Miquel 定理及其應用

趙文敏
國立臺灣師範大學　數學系

三角形與圓的幾何性質，早在古希臘時代，就已是數學家們的討論主題。Euclid 在他的曠世名著 Elements 中，已經整理出許多有關三角形與圓的定理。其後的數學家們又不時有新的發現，直到十九世紀末年，對於三角形與圓的幾何性質，數學家們所獲得的成果，已遠遠超過 Elements 的內容。本文所要討論的，就是這段時期所獲得成果的一小部分，並做一些推廣。

甲、Miquel 定理及其推廣

下面的定理 1，A. Miquel 在西元 1838 年給出清楚的敘述並提出證明。不過，此定理可能在更早就已為人所知。

定理 1： 設$\triangle A_1A_2A_3$為任意三角形。若點 P_1、P_2與 P_3分別在邊$\overline{A_2A_3}$、$\overline{A_3A_1}$與$\overline{A_1A_2}$上，且點 P_1、P_2與 P_3都不是$\triangle A_1A_2A_3$的頂點，則$\triangle A_1P_2P_3$、$\triangle A_2P_3P_1$與$\triangle A_3P_1P_2$的外接圓共點，而且其交點在$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓的內部。

證： 因為$\triangle A_2P_3P_1$與$\triangle A_3P_1P_2$的外接圓已有一個交點 P_1，所以，它們必有另一交點 P。我們要證明點 A_1、P_2、P_3與 P 共圓，為證明此結論，須證明：當點 P 與點 A_1在直線 P_2P_3同側時，$\angle P_2PP_3=\angle P_2A_1P_3$；當點 P 與點 A_1在直線 P_2P_3異側時，$\angle P_2PP_3=180^\circ-\angle P_2A_1P_3$。我們就點 P 在$\triangle A_1A_2A_3$平面上的不同區域來討論。

(1) 設點 P 在$\triangle A_1A_2A_3$的內部，如圖 1(1)所示，則

$$\angle P_3PP_1=180^\circ-\angle A_3A_2A_1,\quad \angle P_1PP_2=180^\circ-\angle A_1A_3A_2,$$

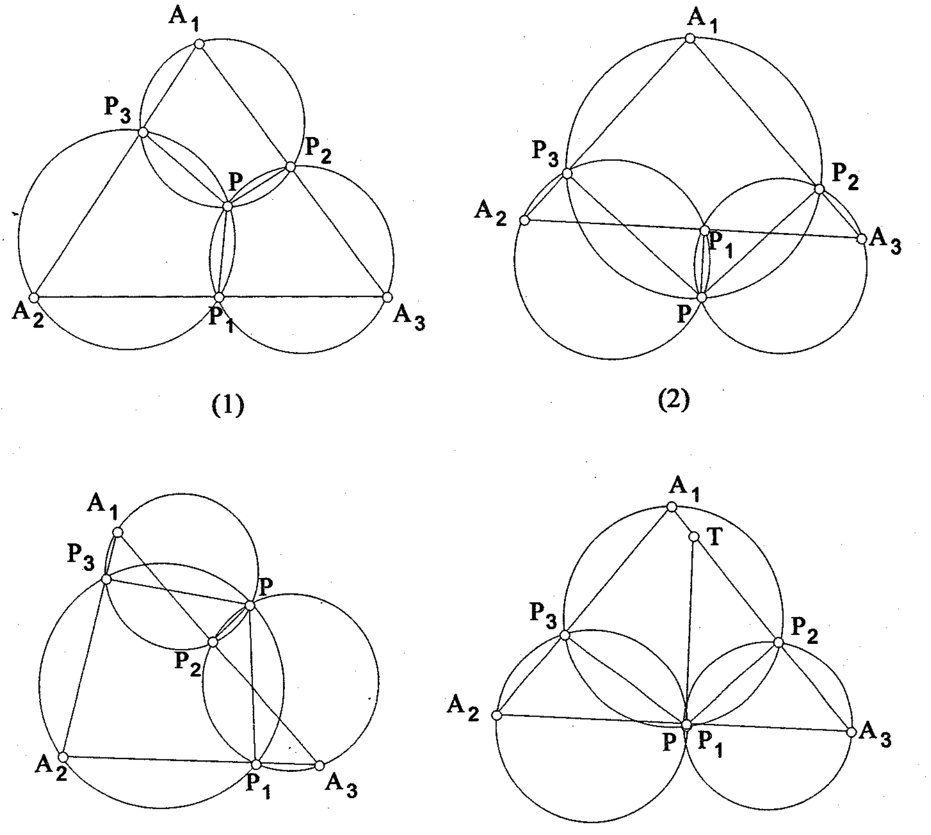
$$\begin{aligned}\angle P_2PP_3&=360^\circ-\angle P_3PP_1-\angle P_1PP_2=\angle A_3A_2A_1+\angle A_1A_3A_2\\&=180^\circ-\angle P_2A_1P_3。\end{aligned}$$

(2) 設點 P 與點 A_1在直線 A_2A_3異側，如圖 1(2)所示，則

$$\angle P_3PP_1=\angle A_3A_2A_1,\quad \angle P_1PP_2=\angle A_1A_3A_2,$$

$$\begin{aligned}\angle P_2PP_3&=\angle P_3PP_1+\angle P_1PP_2=\angle A_3A_2A_1+\angle A_1A_3A_2\\&=180^\circ-\angle P_2A_1P_3。\end{aligned}$$

另一方面，因為$\angle A_2PA_3>\angle P_2PP_3=180^\circ-\angle A_2A_1A_3$，所以，點 P 在$\triangle A_1A_2A_3$的外接圓的內部。



(1) (2) (3) (4)

圖 1

(3) 設點 P 與點 A_2 在直線 A_3A_1 異側，如圖 1(3)所示，則

$$\angle P_3PP_1 = 180^\circ - \angle A_3A_2A_1，\quad \angle P_1PP_2 = \angle A_1A_3A_2，$$

$$\angle P_2PP_3 = \angle P_3PP_1 - \angle P_1PP_2 = 180^\circ - \angle A_3A_2A_1 - \angle A_1A_3A_2$$

$$= \angle P_2A_1P_3。$$

(4) 設點 P 與點 A_3 在直線 A_1A_2 異側，則仿(3)可得 $\angle P_2PP_3 = \angle P_2A_1P_3$。

(5) 設點 P 在 $\overline{A_2A_3}$ 上，即 $P=P_1$，則$\triangle A_2P_3P_1$ 與$\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓相切於點 P_1。在內公切線上取一點 T，使點 T 在$\angle P_2PP_3$ 內部，如圖 1(4)所示，則

$$\angle P_3PT = \angle A_3A_2A_1，\angle P_2PT = \angle A_1A_3A_2，$$

$$\angle P_2PP_3 = \angle P_3PT + \angle P_2PT = \angle A_3A_2A_1 + \angle A_1A_3A_2$$

$$= 180^\circ - \angle P_2A_1P_3。$$

(6) 若點 P 在 $\overline{A_3A_1}$ 上，則因爲$\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓與 $\overline{A_3A_1}$ 交於點 P_2、點 P 與點 A_3，所以，$P=P_2$。於是，點 A_1、P_2、P_3 與 P 共圓（因爲 $P=P_2$）。

(7) 若點 P 在 $\overline{A_1A_2}$ 上，則仿(6)可知點 A_1、P_2、P_3 與 P 共圓。‖

定理 1 中的結果，可以推廣成下面的定理。

定理 2： 設△$A_1A_2A_3$爲任意三角形。若相異的三個點 P_1、P_2與 P_3分別在直線 A_2A_3、A_3A_1與 A_1A_2上，則△$A_1P_2P_3$、△$A_2P_3P_1$與△$A_3P_1P_2$的外接圓共點。

請注意：當點 P_3與頂點 A_1重合時，所謂△$A_1P_2P_3$的外接圓，乃是指過點 P_2而與直線 A_1A_2相切於點 A_1的圓。其餘仿此類推。

定理 2 若以綜合方法來證明，所需的基本性質仍是“圓內接四邊形的對角互補”與“在同一圓上對等弧的兩圓周角相等”。但是，因爲點 P_1、P_2與 P_3分別是直線 A_2A_3、A_3A_1與 A_1A_2上的任意點，例如，以點 P_1爲例，有 $P_1=A_2$、$P_1=A_3$、P_1介於 A_2與 A_3之間、A_2介於 P_1與 A_3之間、A_3介於 P_1與 A_2之間等五種可能位置，所以，就三個點在各直線上的位置加以分類時，就可分成上百種可能的位置組合。何況在每種位置組合中，還得考慮三個外接圓的交點 P 位於那個區域。例如：定理 1 中的交點 P 就可分成四個區域及位於三邊上的情形。這種頗爲複雜的分類考慮既繁複又容易掛一漏萬，所以，定理 2 的嚴密證明似乎只有仰賴坐標方法，才能免除分類的困擾及可能的疏漏，下面的兩個引理是使用坐標方法證明定理 2 所需的兩個定理。

引理 3： 在直角坐標平面上，若四相異點 Z_1、Z_2、Z_3與 Z_4的坐標分別爲 $Z_k(u_k, v_k)$，$k=1, 2, 3, 4$，且其中至少有三點不共線，則點 Z_1、Z_2、Z_3與 Z_4共圓的充要條件是：下述算式所表示的複數是一個實數：

$$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_4} : \frac{z_2-z_3}{z_2-z_4},$$

其中，$z_k=u_k+iv_k$，$k=1, 2, 3, 4$。

引理 4： 在直角坐標平面上，若四相異點 Z_1、Z_2、Z_3與 Z_4的坐標分別爲 $Z_k(u_k, v_k)$，$k=1, 2, 3, 4$，且點 Z_1、Z_2與 Z_3不共線，則點 Z_4在過點 Z_1而與直線 Z_2Z_3相切於點 Z_2之圓上的充要條件是：下述算式所表示的複數是一個實數：

$$\frac{z_1-z_4}{z_1-z_2} : \frac{z_2-z_4}{z_2-z_3},$$

其中，$z_k=u_k+iv_k$，$k=1, 2, 3, 4$。

下面我們利用引理 3 與引理 4 來證明定理 2。

定理 2 的證明：

首先，在△$A_1A_2A_3$的平面上選取一個直角坐標系，設三個頂點的坐標分別爲 $A_1(x_1, y_1)$、$A_2(x_2, y_2)$與 $A_3(x_3, y_3)$。令

$$z_1=x_1+iy_1, \qquad z_2=x_2+iy_2, \qquad z_3=x_3+iy_3。$$

因爲點 P_1、P_2與 P_3分別在直線 A_2A_3、A_3A_1與 A_1A_2上，所以，必有三個實數 t_1、t_2與 t_3使得點 P_1、P_2與 P_3的坐標分別爲：$P_1((1-t_1)x_2+t_1x_3, (1-t_1)y_2+t_1y_3)$、$P_2((1-t_2)x_3+t_2x_1, (1-t_2)y_3+t_2y_1)$與 $P_3((1-t_3)x_1+t_3x_2, (1-t_3)y_1+t_3y_2)$。以點 P_k的橫坐標做爲實部、縱坐標做爲虛部定義一複數 w_k，$k=1, 2, 3$，則得

$$w_1=(1-t_1)z_2+t_1z_3,$$
$$w_2=(1-t_2)z_3+t_2z_1,$$
$$w_3=(1-t_3)z_1+t_3z_2。$$

我們分成四種情形來證明$\triangle A_1P_2P_3$、$\triangle A_2P_3P_1$與$\triangle A_3P_1P_2$的外接圓共點。

(1) 設點 P_1、P_2與 P_3都是頂點。

我們設 $P_1=A_2$、$P_2=A_3$且 $P_3=A_1$，如圖 2(1)所示。設過點 A_1而切直線 A_2A_3於點 A_2的圓與過點 A_2而切直線 A_3A_1於點 A_3的圓相交於另一點 $P(x_0, y_0)$。因爲前一圓不過點 A_3而後一圓不過點 A_1，所以，$P\neq A_3$且 $P\neq A_1$。因爲前一圓過點 A_2的切線通過後一圓的一相異點 A_3，所以，兩圓不會相切於點 A_2。於是，$P\neq A_2$。由此可知：點 A_1、A_2、A_3與 P是四個相異點。令 $z_0=x_0+iy_0$，則依引理 4，必有二實數 b_2與 b_3使得

$$\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2}=b_2\times\frac{z_2-z_0}{z_2-z_3},$$
$$\frac{z_2-z_0}{z_2-z_3}=b_3\times\frac{z_3-z_0}{z_3-z_1}。$$

將後一式代入前一式，即得

$$\frac{z_1-z_0}{z_1-z_2}=b_2b_3\times\frac{z_3-z_0}{z_3-z_1}。$$

由此可知：$[(z_3-z_0)/(z_3-z_1)]:[(z_1-z_0)/(z_1-z_2)]$是一個實數。因爲點 A_1、A_2、A_3不共線，所以，依引理 4，可知通過點 A_1、A_3與 P的圓與直線 A_1A_2相切於點 A_1。

(2) 設點 P_1、P_2與 P_3中恰有兩點是頂點。

我們假設 $P_1=A_2$、$P_2=A_3$但 $P_3\neq A_1$。設過點 P_3而切直線 A_2A_3於點 A_2的圓與過點 A_2而切直線 A_3A_1於點 A_3的圓相交於另一點 $P(x_0, y_0)$。若 $P=P_3$，則點 A_1、A_3、P_3與 P當然共圓。設 $P\neq P_3$。因爲前一圓不過點 A_3而後一圓不過點 A_1，所以，$P\neq A_3$且 $P\neq A_1$。因爲前一圓過點 A_2的切線通過後一圓的一相異點 A_3，所以，兩圓不會相切於點 A_2。於是，$P\neq A_2$。由此可知：點 A_1、A_2、A_3、P_3與 P是五個相異點。令 $z_0=x_0+iy_0$，則依引理 4，必有二實數 c_2與 c_3使得

$$\frac{w_3-z_0}{w_3-z_2}=c_2\times\frac{z_2-z_0}{z_2-z_3},$$

$$\frac{z_2-z_0}{z_2-z_3}=c_3\times\ \frac{z_3-z_0}{z_3-z_1}\ 。$$

將後一式代入前一式，再將 w_3-z_2 以 $(1/t_3)(t_3-1)(w_3-z_1)$ 代入，即得

$$\frac{w_3-z_0}{w_3-z_1}=-\frac{c_2c_3(1-t_3)}{t_3}\times\ \frac{z_3-z_0}{z_3-z_1}\ 。$$

由此可知：$[(w_3-z_0)/(w_3-z_1)]:[(z_3-z_0)/(z_3-z_1)]$ 是一個實數。因爲點 A_1、A_3 與 P_3 不共線，所以，依引理 3，可知點 A_1、A_3、P_3 與 P 共圓。

(3) 設點 P_1、P_2 與 P_3 中恰有一點是頂點。

我們假設 $P_1=A_2$ 且 P_2 與 P_3 都不是頂點。設過點 P_3 而切直線 A_2A_3 於點 A_2 的圓與圓 $A_2A_3P_2$ 相交於另一點 $P(x_0,y_0)$。若 $P=P_2$ 或 $P=P_3$，則$\triangle A_1P_2P_3$ 的外接圓當然通過點 P。設 $P\neq P_2$ 且 $P\neq P_3$。因爲前一圓不過點 A_3 而後一圓不過點 A_1，所以，$P\neq A_3$ 且 $P\neq A_1$。因爲前一圓過點 A_2 的切線通過後一圓的一相異點 A_3，所以，兩圓不會相切於點 A_2。於是，$P\neq A_2$。由此可知：點 A_1、A_2、A_3、P_2、P_3 與 P 是六個相異點。令 $z_0=x_0+iy_0$，則依引理 4，必有二實數 d_2 與 d_3 使得

$$\frac{w_3-z_0}{w_3-z_2}=d_2\times\ \frac{z_2-z_0}{z_2-z_3}\ ,$$

$$\frac{z_2-z_0}{z_2-z_3}=d_3\times\ \frac{w_2-z_0}{w_2-z_3}\ 。$$

將後一式代入前一式， 再將 w_3-z_2 及 w_2-z_3 分別以 $(1/t_3)(t_3-1)(w_3-z_1)$ 及 $(t_2/(t_2-1))(w_2-z_1)$ 代入，即得

$$\frac{w_3-z_0}{w_3-z_1}=\frac{d_2d_3(1-t_2)(1-t_3)}{t_2t_3}\times\ \frac{w_2-z_0}{w_2-z_1}\ 。$$

由此可知：$[(w_3-z_0)/(w_3-z_1)]:[(w_2-z_0)/(w_2-z_1)]$ 是一個實數。因爲點 A_1、P_2 與 P_3 不共線，所以，依引理 3，可知點 A_1、P_2、P_3 與 P 共圓。

(4) 設點 P_1、P_2 與 P_3 都不是頂點。

因爲$\triangle A_2P_3P_1$ 與$\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓已有一交點 P_1，所以，它們必有另一交點 $P(x_0,y_0)$。我們先考慮 $P\neq P_1$ 的情形。若 $P=P_2$ 或 $P=P_3$，則$\triangle A_1P_2P_3$ 的外接圓當然通過點 P。 設 $P\neq P_2$ 且 $P\neq P_3$。因爲$\triangle A_3P_1P_2$ 的外接圓不能通過點 A_1 與 A_2，所以，$P\neq A_1$ 且 $P\neq A_2$。同理，$P\neq A_3$。於是，點 A_1、A_2、A_3、P_1、P_2、P_3 與 P 是七個相異點。依引理 3，可知必有二實數 s_2 與 s_3 使得

$$\frac{z_0-w_3}{z_0-w_1}=s_2\times\ \frac{z_2-w_3}{z_2-w_1}=s_2\times\ \frac{(1-t_3)(z_2-z_1)}{t_1(z_2-z_3)}\ ,$$

$$\frac{z_0-w_1}{z_0-w_2}=s_3\times\ \frac{z_3-w_1}{z_3-w_2}=s_3\times\ \frac{(1-t_1)(z_3-z_2)}{t_2(z_3-z_1)}\ 。$$

將兩式相乘，即得

$$\frac{z_0-w_3}{z_0-w_2}=-s_2\,s_3\times\ \frac{(1-t_1)(1-t_3)(z_1-z_2)}{t_1t_2(z_1-z_3)}$$

$$=-\ \frac{s_2s_3(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}{t_1t_2t_3}\times\ \frac{z_1-w_3}{z_1-w_2}\ 。$$

由此可知：$[(z_0-w_3)/(z_0-w_2)]:[(z_1-w_3)/(z_1-w_2)]$是一個實數。因爲點 A_1、P_2與 P_3不共線，所以，依引理 3，點 A_1、P_2、P_3與 P 共圓，亦即：$\triangle A_1P_2P_3$的外接圓通過點 P。

其次，考慮 $P=P_1$的情形。所謂 $P=P_1$，乃是表示圓 $A_2P_3P_1$與圓 $A_3P_1P_2$相切於點 P_1。在兩圓的內公切線上任選異於 P_1的一點 $T(u,v)$，並令 $w=u+iv$，則依引理 4，可知必有二實數 r_2與 r_3使得

$$\frac{w_1-w_3}{w_1-w}=r_2\times\ \frac{z_2-w_3}{z_2-w_1}=r_2\times\ \frac{(1-t_3)(z_2-z_1)}{t_1(z_2-z_3)}\ ,$$

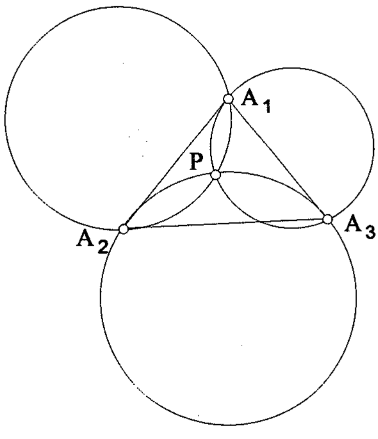
$$\frac{w_1-w}{w_1-w_2}=r_3\times\ \frac{z_3-w_1}{z_3-w_2}=r_3\times\ \frac{(1-t_1)(z_3-z_2)}{t_2(z_3-z_1)}\ 。$$

將兩式相乘，即得

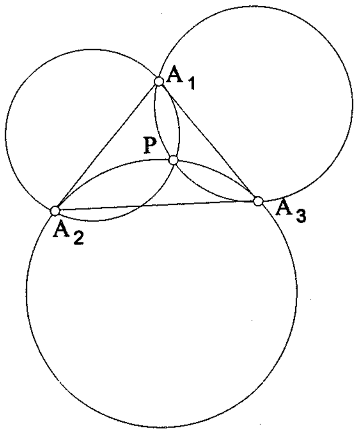
$$\frac{w_1-w_3}{w_1-w_2}=-r_2r_3\times\ \frac{(1-t_1)(1-t_3)(z_1-z_2)}{t_1t_2(z_1-z_3)}$$

$$=-\ \frac{r_2r_3(1-t_1)(1-t_2)(1-t_3)}{t_1t_2t_3}\times\ \frac{z_1-w_3}{z_1-w_2}\ 。$$

由此可知：$[(w_1-w_3)/(w_1-w_2)]:[(z_1-w_3)/(z_1-w_2)]$是一個實數。因爲點 A_1、P_2與 P_3不共線，所以，依引理 3，點 A_1、P_2、P_3與 P 共圓，亦即：$\triangle A_1P_2P_3$的外接圓通過點 P。‖



(1)



(2)

圖 2

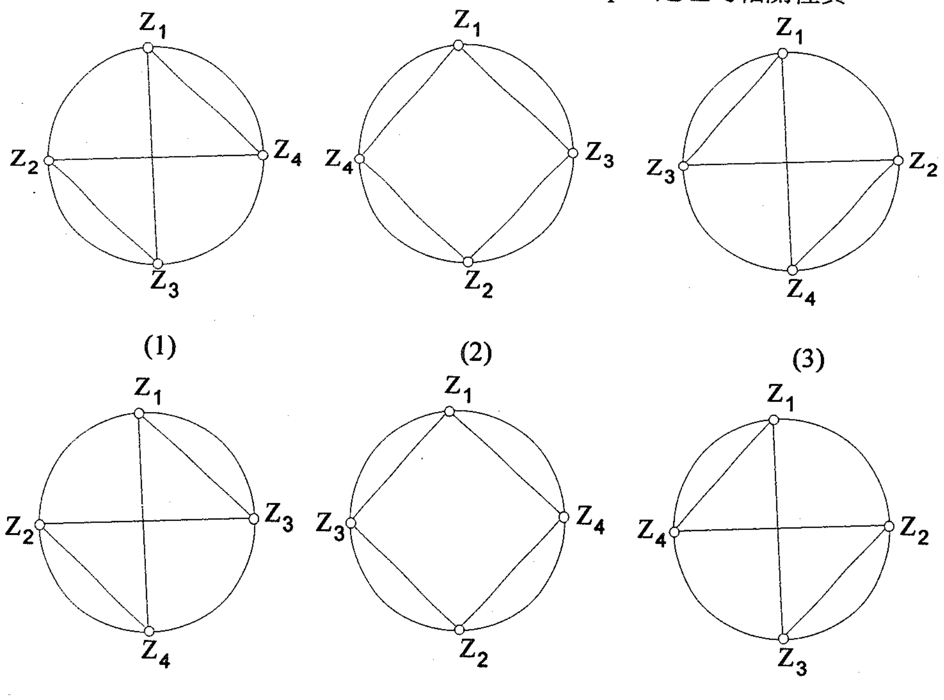
在定理 2 的結果中，圓 $A_1P_2P_3$、圓 $A_2P_3P_1$與圓 $A_3P_1P_2$的交點 P 稱爲$\triangle P_1P_2P_3$或三點集$\{P_1,P_2,P_3\}$對$\triangle A_1A_2A_3$的 Miquel 點，$\triangle P_1P_2P_3$稱爲點 P 對$\triangle A_1A_2A_3$的一個 Miquel 三角形，

而圓 $A_1P_2P_3$、圓 $A_2P_3P_1$ 與圓 $A_3P_1P_2$ 則稱爲點 P 對△$A_1A_2A_3$ 的一組 Miquel 圓。請注意：Miquel 三角形可能退化成三點共線的情形。

定理 2 證明中的第一種情形，可得出兩個具有特殊性質的點。當 $P_1=A_2$、$P_2=A_3$ 且 $P_3=A_1$ 時，對應的三個圓分別是：過點 A_1 而與直線 A_2A_3 相切於點 A_2 的圓、過點 A_2 而與直線 A_3A_1 相切於點 A_3 的圓、過點 A_3 而與直線 A_1A_2 相切於點 A_1 的圓。這三個圓的交點稱爲△$A_1A_2A_3$ 的一個 Brocard 點 (Brocard point)，參看圖 2(1)。當 $P_1=A_3$、$P_2=A_1$ 且 $P_3=A_2$ 時，對應的三個圓的交點是△$A_1A_2A_3$ 的另一個 Brocard 點，參看圖 2(2)。因爲過點 A_1 而與直線 A_2A_3 相切的圓不會通過與點 A_1 在直線 A_2A_3 異側的任何點，過點 A_2 而與直線 A_3A_1 相切的圓不會通過與點 A_2 在直線 A_3A_1 異側的任何點，過點 A_3 而與直線 A_1A_2 相切的圓不會通過與點 A_3 在直線 A_1A_2 異側的任何點，所以，兩個 Brocard 點都在△$A_1A_2A_3$ 的內部。關於三角形的 Brocard 點及其相關的圖形，有著豐富的題材可供探討。

任意給定一個三點集$\{P_1, P_2, P_3\}$，對應的 Miquel 點會位於那些可能的區域呢？這是一個既繁複又多變化的問題，本文不再討論，有興趣的讀者可自行加以探討。探討這個問題，目前已開發的一些幾何軟體可提供很好的幫助。

我們先完成引理 3 與引理 4 的證明，再討論有關 Miquel 定理的相關性質。



(1)　(2)　(3)

(4)　(5)　(6)

圖 3

引理 3 的證明：設 $Z_k(u_k, v_k)$爲直角坐標平面上四個相異點，令 $z_k=u_k+iv_k$，$k=1, 2, 3, 4$。

必要性：若 Z_1、Z_2、Z_3 與 Z_4 四點共圓，則此四點在圓上的相對位置可分成六種情形，如圖 3 所示。在圖 3(1)、圖 3(3)、圖 3(4)與圖 3(6)中，點 Z_1 與 Z_2 位於直線 Z_3Z_4 的同側，所以，有向角 $\angle Z_4Z_1Z_3$ 與有向角 $\angle Z_4Z_2Z_3$ 的方向相同且大小相等。於是，前者減去後者的差等於 0°。另一方面，在圖 3(2)與圖 3(5)中，點 Z_1 與 Z_2 位於直線 Z_3Z_4 的異側，所以，有向角 $\angle Z_4Z_1Z_3$ 與有向角 $\angle Z_4Z_2Z_3$ 的方向相反且大小互補。於是，在圖 3(2)中，前者減去後者的差等於 180°；而在圖 3(5)中，前者減去後者的差等於－180°。因爲有向角 $\angle Z_4Z_1Z_3$ 與有向角 $\angle Z_4Z_2Z_3$ 分別爲複數 $(z_1-z_3)/(z_1-z_4)$ 與 $(z_2-z_3)/(z_2-z_4)$ 的輻角，所以，由兩有向角之差等於 0°、180° 或－180° 可知：$(z_1-z_3)/(z_1-z_4)$ 與 $(z_2-z_3)/(z_2-z_4)$ 的比值爲實數，亦即：$[(z_1-z_3)/(z_1-z_4)]:[(z_2-z_3)/(z_2-z_4)]$ 爲一實數。

充分性：設 $[(z_1-z_3)/(z_1-z_4)]:[(z_2-z_3)/(z_2-z_4)]$ 爲一實數，並設點 Z_1、Z_2 與 Z_3 不共線。於是，有向角 $\angle Z_2Z_3Z_1$ 不等於 0°、180° 及－180°。因此，$(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 不是實數。因爲 $[(z_1-z_3)(z_2-z_4)]/[(z_2-z_3)(z_1-z_4)]$ 爲一實數，所以，$(z_2-z_4)/(z_1-z_4)$ 不是實數。於是，點 Z_1、Z_2 與 Z_4 不共線。另一方面，因爲複數 $(z_1-z_3)/(z_2-z_3)$ 與 $(z_1-z_4)/(z_2-z_4)$ 的比值爲實數，它們的輻角之差等於 0°、180° 或－180°。由此可知：有向角 $\angle Z_2Z_3Z_1$ 減去有向角 $\angle Z_2Z_4Z_1$ 之差等於 0°、180° 或－180°。若其差等於 0°，則有向角 $\angle Z_2Z_3Z_1$ 與有向角 $\angle Z_2Z_4Z_1$ 的方向相同且大小相等。於是，點 Z_3 與 Z_4 位於直線 Z_1Z_2 的同側且 $\angle Z_2Z_3Z_1=\angle Z_2Z_4Z_1$。依圓周角定理，可知點 Z_1、Z_2、Z_3 與 Z_4 四點共圓。若其差等於 180° 或－180°，則因爲有向角 $\angle Z_2Z_3Z_1$ 與有向角 $\angle Z_2Z_4Z_1$ 都小於 180° 而且大於－180°，所以，有向角 $\angle Z_2Z_3Z_1$ 與有向角 $\angle Z_2Z_4Z_1$ 的方向相反且大小互補。於是，點 Z_3 與 Z_4 位於直線 Z_1Z_2 的異側且 $\angle Z_2Z_3Z_1+\angle Z_2Z_4Z_1=180°$。依圓內接四邊形的定理，可知點 Z_1、Z_2、Z_3 與 Z_4 四點共圓。‖

引理 4 的證明：設 $Z_k(u_k, v_k)$爲直角坐標平面上四個相異點，令 $z_k=u_k+iv_k$，$k=1, 2, 3, 4$。

必要性：若點 Z_4 在過點 Z_1 而與直線 Z_2Z_3 相切於點 Z_2 的圓上，則此四點 Z_1、Z_2、Z_3 與 Z_4 的相對位置可分成四種情形，如圖 4 所示。在圖 4(1)與圖 4(4)中，有向角 $\angle Z_2Z_1Z_4$ 與有向角 $\angle Z_3Z_2Z_4$ 的方向相同且大小相等。於是，前者減去後者的差等於 0°。另一方面，在圖 4(2)與圖 4(3)中，有向角 $\angle Z_2Z_1Z_4$ 與有向角 $\angle Z_3Z_2Z_4$ 的方向相反且大小互補。於是，在圖 4(2)中，前者減去後者的差等於－180°；而在圖 4(3)中，前者減去後者的差等於 180°。因爲有向角 $\angle Z_2Z_1Z_4$ 與有向角 $\angle Z_3Z_2Z_4$ 分別爲複數 $(z_1-z_4)/(z_1-z_2)$ 與 $(z_2-z_4)/(z_2-z_3)$ 的輻角，所以，由兩有向角之差等於 0°、180° 或－180° 可知：兩複數 $(z_1-z_4)/(z_1-z_2)$ 與 $(z_2-z_4)/(z_2-z_3)$ 的比值 $[(z_1-z_4)/(z_1-z_2)]:[(z_2-z_4)/(z_2-z_3)]$ 爲一實數。

充分性：設$[(z_1-z_4)/(z_1-z_2)]:[(z_2-z_4)/(z_2-z_3)]$爲一實數。因爲點 Z_1、Z_2與 Z_3 不共線，所以，有向角$\angle Z_1Z_2Z_3$ 不等於 0°、180°及－180°。於是，$(z_2-z_3)/(z_2-z_1)$不是實數。因爲$[(z_1-z_4)(z_2-z_3)]/[(z_2-z_4)(z_1-z_2)]$爲一實數，所以，$(z_1-z_4)/(z_2-z_4)$不是實數。於是，點 Z_1、Z_2與 Z_4不共線，亦即：點 Z_1、Z_2與 Z_4共圓。其次，考慮圓 $Z_1Z_2Z_4$過點 Z_2的切線，設 $Z_5(u_5, v_5)$爲此切線上異於點 Z_2的任意點，令 $z_5=u_5+iv_5$。因爲點 Z_4在過點 Z_1而與直線 Z_2Z_5相切於點 Z_2 的圓上，所以，$[(z_1-z_4)/(z_1-z_2)]:[(z_2-z_4)/(z_2-z_5)]$ 爲一實數。因爲$[(z_1-z_4)/(z_1-z_2)]:[(z_2-z_4)/(z_2-z_3)]$也是實數，所以，此二實數的商$(z_2-z_5)/(z_2-z_3)$是一實數。由此可知：點 Z_2、Z_3與 Z_5共線，亦即：點 Z_4在過點 Z_1而與直線 Z_2Z_3相切於點 Z_2的圓上。‖

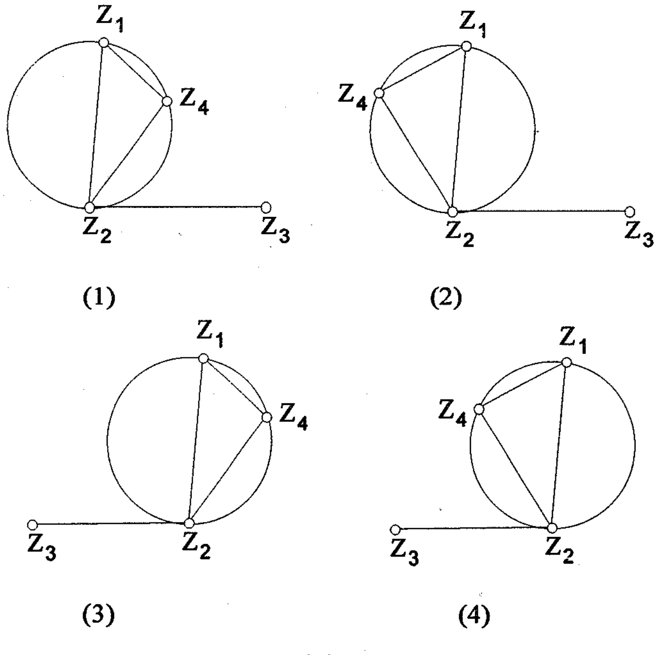


圖 4