# 展開圖二三事

彭君智
臺北市景興國民中學

這兩年指導學生研究多面體科展得到些許成果，適逢立體教材於去年編入國中課程（註一），乃將與製作立體相關的研究內容整理與大家分享，野人獻曝，還望各位讀者不吝指教。

## 零、預備知識：正多面體

【思考】平面上的「正多邊形有無限多個」（註二），請問：空間中的「正多面體」有幾個？

【建構】何謂「正多面體」？這些立體需具備哪些條件？其數量有限制嗎？在弄清這些疑慮之前，不妨先思考平面的狀況：二度空間的正多邊形需滿足「等角、等邊」兩個條件，因此推廣到三度空間的正多面體時，最少應具備「等角、等邊、等形」三個條件，我們將之歸納如下：

(1)二維條件：由數個全等的正多邊形組成。

(2)三維條件：構成頂點的多面角皆相等（匯集的稜數都相同）。

滿足上述要求的多面體即稱爲「正多面體」（regular polyhedra），有正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體等五種，也通稱爲柏拉圖立體（The Platonic solids）；若把二維中「等形」這條件放寬，將「數個全等的正多邊形」改成「數種同邊長的正多邊形」，可變化出 13 個規則的「半正多面體」（semi-regular polyhedra），也通稱爲「阿基米得立體」（The Archimedean solids）。

## 壹、巧解展開圖：角對稱

【說明】一般說來，「繪製展開圖」是製做立體的基本方法，卻也是首要難題。就拿大家最爲熟悉的立方體爲例，光是六個正方形的展開圖排列就有 11 種不同的變化（附件 1），換做是足球的話，豈不讓人傻眼？由於展開圖此一不確定性總要到組合時才能驗證對錯，故欲尋求一種繪製時即可依循、判斷的法則。首先想到「對稱」，可惜構成多面體基本要素的正多邊形中，只有正偶數邊形符合「點對稱」，故無法採用，而在繪製的過程中，也不易顧到「線對稱」，因此我們定義「角對稱」：若一圖形以一定點旋轉 $\Theta$ 角度後會重合，則稱此圖形爲「角對稱圖形」，該定點稱爲「角對稱中心」（註三）。如此所有的正多邊形皆符合「角對稱」（$\Theta=\frac{360°}{n}$），展開圖便可依角對稱現形 。

【規則】選定多面體一面之重心為角對稱中心（稱之為中心面），判定一個方向的展開擴充之後，其他方向便依角對稱仿造完成。

＜例 1＞正四面體角對稱展開圖繪製過程：

(1)取一正三角形為中心面；

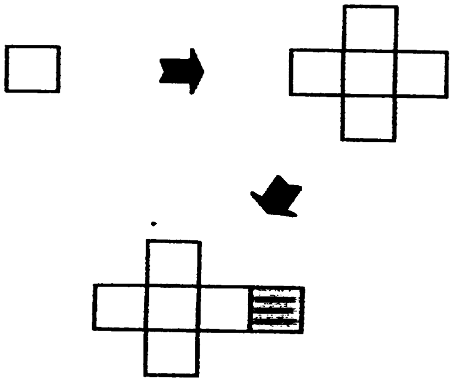
(2)從正三角形三邊各擴充一個正三角形即完成。

＜例 2＞正六面體角對稱展開圖繪製過程：

(1)取一正方形為中心面；

(2)從正方形四邊各擴充一個正方形；

(3)加一個正方形蓋子（註四）即完成。



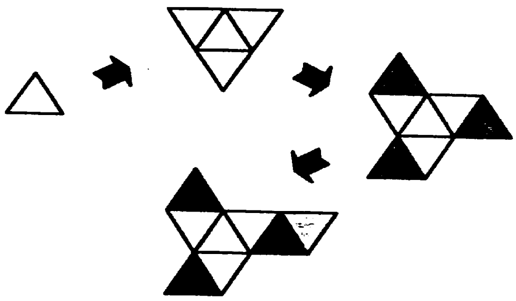
＜例 3＞正八面體角對稱展開圖繪製過程：

(1)取一正三角形為中心面；

(2)從正三角形三邊各擴充一個正三角形；

(3)依順時針方向擴充三個正三角形；

(4)加一個正三角形蓋子即完成。

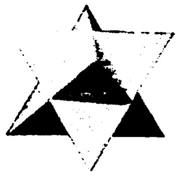


【發現】

(一)由於「中心面」必與「蓋子」平行，所以除了沒有平行面的正四面體以外，其餘十七個多面體（皆存有多組平行面）的角對稱展開圖都有蓋子（附件 2）。

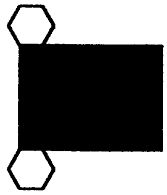
(二)以角對稱繪製展開圖的便利在於只需檢查判斷一個方向的正確性，其他方向即可依此類推來完成全部的展開圖。可惜仍有三大缺點：

(1)不是所有立體的展開圖都能以角對稱方式排列，如星狀凹多面體（找不到作為對稱中心的「底面」）。

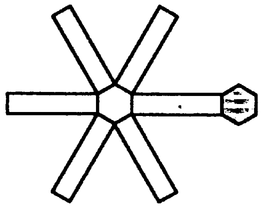


八星體

二十星體



一般的展開圖

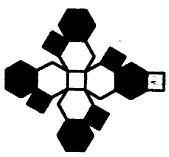


角對稱展開圖

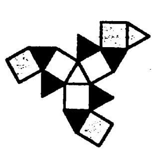
(2)實際製作立體時，角對稱展開圖不見得最簡便或最省材料，如角柱（角對稱展開圖做起來反而耗材、費事）。

(3)畫法仍不唯一，除了順逆時針的夾雜變化之外，<u>阿基米得</u>立體的中心面還可以有多種選擇，例如足球：可選擇以正五邊形為中心面，也可以選擇正六邊形為中心面。下圖為附件 2 中部分立體角對稱展開圖的另一畫法。

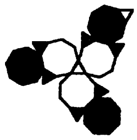
d



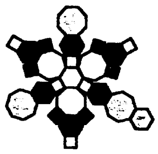
e



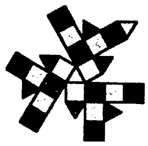
f



g

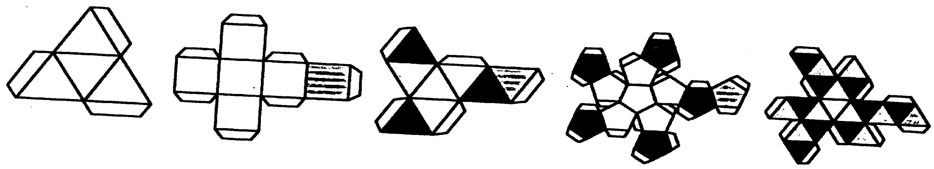


h



## 貳、妙解預留邊：拉鏈法則

【說明】多面體的展開圖利用角對稱完成之後，緊接而來的難題是：如何選取預留邊？有了預留邊，立體才得以黏貼成形，相信聰明的讀者很快就能現學現賣，利用角對稱來依樣畫葫蘆：判斷一個方向的預留邊，餘按角對稱為之。然而「預留黏貼邊」這個與數學最沒有關係的勞作裡，卻意外地存在一個漂亮的法則：正確的展開圖中，任取一邊放預留邊，則其鄰邊不留，依次留、不留、留、不留……最後一定不會發生兩個留邊相鄰或兩個不留邊相鄰的狀況（如下圖的<u>柏拉圖</u>立體展開圖），且黏貼完成的立體剛剛好，一條稜配一個預留邊。



【想像】製作立體時，上述的預留邊法則每次使用都正確，偶爾還能抓出小錯誤。以下是我們早期嘗試套用的兩個例子：

(1)由於「黏貼邊」的產生係由原立體的稜切開而得，故需黏貼的邊數必為偶數（恆為切開稜數的兩倍），而預留邊將黏貼邊兩兩黏接，所以預留邊數恰等於切開的稜數，因此留、不留的選取便如同街道上閃爍的霓虹燈「亮、不亮相間」。

(2)仿尤拉公式的投影說明，將展開圖與黏貼邊拉開成正多邊形，則預留邊便如齒輪或城垛般凹凸排列。

【證明】以上兩種「例證」其實一直都在留、不留的結果上「自圓其說」，未能充分解釋預留邊法則的正確性，直到有一次製作立體時，為了省材料將雙面膠剪半，才意外地發現強而有力的證據：對多面體而言，預留邊數皆為奇數，列表之後才驚覺「預留邊數 S 剛好都比頂點數 V 少 1」。有了這項重要的線索，再搭配拉鍊的靈感(註五)，終將「預留邊的拉鏈法則」圓滿呈現。

＜推論 1＞：$S = V - 1$

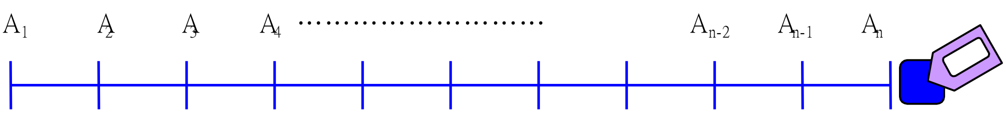
(1)想像多面體上每個稜皆由拉鏈構成，任取一頂點開始拉開拉鏈，直到不能再拉為止（立體仍需相連），稱之為「母拉鏈」；若立體仍未「躺平」成展開圖，再取一頂點開始拉開，稱之為「子拉鏈」，依此類推，直到立體被拆解成相連的平面展開圖。

(2)觀察母拉鏈 A（圖一），起、終點 $A_1$、$A_n$ 皆為頂點，中間的 $A_2$、$A_3$、$A_4$、……$A_{n-2}$、$A_{n-1}$ 為其通過的頂點，而頂點間以預留邊將稜黏合，故 $S_A = V_A - 1$。

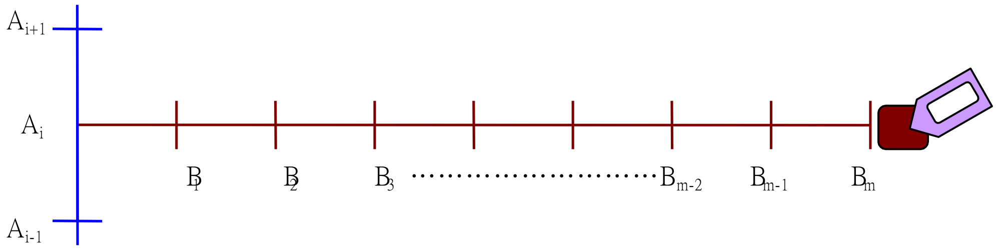
(3)觀察子拉鏈 B（圖二），有一頂點（$A_i$）與母拉鏈 A 共用，故增加的頂點數與預留邊數相同：$S_B = V_B$，依此類推：$S_C = V_C$ ……。

(4)如果立體上有一頂點沒有被拉鍊通過，則該處仍為立體而非平面展開圖，所以 $V = V_A + V_B + V_C +$ ……又 $S = S_A + S_B + S_C +$ …… 故 $S = (V_A - 1) + V_B + V_C +$ …… $= V - 1$ 得證（註六）。

【圖一】



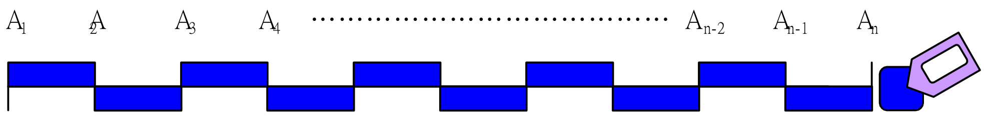
【圖二】



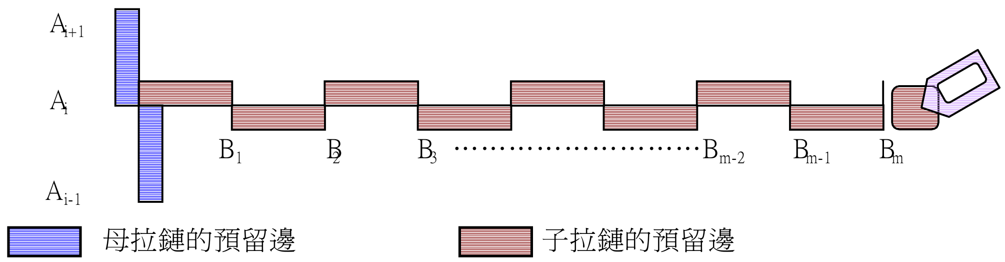

＜推論 2＞：拉鍊法則

母拉鏈 A 中，預留邊可如拉鏈的咬齒般凹凸相間（圖三），而子拉鏈 B 的預留邊排法亦是凹凸相間，故可選擇配合母拉鏈 A 之凹凸順序（圖四），餘依此類推。所以張開的展開圖中，必無兩個留邊（凸的咬齒）相鄰，也必無兩個不留邊（凹的空隙）相鄰，黏成的立體，自然是一條稜配一個預留邊。（註七）

【圖三】




【圖四】




## 參、文獻外一章：Learning by Doing

西元前三、五百年，古希臘學者「算算看」，將多面體難度較高的的數學性質（數量、體積、對角線…）研究透徹，然而漏網「鯨」魚竟在兩千年後，瑞士數學家尤拉（Euler 1707~1783）「數數看」，才發現多面體較基本的點、線、面的數量關係：V－E＋F＝2（註八）。今天，我們「做做看」，從經驗中得到展開圖預留邊的拉鏈法則，雖不敢說是什麼大定理，卻也是數學在勞作中的美。

## 肆、參考資料：

1.李明泓、胡伯宇、張紘聞、劉隆穎＜3D 立體世界探堪之旅＞台北市第 32 屆中小學科學展

覽國中組數學科作品。

2.涂怡安、謝依穎、范時瑋、范姜士璁<3D 立體再探>台北市第 33 屆中小學科學展覽國中組數學科作品。

3.蔡自強、孫文先<數學立體模型製作>台北，九章出版社。

4.陳棋銘<數學的學校：正多面體的故事、鋪路石的排列法>譯本，新竹，大夏出版社，55～63、75～83 頁，民國 75。

5.溫亦剛<中學數學基礎百科全書：立體幾何>第三版，台北，九鼎出版社，230～253 頁，民國 77.5。

## 伍、註解：

1.<國中數學第四冊 2-4 生活中的立體圖形>初版，台北，國立編譯館，119～142 頁，民國 88.1。國小舊教材於立體部分著墨甚多<第八冊第 7 章長方體與正方體、第十一冊第 3 章角柱與角錐、第 7 章圓柱與圓錐>然新教材已刪減。高中部分在舊版課程中已編入補充教材<基礎數學統合上冊第 4 章多面體與尤拉公式>第七版，台北，國立編譯館，68～83 頁，民國 80.8。

2.如何畫出無限多個正多邊形？利用國中學過的角平分線和圓內接正多邊形即可造出無限多個邊數成等比數列的正多邊形（似魏晉時期劉徽求圓周率所用的「割圓術」）。

3.「角對稱」其實就是「旋轉對稱」，目的是希望從多變的展開圖中，提供一條「王者之道」。以「角」為名只為與「點」、「線」、「面」之對稱作呼應，當 $\Theta=180^\circ$ 時，恰為點對稱圖形。

4.若將多面體視為「茶壺」，則中心面為「壺底」，最後與中心面平行的面為「壺蓋」（蓋子）。較早的想法源自中秋節的「剝柚子」：切去的頭為「蓋子」，剝開的輻射狀即為「角對稱」。

5.拉鏈的靈感來自坊間的漫畫：JoJo 冒險野郎裡的替身使者：鋼鏈手指。而賴「S = V − 1」的連結才充分利用拉鍊凹凸相間的咬齒說明其正確性（其數量關係則類似路旁種樹、立電線桿的問題）。

6.若將尤拉公式「V − E + F = 2」化成 E =（V - 1）+（F - 1）觀察等式左右兩邊各符號所代表的意義：「E」是立體的總稜數；（F - 1）代表平面展開圖中，連接 F 個面所需的稜數，也就是立體未被拉鍊拉開的稜數，因此（V - 1）便代表立體被拉鍊拉開的稜數，也就等於預留邊數 S，美哉！「S = V − 1」得證。（此精簡證法感謝<科教月刊>的審核指導）

7.「拉鍊法則」希望能再精進：如果每一個立體都有辦法只用一條母拉鍊就可拉開成平面展

開圖，而毋需用到子拉鍊的話，那麼拉鍊法則中預留邊留、不留的凹凸現象便顯而易見（查資料時才又發現此企圖恰與愛爾蘭數學家哈密頓（Hamilton 1805~65）所提「環遊世界遊戲」有異曲同工之妙：將立體視為地球、頂點為城市、邊為旅遊路線：如何參觀完所有城市，但不重複經過的路線和城市，最後還能回到起點？當母拉鍊頭、尾相臨時，即可環遊世界，完整結果仍在探究中）。

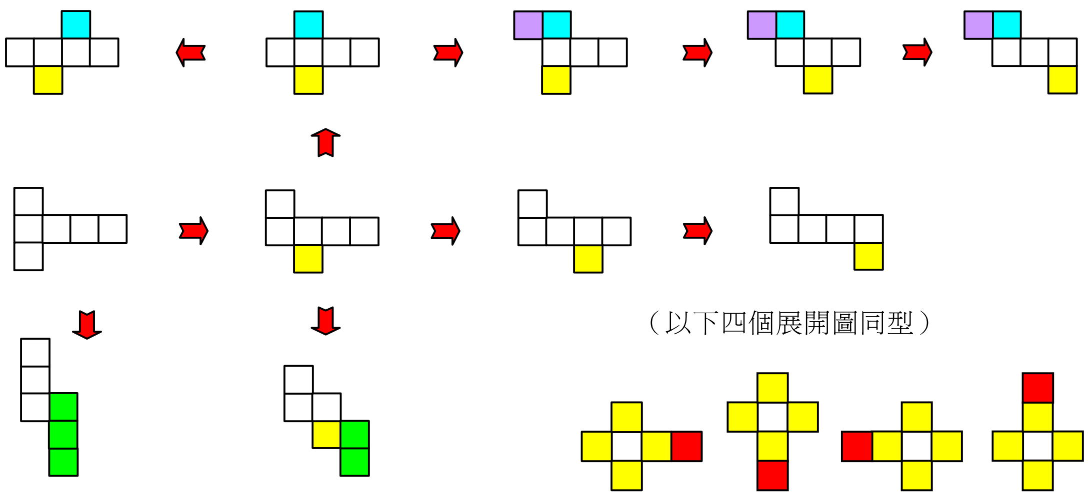
8.稍早，法國的笛卡兒（Descartes 1596~1661）也發現多面體另一相關但複雜的公式：

（A 代表多面體上各多邊形的內角總和）

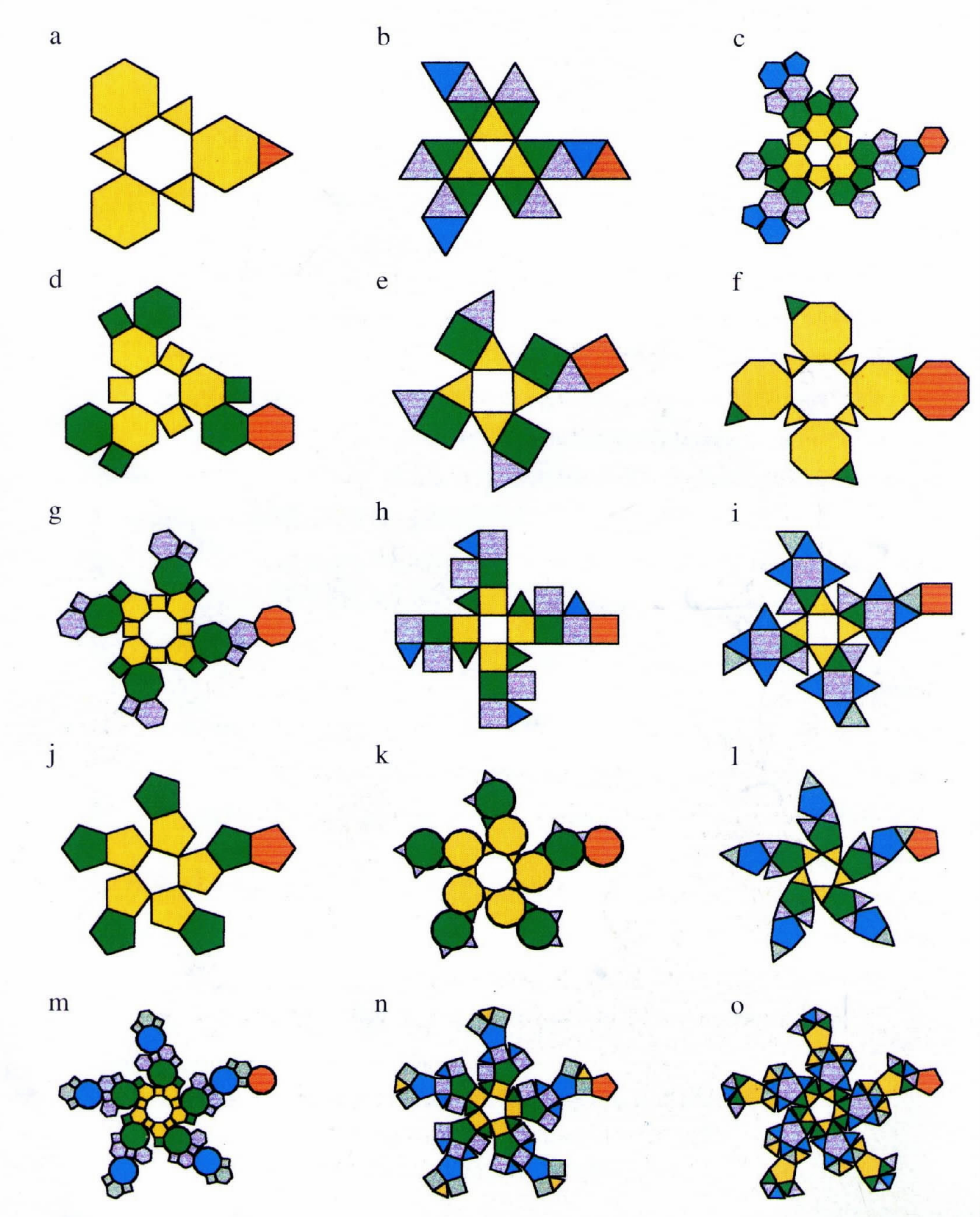
$A = 360^\circ \times V - 720^\circ$ 可化成 $360^\circ$（$V - 2$）或 $360^\circ$（$E - F$）

## 陸、附件：

(一)11 種相異的立方體展開圖（不考慮旋轉與翻轉）：




(二)多面體角對稱展開圖（請參考封底圖片）：


a
b
c
d
e
f
g
h
i
j
k
l
m
n
o