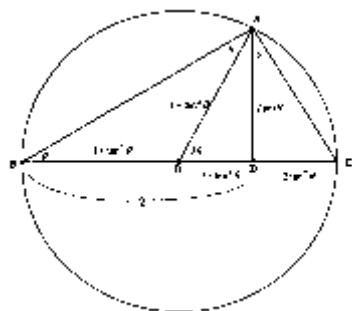
$\cos \alpha - \cos \beta = \overline{OQ} - \overline{OP} = \overline{PQ} = \overline{BR}$. 而 N, S, M 分別是 $\overline{AB}, \overline{BR}, \overline{PQ}$ 的中點

$$\overline{ON} \text{ 垂直於 } \overline{AB}, \triangle ONM \text{ 相似於 } \triangle NBS, \angle NOM = \angle BNS = \frac{\beta - \alpha}{2}, \overline{BN} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\overline{BS} = \overline{BN} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2} = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}, \text{即} \frac{1}{2}(\cos \alpha - \cos \beta) = \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}$$

由 $\sin$ 是奇函數，得到 $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$

(5)以 $\tan \theta$ 表示的二倍角公式： $\tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$ ， $\sin 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 + \tan^2 \theta}$ ， $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$



說明：

以 $\overline{BC}$ 為直徑的圓 O 中，取 $\overline{BD}=2$ 單位長，則 $\overline{AD}=2\tan\theta$

直角 $\triangle ABD$ 與直角 $\triangle CAD$ 相似，故 $\angle CAD=\theta$ ， $\overline{CD}=2\tan^2\theta$

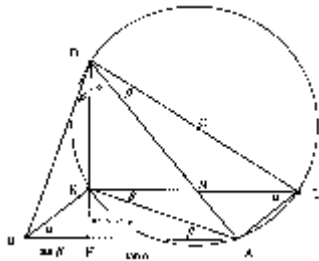
則 $\overline{BC}=2+2\tan^2\theta$ ，故圓 O 半徑可令為 $1+\tan^2\theta$ ，得到 $\overline{OD}=1-\tan^2\theta$

$\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 為半徑，根據外角關係 $\angle AOD=2\theta$ ，

由直角 $\triangle AOD$ 中，可得到三個二倍角公式：

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}, \quad \sin 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}, \quad \cos 2\theta = \frac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$$

(6) 正切的和角公式：
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$



說明：作線段 $\overline{OH}=1$ 。令 $\angle BOH=\beta$ ，則 $\overline{BH}=\tan\beta$

令 $\angle AOH=\alpha$ ，則 $\overline{AH}=\tan\alpha$ 。作 $\angle KBH=\alpha$ ，則 $\overline{KH}=\tan\alpha \cdot \tan\beta$ ，且 $\angle KAH=\beta$ 。

作 $\overline{KL}$ 與 $\overline{BA}$ 平行且相等，則 $KLAB$ 是平行四邊形，所以兩組對角相等

$$\angle KBA=\angle ALK=\alpha, \quad \angle KAB=\angle AKL=\beta$$

$\triangle OKN$ 相似於 $\triangle LAN$ ($\angle KON=\angle ALN=\alpha$ ， $\angle ONK=\angle LNA$ 對頂角相等)

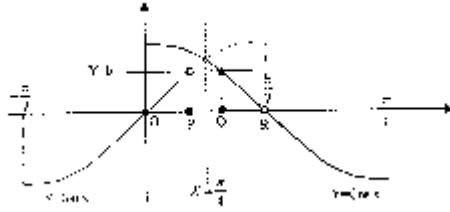
故 $\angle OKN=\angle LAN=90^\circ$

以 $\overline{OL}$ 為直徑畫圓，則 K 、 A 都在圓周上，故 $\angle AOL=\angle AKL=\beta$

$$\text{在 } \triangle OKL \text{ 中 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\overline{KL}}{\overline{OK}} = \frac{\overline{KL}}{\overline{OH} - \overline{KH}}$$

$$\text{故 } \tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \tan\beta}$$

(7)反三角公式 1: $\sin^{-1}y + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq y \leq 1)$



【說明】： $y = \sin x$, $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的圖形，與 $y = \cos x$, $(0 \leq x \leq \pi)$ 的圖形

以直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 形成左右對稱，故 $OP = QR$

當 $y > 0$ 時 $\sin^{-1}y = OP$, $\cos^{-1}y = OQ$

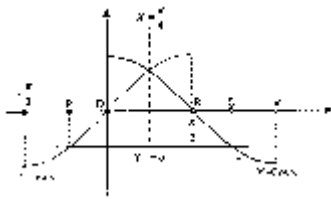
$$\sin^{-1}y + \cos^{-1}y = OP + OQ = QR + OQ = OR = \frac{\pi}{2}$$

【證明】：令 $\theta = \sin^{-1}y$, $-1 \leq y \leq 1$, $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, $\Rightarrow \sin\theta = y$

$$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = y , -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} , -\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2} , 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi ,$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1}y , \Rightarrow \sin^{-1}y + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2}$$

(8)反三角公式 2: $\sin^{-1}y + \cos^{-1}y = \frac{\pi}{2} \quad (-1 \leq y \leq 1)$



【說明】： $y = \sin x$, $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ 的圖形，與 $y = \cos x$, $(0 \leq x \leq \pi)$ 的圖形

是以直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 形成左右對稱，故 $OP = QR$

當 $y < 0$ 時 , $\sin^{-1}y = -(OP)$, $\cos^{-1}y = +(OQ)$

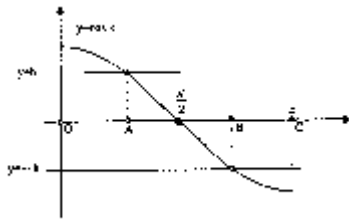
$$\sin^{-1}y + \cos^{-1}y = -(OP) + OQ = -(QR) + OQ = OR = \frac{\pi}{2}$$

【證明】：令 $\theta = \sin^{-1} y$ ， $-1 \leq y \leq 1$ ， $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ， $\Rightarrow \sin \theta = y$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = y \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq -\theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \frac{\pi}{2} - \theta \leq \pi,$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \theta = \cos^{-1} y, \Rightarrow \sin^{-1} y + \cos^{-1} y = \frac{\pi}{2}$$

(9)反三角公式 3： $\cos^{-1} y + \cos^{-1}(-y) = \pi \quad -1 \leq y \leq 1$



【說明】： $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) 的圖形，是以 $(\frac{\pi}{2}, 0)$ 為對稱中心的心對稱圖形。
 當 $b > 0$ ，圖形在 $y = b$ 以上的部分，與 $y = -b$ 以下的部分是全等的。
 所以，它們投射在 x 軸的線段長度相等，即 $OA = BC$ 。

$$\cos^{-1} y = OA, \quad \cos^{-1}(-y) = OB$$

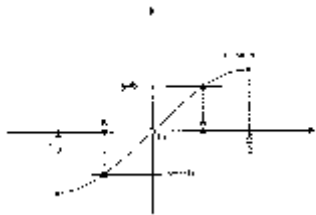
$$\text{故 } \cos^{-1} y + \cos^{-1}(-y) = OA + OB = BC + OB = OC = \pi$$

【證明】：令 $\theta = \cos^{-1}(-y)$ ， $-1 \leq y \leq 1$ ， $\Rightarrow \cos \theta = -y$ ， $0 \leq \theta \leq \pi$

$$\Rightarrow -\cos \theta = y, \Rightarrow \cos(\pi - \theta) = y \quad 0 \leq \pi - \theta \leq \pi$$

$$\Rightarrow \pi - \theta = \cos^{-1} y, \Rightarrow \cos^{-1}(-y) + \cos^{-1} y = \pi$$

(10)反三角公式 4： $\sin^{-1} y + \sin^{-1}(-y) = 0 \quad (-1 \leq y \leq 1)$



【說明】： $\sin^{-1}y + \sin^{-1}(-y) = 0 \Leftrightarrow \sin^{-1}(-y) = -\sin^{-1}(y)$

也就是要證明反正弦函數是一個奇函數。

$y = \sin x$ ($-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$) 的圖形，是以原點 O 為對稱中心的心對稱圖形。

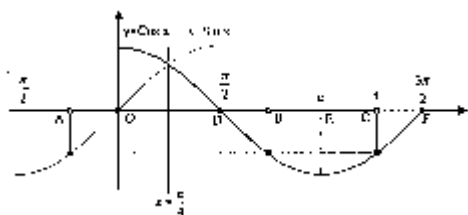
故 $OA = OB$ 。當 $b > 0$ ， $\sin^{-1}y = OA$ ， $\sin^{-1}(-y) = -(OB)$

故 $\sin^{-1}y + \sin^{-1}(-y) = OA + (-OB) = OA - OA = 0$

【證明】：令 $\theta = \sin^{-1}(-y)$ ， $-1 \leq y \leq 1$ ， $\Rightarrow \sin \theta = \sin(\sin^{-1}(-y)) = -y$

$\Rightarrow -\sin \theta = y \Rightarrow \sin(-\theta) = y \Rightarrow -\theta = \sin^{-1}y \Rightarrow \sin^{-1}y + \sin^{-1}(-y) = 0$

(11)反三角例題 5： $\sin^{-1}(\cos 4) = ?$



【說明】：4 弧度 $\approx 4 \times 57.3$ 度 $= 229.2$ 度，不在反餘弦函數的值域 $[0, \pi]$ 之內。

1. 先找 $\cos 4$ ：由 C 點向 x 軸作垂線與 $y = \cos x$ 交在一點。

2. 由交點作 x 軸的平行線，交 $y = \sin x$ 於另一點，經由此點向 x 軸作垂線垂足為 A，A 點的 x 座標即為 $\sin^{-1}(\cos 4)$ 。

3. 因為 $y = \sin x$ 與 $y = \cos x$ 根據直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 對稱，故 $AO = DB$ 。 $y = \cos x$ 本身的圖形又根據直線 $x = \pi$ 對稱，故 $DB = CF$ 。

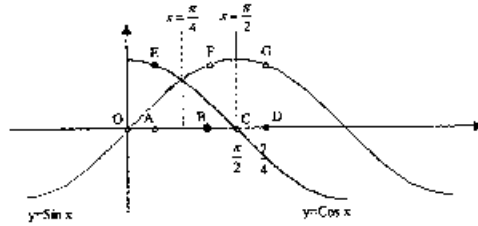
4. 於是 $\sin^{-1}(\cos 4) = (\text{A 點的 x 座標}) = -(AO) = -(DB) = -(CF) = -(\frac{3\pi}{2} - 4)$
 $= 4 - \frac{3\pi}{2}$

【證明】： $\sin^{-1}(\cos 4) = \sin^{-1}\{\cos[\frac{3\pi}{2} - (\frac{3\pi}{2} - 4)]\}$

$= \sin^{-1}[-\sin(\frac{3\pi}{2} - 4)] = -\sin^{-1}[\sin(\frac{3\pi}{2} - 4)]$ (因為 $\sin^{-1}(-\theta) = -\sin^{-1}\theta$)

$= -(\frac{3\pi}{2} - 4) = 4 - \frac{3\pi}{2}$

(12)反三角例題 6： $\cos^{-1}(\sin \frac{7}{4}) = ?$



【說明】： $\frac{7}{4}$ 弧度 $\approx \frac{7}{4} \times 57.3^\circ = 100.275^\circ$ ，不在 $\sin^{-1}$ 的值域內。

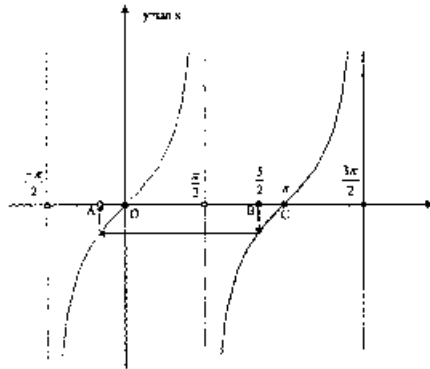
在上圖中， $\sin \frac{7}{4} = GD = FB = EA$ ，F 與 G 根據直線 $x = \frac{\pi}{2}$ 對稱， $BC = CD$

E 與 F 根據直線 $x = \frac{\pi}{4}$ 對稱， $OA = BC$ ， $\cos^{-1}(\sin \frac{7}{4}) = OA = BC = CD = \frac{7}{4} - \frac{\pi}{2}$

【證明】： $\cos^{-1}(\sin \frac{7}{4}) = \cos^{-1}[\sin(\frac{\pi}{2} + (\frac{7}{4} - \frac{\pi}{2}))]$

$$= \cos^{-1}[\cos(\frac{7}{4} - \frac{\pi}{2})] = (\frac{7}{4} - \frac{\pi}{2}) \text{ 是一個銳角} = \frac{7}{4} - \frac{\pi}{2}$$

(13)反三角例題 7： $\tan^{-1}(\tan \frac{5}{2}) = ?$



【說明】： $y = \tan x$ 的圖形是週期為 π 的函數圖形

$\frac{5}{2}$ 弧度 $\approx \frac{5}{2} \times 57.3^\circ = 143.25^\circ$ 不在反正切函數的值域範圍之內

由上圖， $BC = AO$ ，A 點的 x 座標即為 $\tan^{-1}(\tan \frac{5}{2})$

$$\text{故 } \tan^{-1}\left(\tan\frac{5}{2}\right) = -(\text{AO}) = -(\text{BC}) = -\left(\pi - \frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2} - \pi\right)$$

【證明】：因為 $\frac{5}{2}$ 弧度 ≈ 143.25 度是鈍角，我們要先化成 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 之內的角。

$$\begin{aligned}\tan^{-1}\left(\tan\frac{5}{2}\right) &= \tan^{-1}\left(\tan\left(\pi - \left(\pi - \frac{5}{2}\right)\right)\right) = \tan^{-1}\left(-\tan\left(\pi - \frac{5}{2}\right)\right) \\ &= -\tan^{-1}\left(\tan\left(\pi - \frac{5}{2}\right)\right) = -\left(\pi - \frac{5}{2}\right) = \frac{5}{2} - \pi \quad (\text{因 } \tan^{-1} \text{ 是奇函數})\end{aligned}$$

三、結語

高中數學課本的公式證明，面面俱到，嚴密而周全，是高中數學課程中最重要的基礎。利用圖解公式來證明，由於條件的限制，無法呈現所有情況的圖形，這固然是它的缺失，但是簡單、容易看懂，藉著視覺媒體及簡單的幾何概念，常能讓學生留下深刻的印象，對於數學公式的具體化，有很大的幫助。

在最近的課堂上，嘗試用這種教學方法（高三總複習恰好教到這一部分），師生的互動也明顯的增加了。抽象的公式化成有形的以圖為證，一般同學對於這種證明的方式，有很驚訝的反應，當然也有比較優秀的學生感覺它不夠嚴密，畢竟這種嘗試的結果，是會讓數學教師感到有興趣的一件事。

尤其要感謝的是交通大學黃大原老師，對本文提供很多寶貴的意見，及科學教育月刊審查者提供我們許多參考資料，在此特別致十二萬分的謝意。

四、參考資料

- 1.面積關係幫您解題——張景中著 九章出版社
- 2.Proofs Without Words —— Mathematics Magazine (Roger B. Nelsen)